syd-K7-Bspl2

Implizites Differenzieren

Ha, zu Sydsaeter Kap 7

Impizite Gleichungen wie Bspl 2 S. 262 $\mathbf{gl}:=y^3+3\cdot x^2\cdot y=13$

lassen sich mit TI Nspire (vorläufig) nur zeichnen wenn der Grad der Gleichung höchsten 2 ist. Dann handelt es sich um einen Kegelschnitt.

Der Graph auf Seite 3 ist eine Überlistung mit den 3D−Möglichkeiten.

GeoGebra zeichnet die obige Gleichung and andere höheren Grades problemlos.

Mit TI kan mann aber implizit ableiten, was widerum GeoGbra (noch) nicht kann, da es kein volles CAS ist.

Es gibt am TI einen direkten Befehl zum Impiziten Ableiten.

$\mathrm{impDif}(\mathbf{gl},x,y) \blacktriangleright \frac{-2\cdot x\cdot y}{x^2+y^2}$ das ist gleich nach y' aufgelöst.

Um **nachvollziehbar** implzit abzuleiten, muss man y durch ein nicht definiertes f(x) ersetzen:

1.1

syd-K7-Bspl2

$\mathbf{gli}:=\mathbf{gl}|y=f(x)$ ▸ $(f(x))^3+3\cdot f(x)\cdot x^2=13$ und nun geht (von den Vorlagen)

$\frac{d}{dx}(\mathbf{gli})$ ▸ $\left(3\cdot (f(x))^2+3\cdot x^2\right)\cdot \frac{d}{dx}(f(x))+6\cdot f(x)\cdot x=0$ ⚠ ist die implizite Ableitung

Also wie im Buch $\text{abl}:=\left(3y^2+3\cdot x^2\right)\cdot y'+6y\cdot x=0$

delvar **able** ▸ $3\cdot yy\cdot x^2+6\cdot x\cdot y+3\cdot yy\cdot y^2=0$

Die Rechnungen zu Beispiel 2 wären noch

$\mathbf{able}:=\mathbf{abl}|y'=yy$ ▸ $3\cdot yy\cdot x^2+6\cdot x\cdot y+3\cdot yy\cdot y^2=0$

Dummerweise wir y' nicht akzeptiert, yy soll nun der Name für y' sein.

$\text{solve}(\mathbf{able},yy)$ ▸ $yy=\frac{-2\cdot x\cdot y}{x^2+y^2}$ Dies ist das Ergebnis, das $\text{impDif}(\mathbf{gl},x,y)$ ▸ $\frac{-2\cdot x\cdot y}{x^2+y^2}$

direkt liefert.

1.2

syd-K7-Bspl2

Die zweite Ableitung der gegebenen Gleichung kann man einerseits

durch $\text{impDif}(\mathbf{gl},x,y,2) \blacktriangleright \dfrac{2\cdot(x^2-y^2)\cdot(3\cdot x^2+y^2)\cdot y}{(x^2+y^2)^3}$ gleich in aufgelöster Form

erhalten. Andererseite kann man in nachvollziehbarer Form es so machen wie oben:

$$\frac{d^2}{dx^2}(\mathbf{gli})$$

$$\blacktriangleright (3\cdot(f(x))^2+3\cdot x^2)\cdot \frac{d^2}{dx^2}(f(x))+6\cdot f(x)\cdot\left(\frac{d}{dx}(f(x))\right)^2+12\cdot\frac{d}{dx}(f(x))\cdot x+6\cdot f(x)=0$$

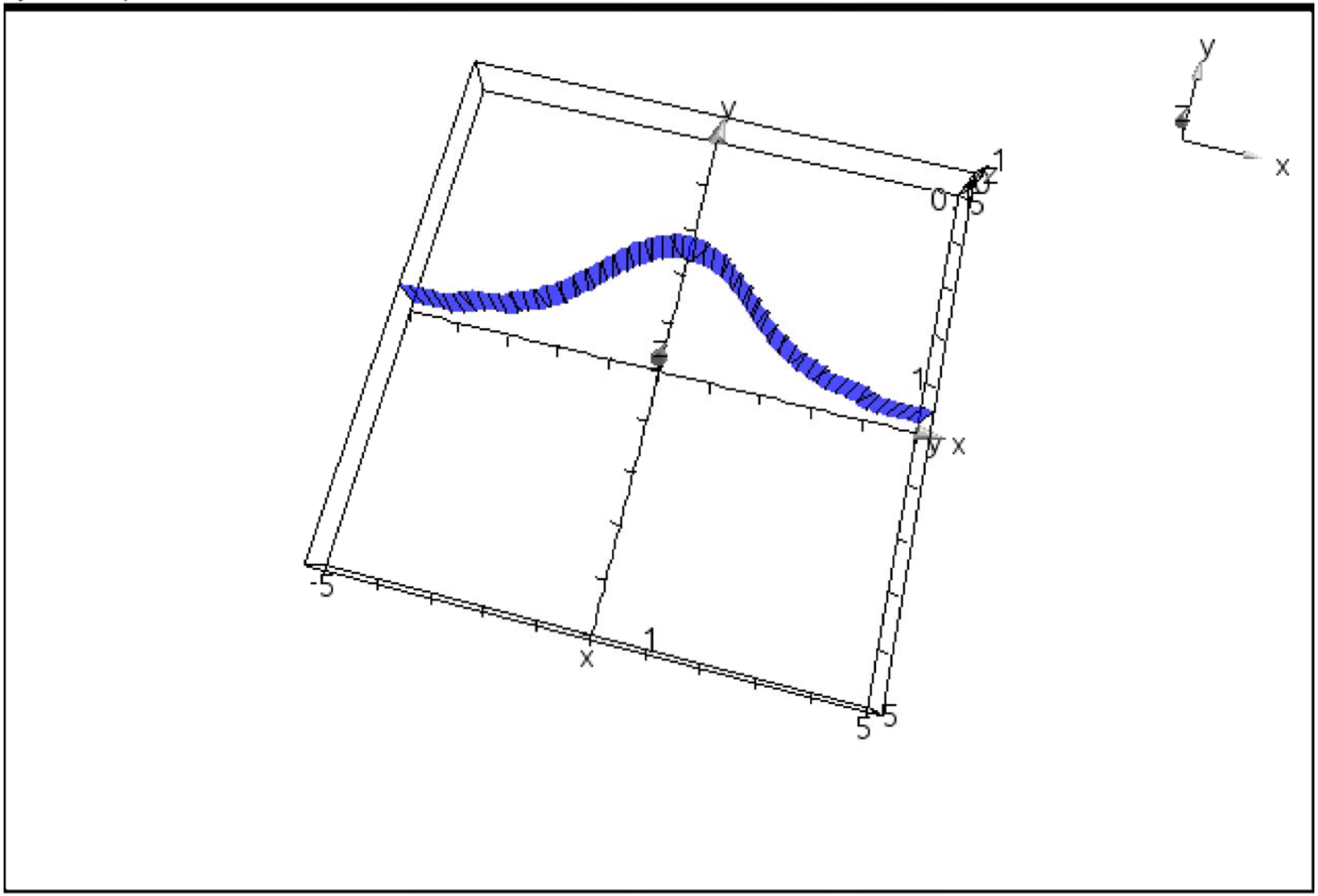
die zweite Implizite Ableitung. Der Differenzialoperator $\frac{d}{d\square}(\square)$ ist dann

als $y\,'$ bzw. y " zu schreiben. Für das letzte also

$(3\,y^2+3\,x^2)\cdot y\,'' + 6\,y\cdot(y\,')^2+ 12\,y\,'\cdot x+ 6\,y = 0$ Hier ist y' noch drin, was für machne Zwecke praktisch ist.

1.3

syd-K7-Bspl2



1.4

syd-K7-Afg zu 7.1 Nr 2

Implizite Kurve Sydsaeter, S 264 A 2

Ha

Ich schreibe dach x statt u und v statt v $\mathbf{gl}:=x^2+x\cdot y-y^3=0$

$\mathbf{gli}:=\mathbf{gl}|y=f(x) \;\blacktriangleright\; -(f(x))^3+f(x)\cdot x+x^2=0$

$\frac{d}{dx}(\mathbf{gli}) \;\blacktriangleright\; \left(x-3\cdot(f(x))^2\right)\cdot\frac{d}{dx}(f(x))+f(x)+2\cdot x=0$ ⚠

$\mathbf{abl}:=\left(x-3\cdot y^2\right)\cdot yy+y+2\cdot x=0 \;\blacktriangleright\; (yy+2)\cdot x-3\cdot yy\cdot y^2+y=0$

$\mathbf{abl}|yy=0 \;\blacktriangleright\; 2\cdot x+y=0$ Das ist in die gegebene Gleichung einzusetzen

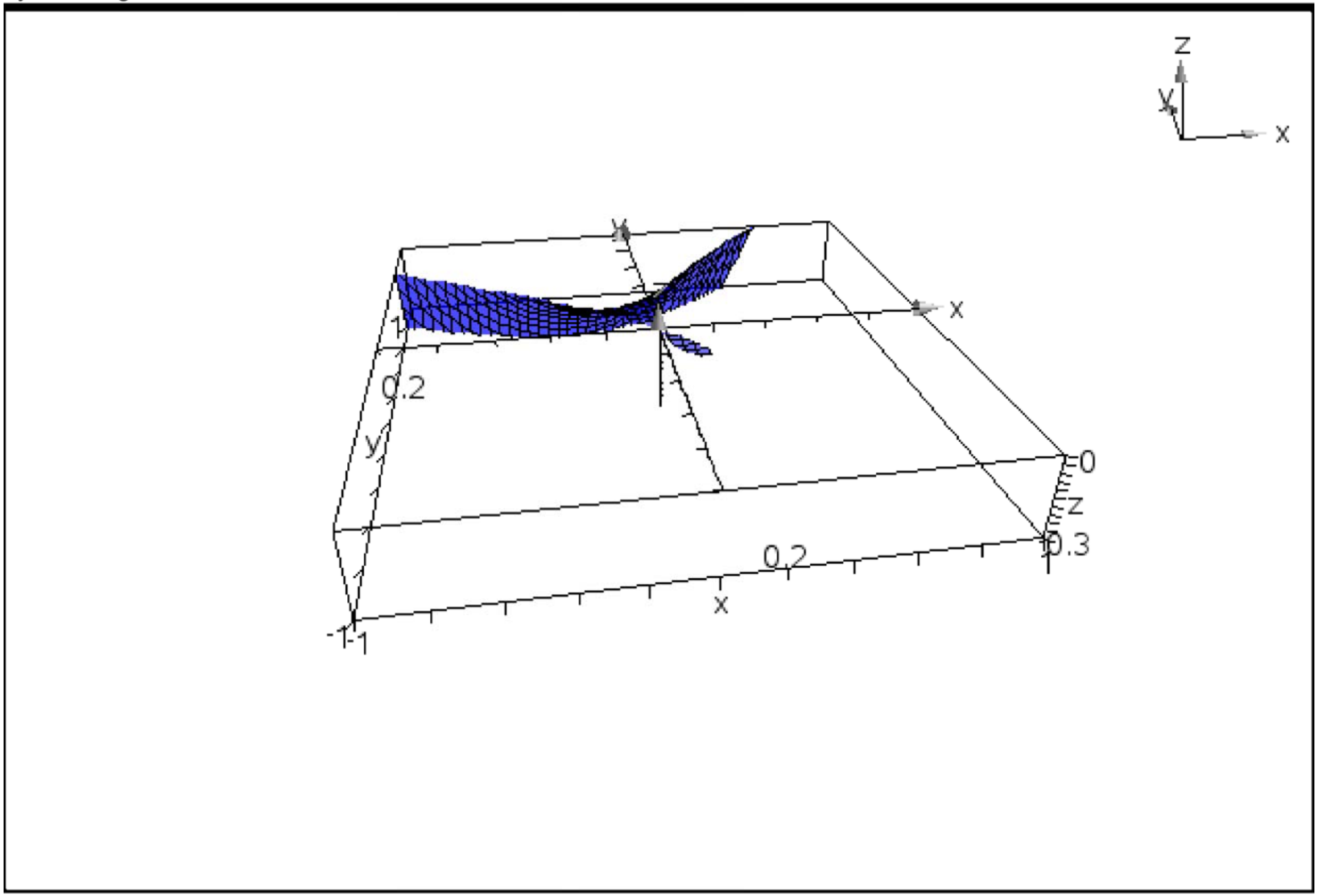
$\text{solve}(\{\mathbf{gl},\mathbf{abl}|yy=0\},x) \;\blacktriangleright\; x=0 \text{ and } y=0 \text{ or } x=\frac{1}{8} \text{ and } y=\frac{-1}{4}$

Es war also der Punkt $P=\left(\frac{1}{8},\frac{-1}{4}\right)$ *gesucht, dort ist eine waagerechte Tangente.*

Das passt zur Zeichnung, in GeoGebra ist es besser zu sehen.

2.1

syd-K7-Afg zu 7.1 Nr 2



2.2

syd-K7-Afg zu 7.1 Nr 5

Lemniskate von Niels Henrik Abel

$\mathbf{gl}:=\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\cdot\left(x^2-y^2\right)$

$\mathbf{gli}:=\mathbf{gl}|y=f(x)$ ▸ $\left((f(x))^2+x^2\right)^2=-\left((f(x))^2-x^2\right)\cdot a^2$

$\mathbf{abl}:=\frac{d}{dx}(\mathbf{gli})$ ▸ $4\cdot\left((f(x))^2+x^2\right)\cdot\left(f(x)\cdot\frac{d}{dx}(f(x))+x\right)=-2\cdot\left(f(x)\cdot\frac{d}{dx}(f(x))-x\right)\cdot a^2$ ⚠

$\mathbf{abli}:=4\cdot\left(y^2+x^2\right)\cdot\left(y\cdot yy+x\right)=-2\cdot\left(y\cdot yy-x\right)\cdot a^2$ wieder yy statt y'

$\text{solve}(\mathbf{abli},yy)$ ▸ $yy=\frac{-x\cdot\left(2\cdot x^2+2\cdot y^2-a^2\right)}{\left(2\cdot x^2+2\cdot y^2+a^2\right)\cdot y}$ *Hier muss $y\neq 0$ sein, damit der Ausdruck sinnvoll ist. Dies ist die Antwort auf (a).*

Schneller, wenn man nur das Ergebnis will ist:

$\text{impDif}(\mathbf{gl},x,y)$ ▸ $\frac{-x\cdot\left(2\cdot x^2+2\cdot y^2-a^2\right)}{\left(2\cdot x^2+2\cdot y^2+a^2\right)\cdot y}$

3.1

syd-K7-Afg zu 7.1 Nr 5

(b) $\mathbf{abli}|yy=0$ ▸ $4\cdot x\cdot (x^2+y^2)=2\cdot a^2\cdot x$ in P(x,y) ist waagerechte Tangente und P(x,y) liegt auf der Kurve, d.h. gl ist erfüllt.

$\text{solve}(\{\mathbf{abli}|yy=0,\mathbf{gl}\},x)$

▸ $x=\frac{a\cdot\sqrt{6}}{4}$ and $y=\frac{a\cdot\sqrt{2}}{4}$ or $x=\frac{a\cdot\sqrt{6}}{4}$ and $y=\frac{-a\cdot\sqrt{2}}{4}$ or .
$x=\frac{-a\cdot\sqrt{6}}{4}$ and $y=\frac{a\cdot\sqrt{2}}{4}$ or $x=\frac{-a\cdot\sqrt{6}}{4}$ and $y=\frac{-a\cdot\sqrt{2}}{4}$ or $x=0$ and $y=0$

Da sind die vier Punkte mit waagerechter Tangente. Der Punkt (0,0) erfüllt beide Gleichungen, aber für y=0 konnte man ja nach (a) die Ableitung nicht bestimmen.

Die nachfolgende 3D−Grafik entsteht so:

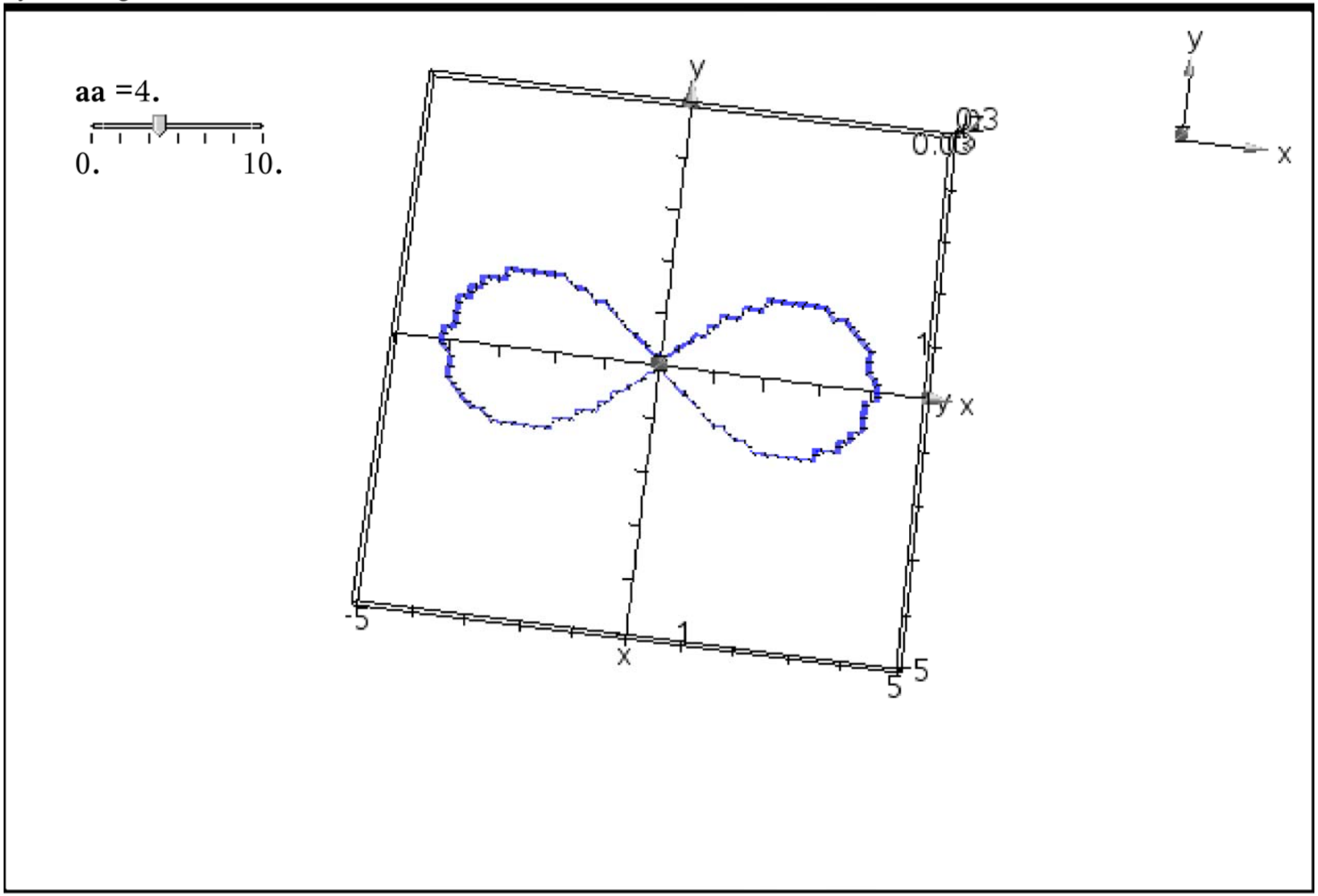
Graphfenster aufmachen, Schieberegler aa erzeugen. Mit Strg G unten eintragen: in der gegebenen Gleichung alles auf eine Seite bringen, also z(x,y)=

$(x^2+y^2)^2-\mathbf{aa}^2\cdot(x^2-y^2)$ Re−Maus Intervall/Zoom Wertebereichseinstellungen:

z nur von 0 bis 0.3. Feinere Rasterung bei Re−Maus Attribute, Auslösungen 50 eintragen.

3.2

syd-K7-Afg zu 7.1 Nr 5



3.3