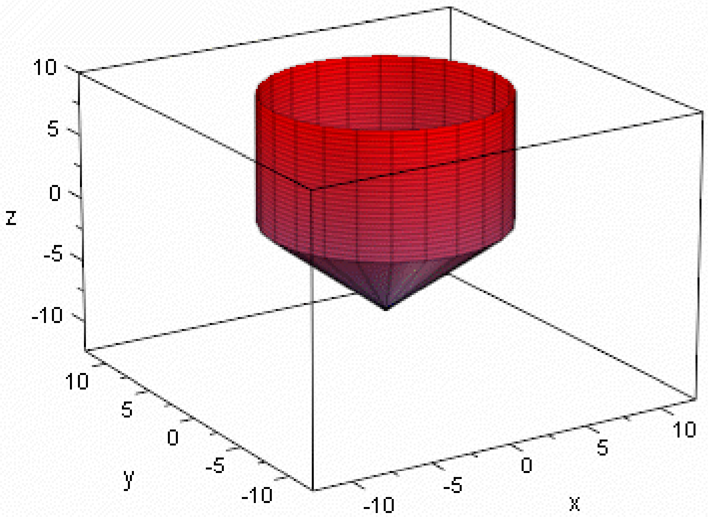
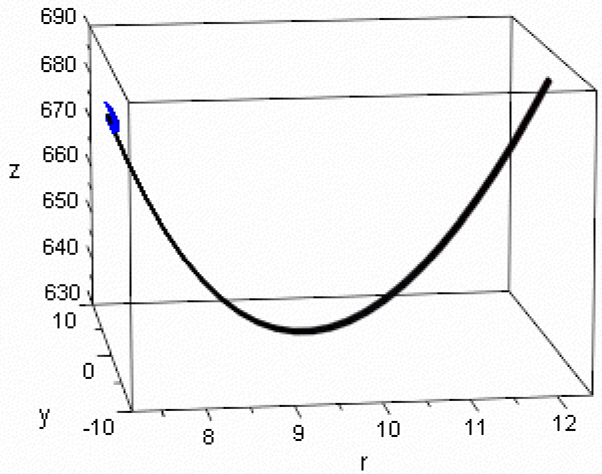
Optimierung als Ziel

2-Liter-Pokal

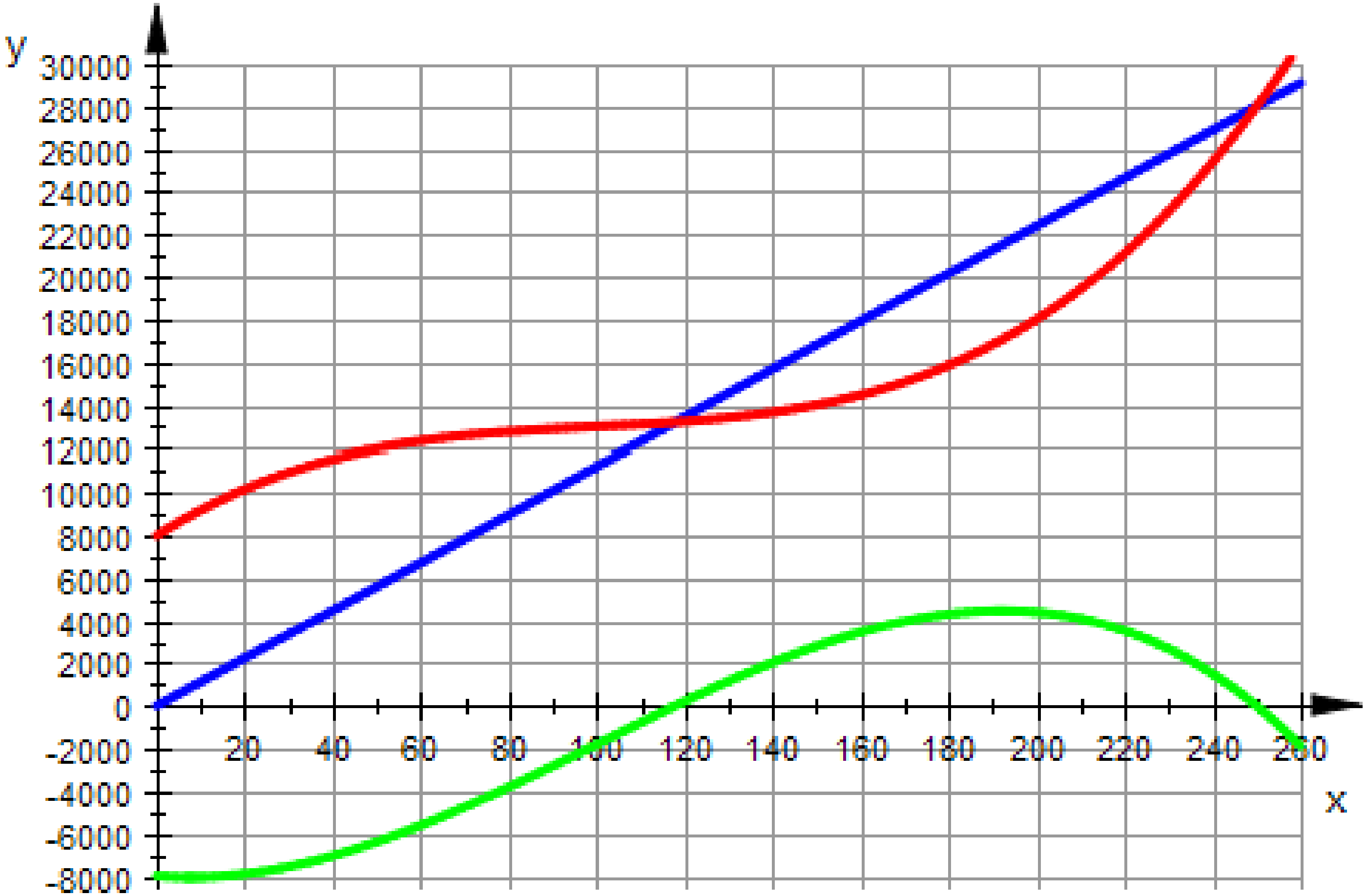


Silberverbrauch

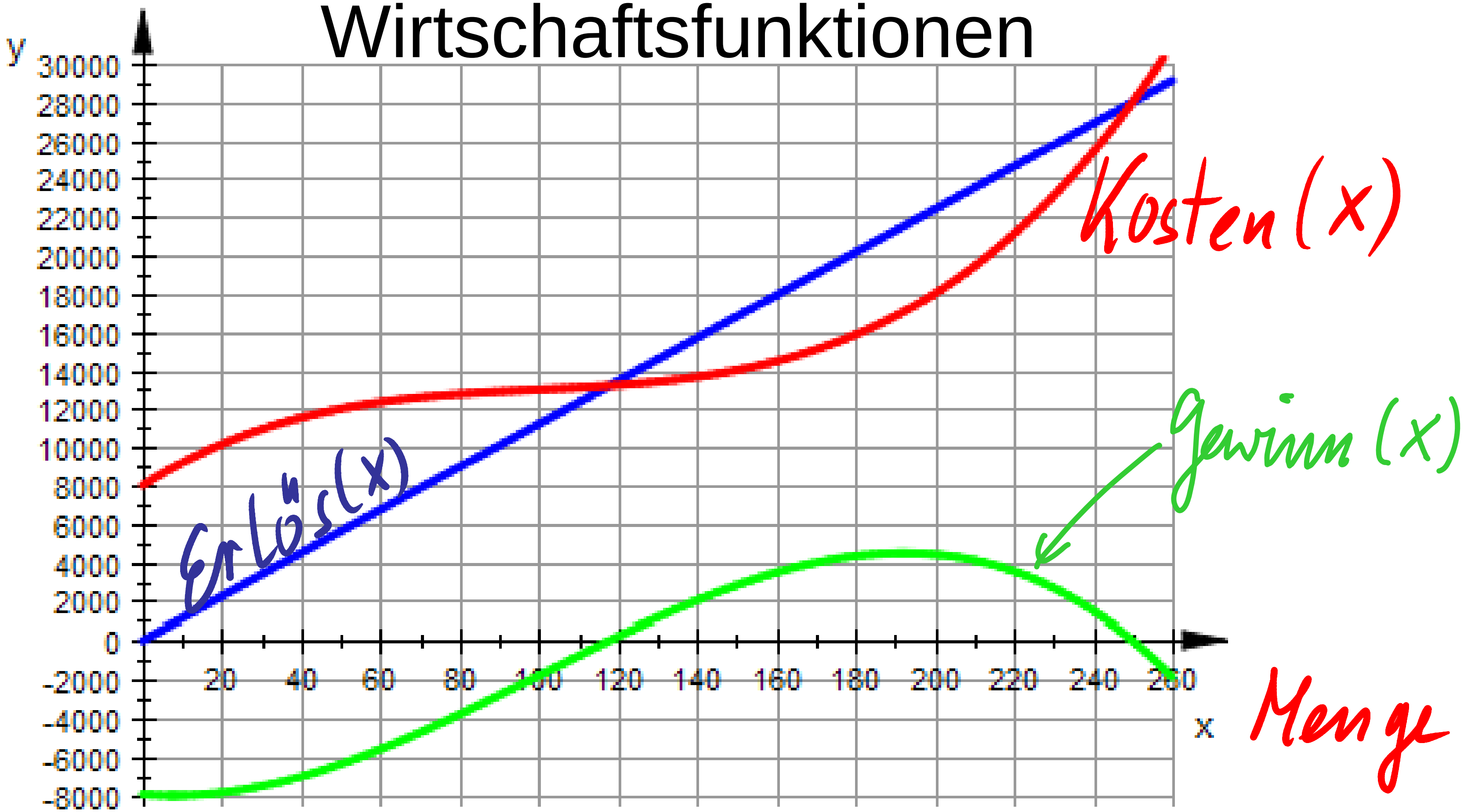


Optimierung als Ziel

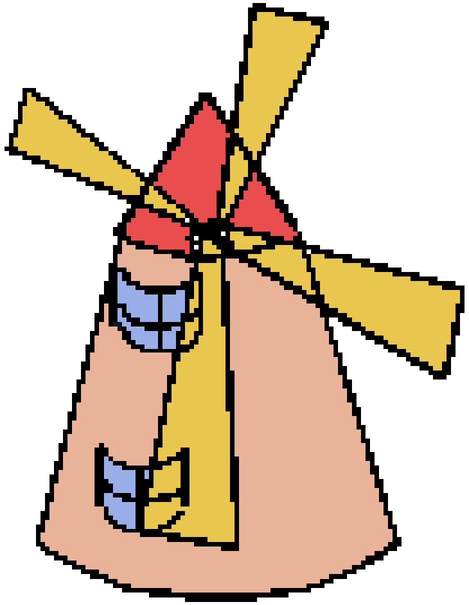
Wirtschaftsfunktionen

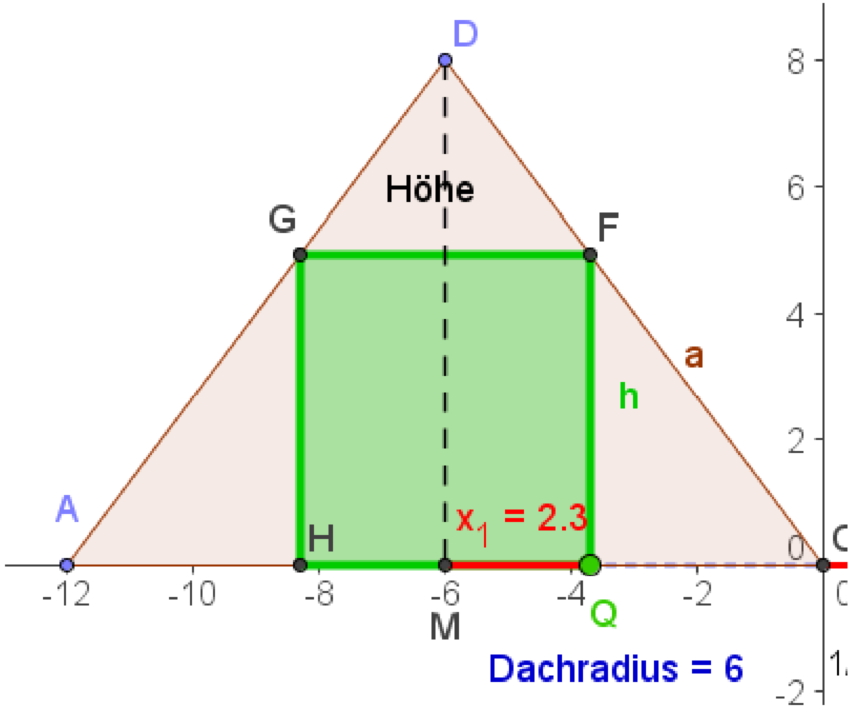


Optimierung als Ziel



Wasser in der Mühle

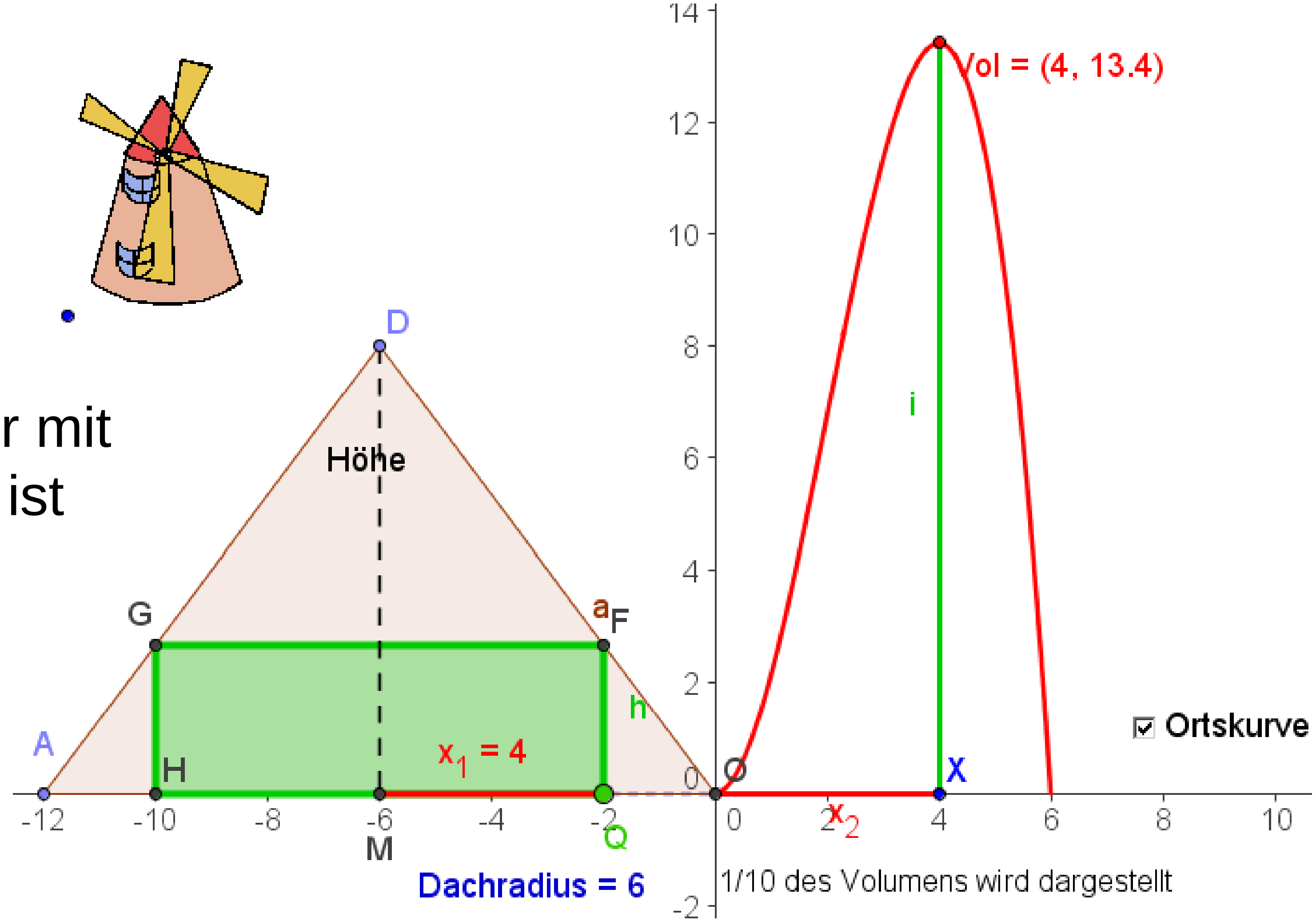




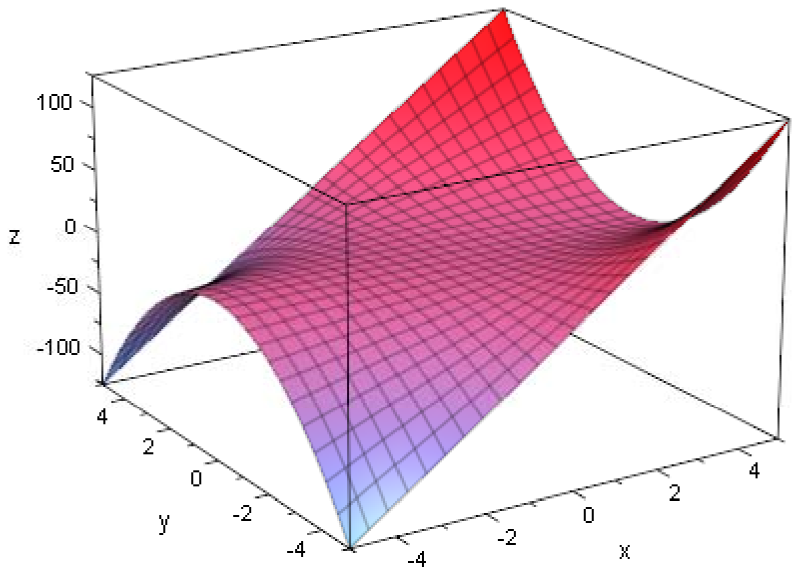
Im kegelförmigen Dach einer Mühle soll ein zylindrischer Wasserbehälter mit möglichst großem Volumen eingebaut werden.

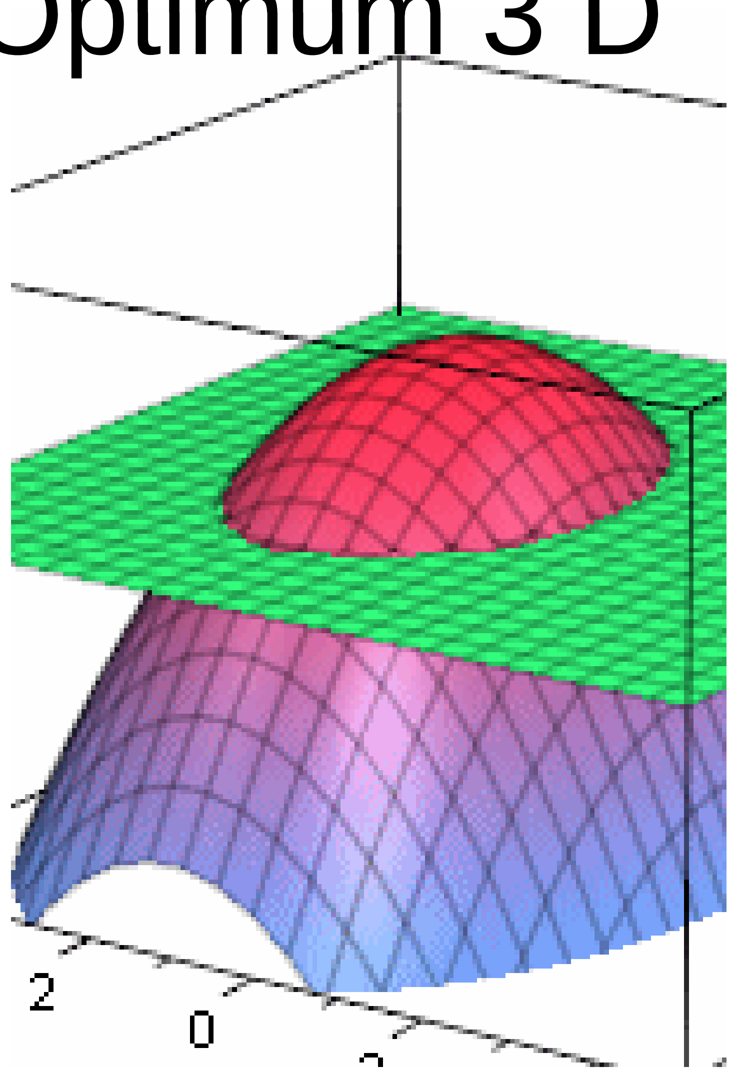
Wasser in der Mühle

Ein Zylinder mit
4 m Radius ist
optimal



Funktionen Optimum 3 D





Optimierung

durch die Suche nach Extrempunkten
auf den Graphen von Funktionen

....das ist das Einfachste

Das ist aber längst nicht Alles.

Lineare Optimierung

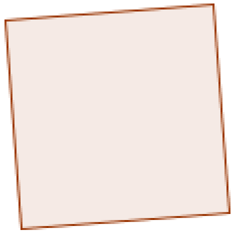
Kindergarten-Spielzeug

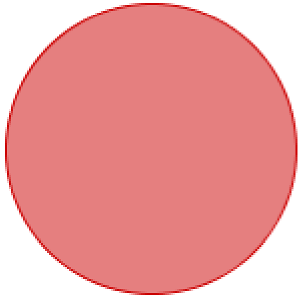
30 €

Kosten je Würfel

20 €

Kosten je Kugel





Höchstens 10

x<=10

Höchstens 6

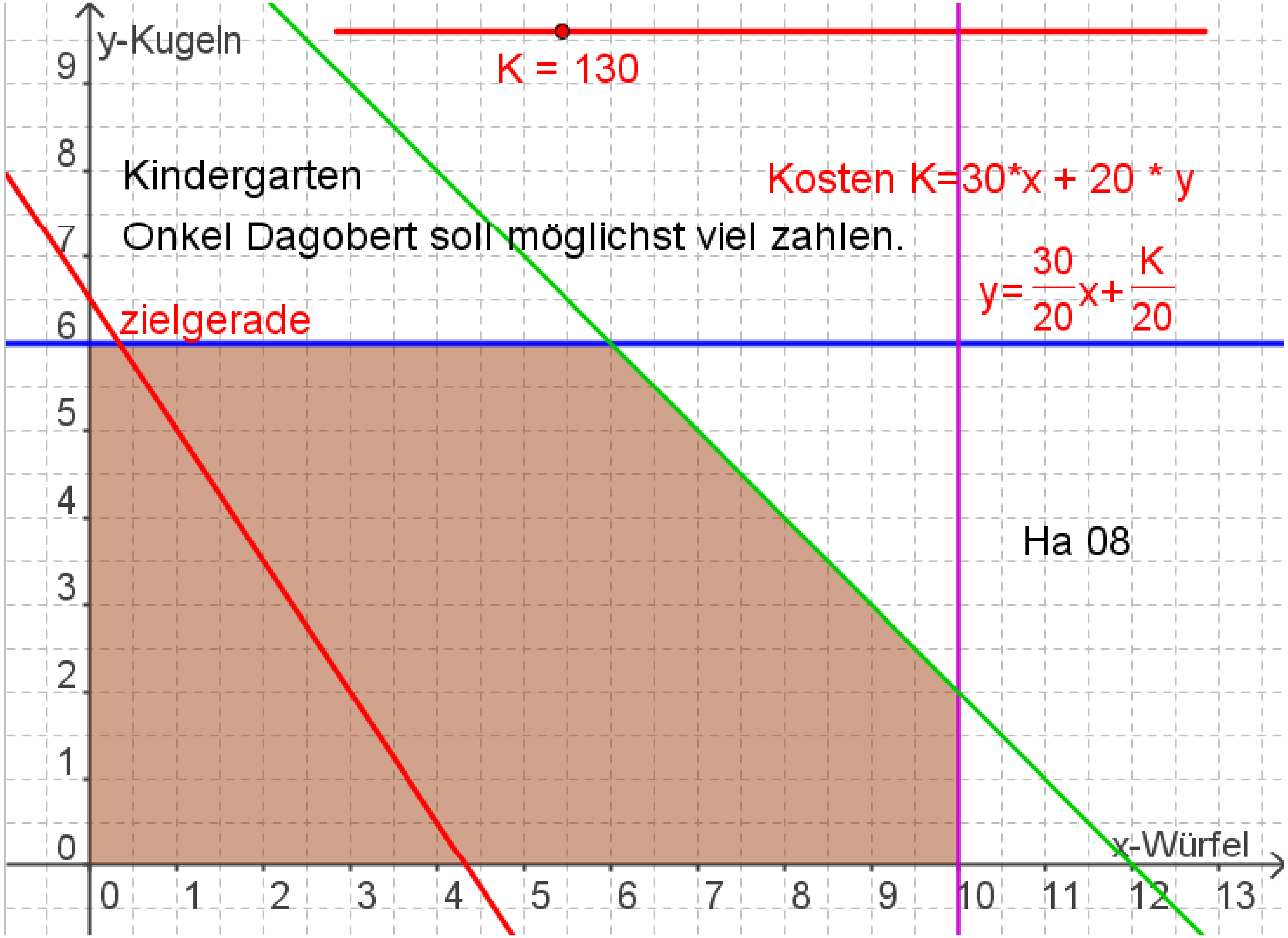
y<=6

x+y<=12

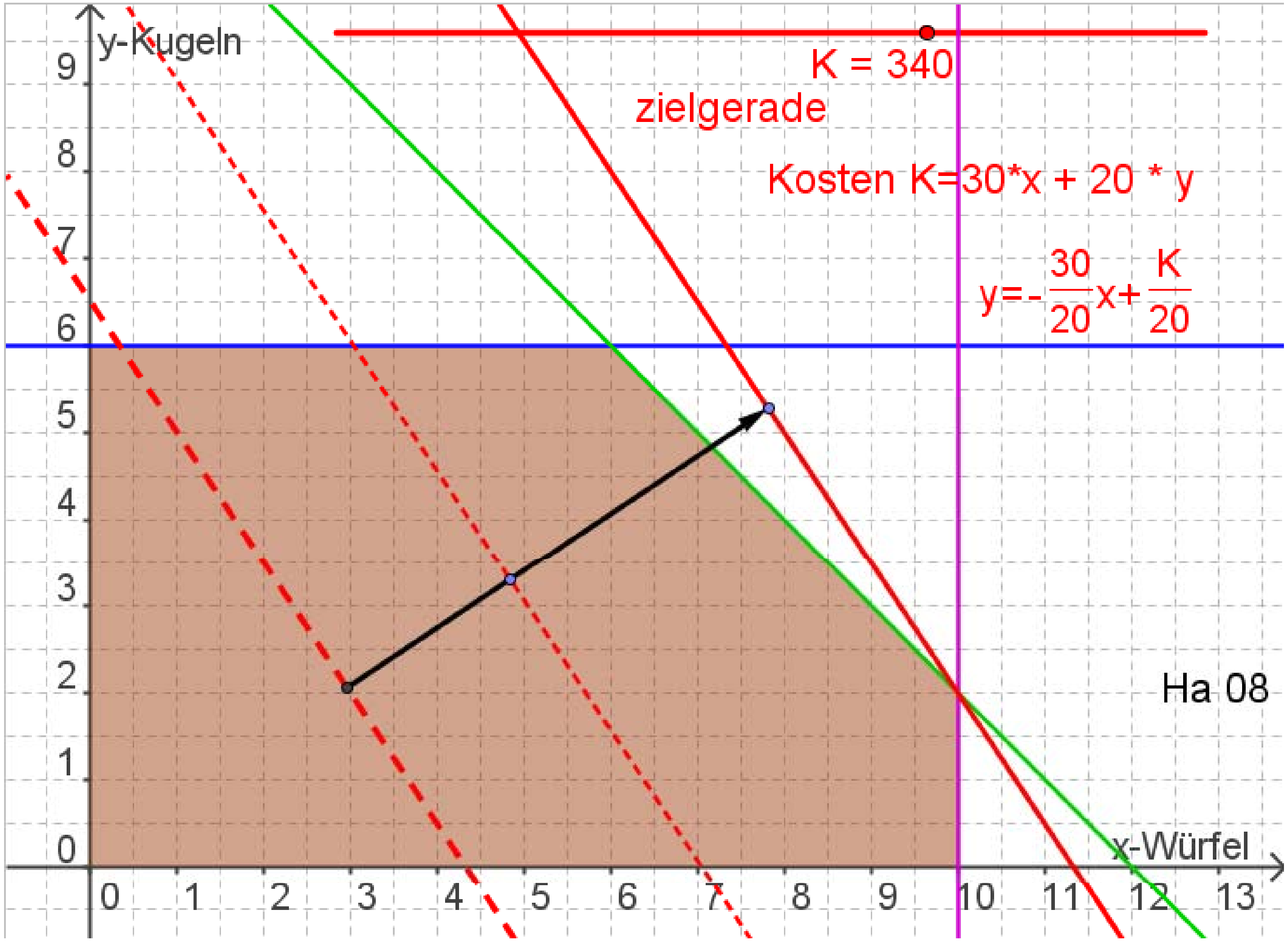
Höchstens 12 Geräte

Onkel Dagobert sponsert Spielgeräte zu den angegeben Bedingungen. Was sollte man bestellen, wenn die Kosten möglichst hoch sein sollen.

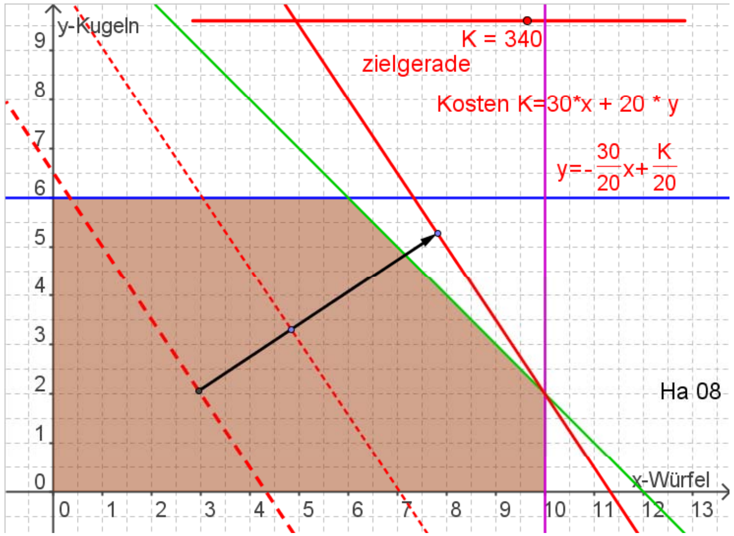
Lineare Optimierung



Lineare Optimierung



Lineare Optimierung



1. Zu jeder Bedingung gehört eine Randgerade
2. Das Planungsgebiet enthält alle zulässigen Wertepaare
3. Zu jedem Wert der zu optimierenden Größe K gibt es eine „Zielgerade" (rot)
4. Eine davon bestimmt man, indem man ein Wertepaar des Planungsgebietes einsetzt. Man zeichnet diese Gerade ein.
5. Diese Zielgerade bewegt man mit Parallelverschiebung **auf einen äußersten Punkt** des Planungsgebietes
6. Dieser Punkt ist der gesuchte optimale Punkt.
7. Sonderfall: Die Zielgerade liegt auf einer Randgeraden. Dann sind alle ihre Punkte Lösungen, die auch Rand des Planungsgebietes sind.

10.1.1 Ein Problem der Produktionsplanung

Zwei verschiedene Kunststoffprodukte I, II werden aus (in beliebiger Menge verfügbarem) Rohgranulat hergestellt. Drei Vorgänge bestimmen die Produktion: Warmpressen, Spritzguss und Verpackung. Produkt I entsteht durch Warmpressen des Granulates, Produkt II entsteht durch Spritzguss des Granulates. Beide Produkte werden anschließend für den Versand verpackt.

Die Fertigungsstelle „Pressen" steht pro Tag für höchstens 10 h zur Verfügung, pro t des Produktes I wird 1 h benötigt. Die entsprechenden Daten für die Fertigungsstelle „Spritzguss" lauten: 6 h/Tag und 1 h/t. In der Verpackungsabteilung stehen vier Arbeitskräfte mit jeweils täglich maximal 8 Arbeitsstunden zur Verfügung. Pro t von Produkt I werden 2 h, pro t von Produkt II werden 4 h in der Verpackungsabteilung benötigt. Durch den (gesicherten) Absatz aller produzierten Kunststoffprodukte erzielt die Unternehmung die Stückdeckungsbeiträge: 30 €/t für Produkt I, 20 €/t für Produkt II.

In welcher Mengenkombination soll die Unternehmung die beiden Produkte herstellen, damit sie den gesamten täglichen Deckungsbeitrag maximiert?

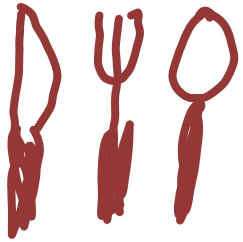
Tabelle 10.1.1 gibt eine Übersicht über die Modellbedingungen(Produktionskoeffizienten, Kapazitäten, Deckungsbeiträge (DB)).

Tab. 10.1.1

	Prod. I	Prod. II	max. Tageskapazität
Pressen	1 h/t	-	10 h
Spritzen	-	1 h/t	6 h
Packen	2 h/t	4 h/t	32 h
DB	30 €/t	20 €/t	

[1] Statt *Lineare Optimierung* ebenfalls gebräuchlich: *Lineare Planungsrechnung* oder *Lineare Programmierung*.

Optimierung als Ziel

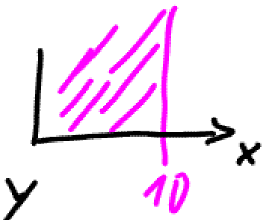
 

	x Teller	y Besteck	Zeit pro Tag
Pressen	1 h/t		10 h
Spritzen		1 h/t	6 h
Packen	2h/t	4 h/t	32h
Geld	30 €/t	20€/t	

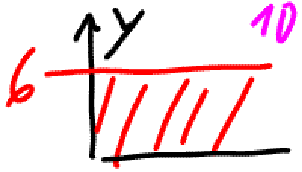
Lineare Optimierung

	x Teller	y Besteck	Zeit pro Tag
Pressen	1 h/t		10 h
Spritzen		1 h/t	6 h
Packen	2 h/t	4 h/t	32 h
Geld	30 €/t	20 €/t	

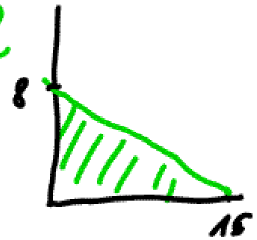
$x \le 10$



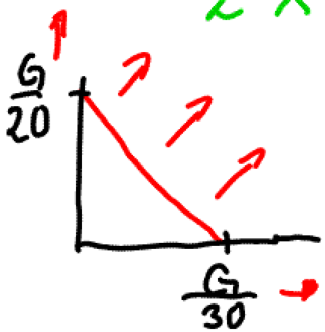
$y \le 6$



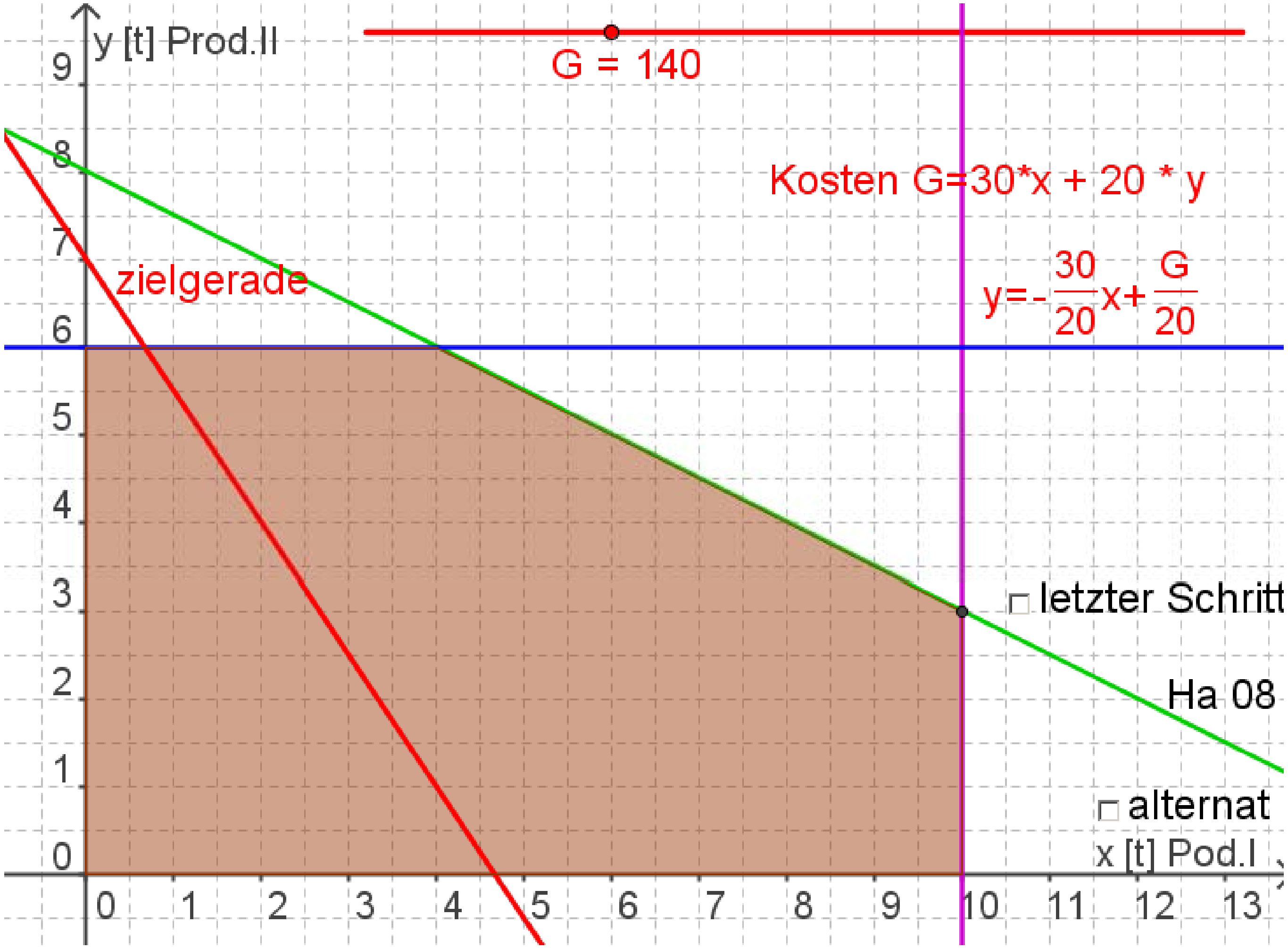
$2 \cdot x + 4y \le 32$



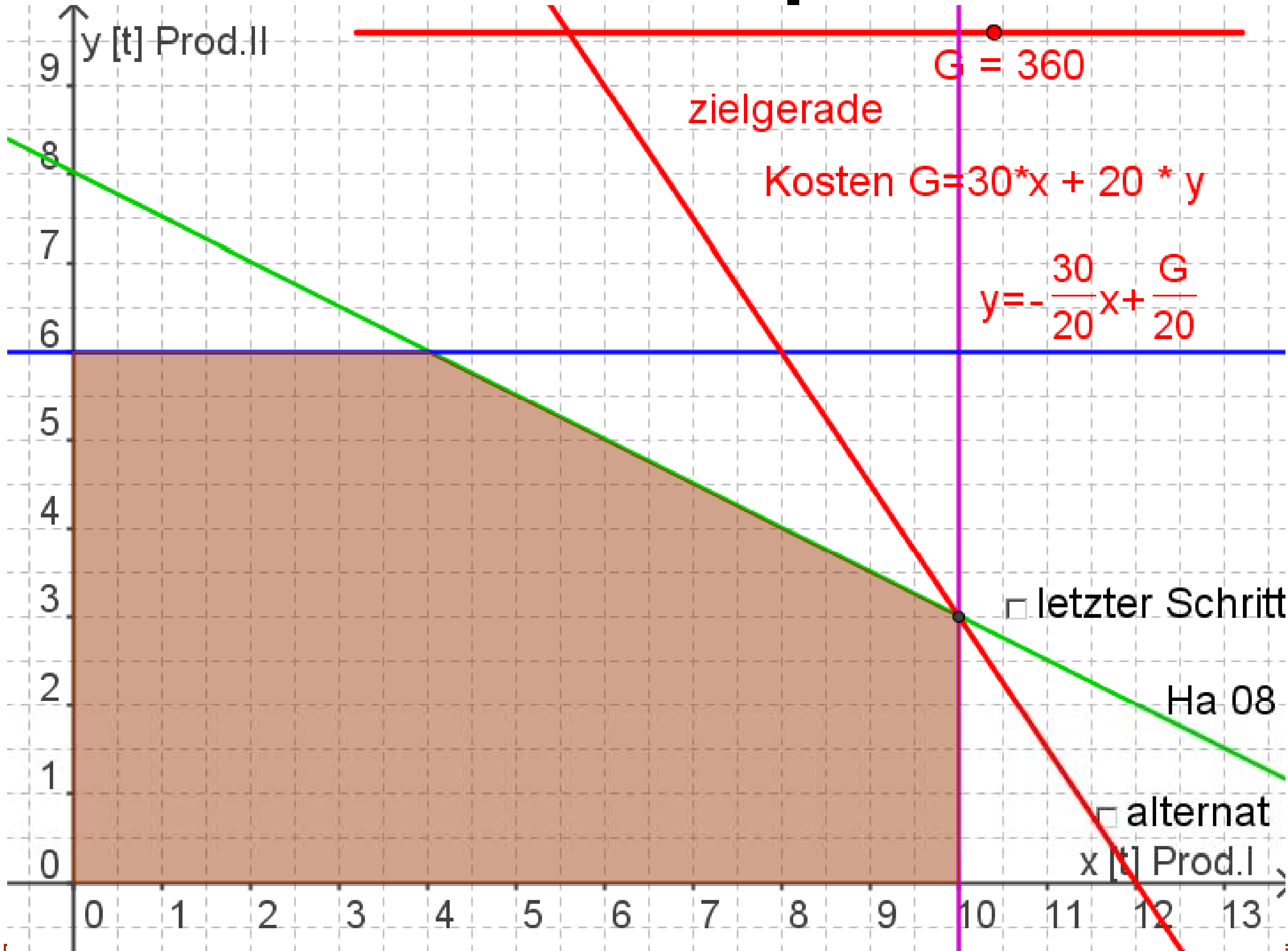
$30 \cdot x + 20 \cdot y = G$



Lineare Optimierung



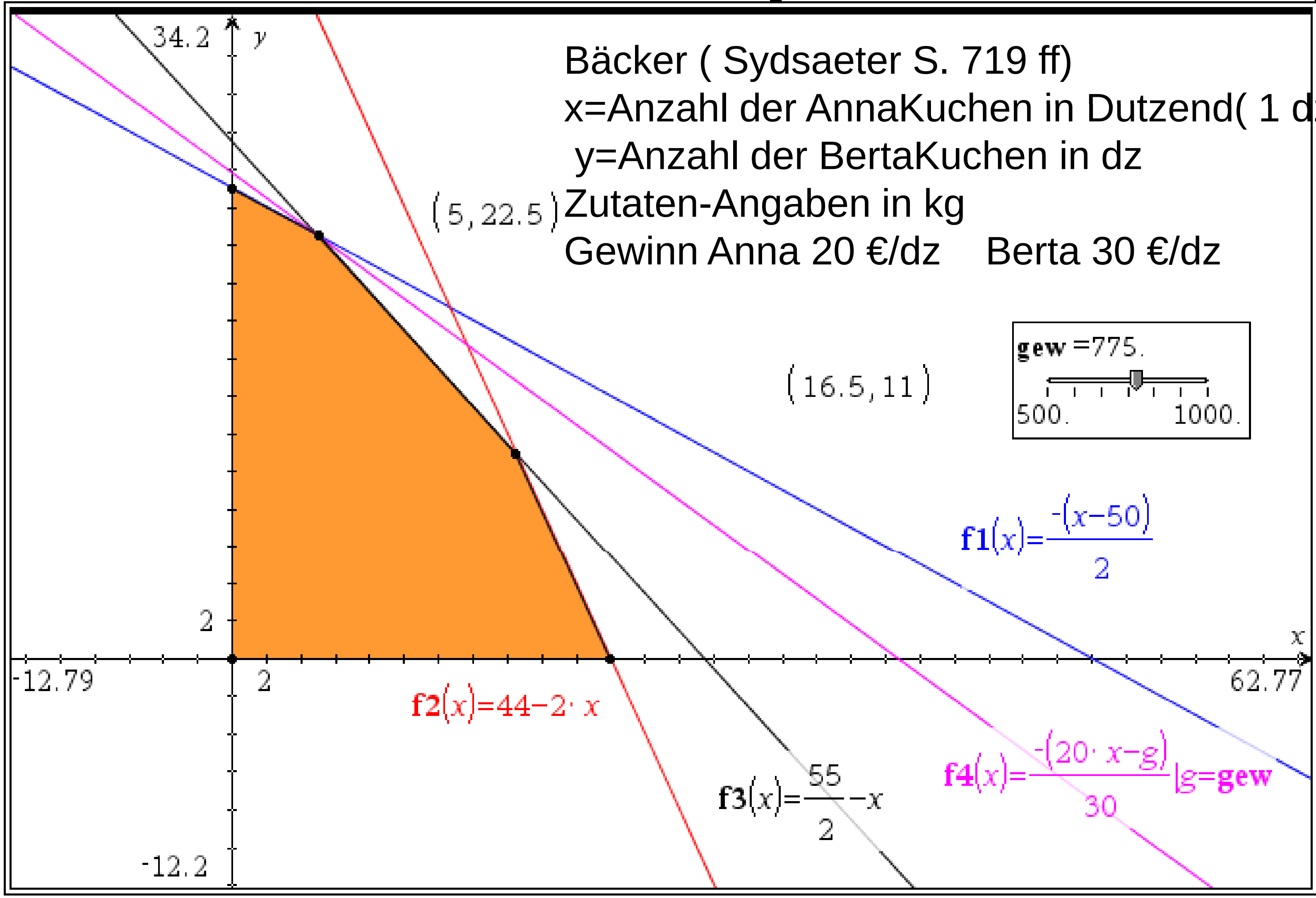
Lineare Optimierung



Geld
360 €
Optimal
10t I
Teller
3t II
Besteck

Lineare Optimierung

Bäcker (Sydsaeter S. 719 ff)
x=Anzahl der AnnaKuchen in Dutzend(1 dz=12 Stück)
y=Anzahl der BertaKuchen in dz
Zutaten-Angaben in kg
Gewinn Anna 20 €/dz   Berta 30 €/dz



18.1.3.1 Simplextableau

Bronstein

Mit dem *Simplexverfahren* wird eine Folge von Eckpunkten des zulässigen Bereiches mit wachsenden Zielfunktionswerten ermittelt. Der Übergang zu einer neuen Ecke wird vollzogen, indem eine zur gegebenen Ecke gehörende Normalform zu einer Normalform der neuen Ecke umgewandelt wird. Zur übersichtlichen Darstellung dieses Vorganges sowie zur Formalisierung der rechentechnischen Umsetzung wird eine als bekannt vorausgesetzte Normalform (18.8a,b) in das Simplextableau **(Schema 18.2a, 18.2b)** eingetragen:

Schema 18.2a

$$\begin{array}{c|ccc|c}
 & x_1 & \cdots & x_{n-m} & \\
\hline
x_{n-m+1} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,n-m} & b_1 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
x_n & a_{m,1} & \cdots & a_{m,n-m} & b_m \\
\hline
 & c_1 & \cdots & c_{n-m} & -c_0
\end{array}$$

oder kürzer

Schema 18.2b

$$\begin{array}{c|c|c}
 & \underline{\mathbf{x}}_N & \\
\hline
\underline{\mathbf{x}}_B & \mathbf{A}_N & \underline{\mathbf{b}} \\
\hline
 & \underline{\mathbf{c}} & -c_0
\end{array}$$

Die k–te Zeile des Tableaus ist zu lesen als

$$x_{n-m+k} + a_{k,1}x_1 + \cdots + a_{k,n-m}x_{n-m} = b_k. \tag{18.14a}$$

Für die Zielfunktion gilt

$$c_1x_1 + \cdots + c_{n-m}x_{n-m} = f(\underline{\mathbf{x}}) - c_0. \tag{18.14b}$$

Aus dem Simplextableau wird die Ecke $(\underline{\mathbf{x}}_N, \underline{\mathbf{x}}_B) = (\underline{\mathbf{0}}, \underline{\mathbf{b}})$ abgelesen. Gleichzeitig ist der Zielfunktionswert dieser Ecke durch $f(\underline{\mathbf{x}}) = c_0$ bestimmt.
Auf jedes Tableau trifft genau einer der drei Fälle zu:
a) $c_j \leq 0$, $j = 1, \ldots, n-m$: Das Tableau ist optimal. Der Punkt $(\underline{\mathbf{x}}_N, \underline{\mathbf{x}}_B) = (\underline{\mathbf{0}}, \underline{\mathbf{b}})$ ist der Maximalpunkt.
b) Für mindestens ein j gilt $c_j > 0$ und $a_{ij} \leq 0$, $i = 1, \ldots, m$: Das lineare Optimierungsproblem besitzt keine Lösung, da die Zielfunktion in Richtung wachsender x_j–Werte unbeschränkt wächst.

Num. f. Anfänger G. Opfer

Basisvektoren gibt, ist es naheliegend bei der Suche nach Lösungen, nur Basisvektoren zuzulassen. Von George Dantzig stammt ein Verfahren (ca. 1951), aus einem gegebenen Basisvektor $\mathbf{x}^{(0)}$ einen neuen Basisvektor $\mathbf{x}^{(1)}$ zu konstruieren, für den $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}^{(1)} \le \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}^{(0)}$ gilt und bei dem sich die beiden Basisindexmengen nur um ein Element unterscheiden.

Das Auffinden eines Basisvektors am Anfang der Rechnung kann durch Lösen eines *Hilfsproblems* erfolgen. Das besprechen wir im nächsten Abschnitt.

Mit $\mathbf{a}^j$, $j = 1, 2, \ldots, n$ bezeichnen wir nach wie vor die Spalten von $\mathbf{A}$. Sei Sei $\mathbf{x}^{(0)}$ ein Basisvektor mit Basisindexmenge I und $\overline{\mathbf{x}}$ irgendein zulässiger Vektor. Wie können wir die Zielfunktionswerte $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\overline{\mathbf{x}}$ und $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}^{(0)}$ vergleichen? Jeder der Spaltenvektoren $\mathbf{a}^j$ von $\mathbf{A}$ läßt sich eindeutig als Linearkombination

$$\mathbf{a}^j = \sum_{i\in I} d_{ij}\mathbf{a}^i, \quad j = 1, 2, \ldots, n \tag{7.3}$$

der Spaltenvektoren aus der Basis darstellen. Für $j \in I$ ist daher insbesondere[2]

$$d_{ij} = \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{für } i = j, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{7.4}$$

Da sowohl $\mathbf{x}^{(0)}$ als auch $\overline{\mathbf{x}}$ zulässig sind, gilt:

$$\sum_{i\in I} x_i^{(0)}\mathbf{a}^i = \mathbf{b} = \sum_{j=1}^n \overline{x}_j\, \mathbf{a}^j = \sum_{j=1}^n \overline{x}_j\, (\sum_{i\in I} d_{ij}\mathbf{a}^i) = \sum_{i\in I}(\sum_{j=1}^n d_{ij}\overline{x}_j\,)\mathbf{a}^i.$$

Da die $\mathbf{a}^i, i \in I$ linear unabhängig sind, ist die Darstellung von $\mathbf{b}$ eindeutig, also:

$$\begin{aligned}
\text{für alle } i \in I: \quad x_i^{(0)} &= \sum_{j=1}^n d_{ij}\overline{x}_j = \sum_{j\in I} d_{ij}\overline{x}_j + \sum_{j\notin I} d_{ij}\overline{x}_j\,. \\
\text{Also gilt für } i \in I: \quad x_i^{(0)} &= \overline{x}_i + \sum_{j\notin I} d_{ij}\overline{x}_j\,, \\
\text{oder} \quad \overline{x}_i &= x_i^{(0)} - \sum_{j\notin I} d_{ij}\overline{x}_j\,.
\end{aligned}$$

[2] Die hier in (7.4) eingeführte Größe δ_{ij} heißt auch *Kronecker-Symbol*.

Für den Zielfunktionswert $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\overline{\mathbf{x}}$ gilt dann:

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\overline{\mathbf{x}} = \sum_{j=1}^n c_j\overline{x}_j &= \sum_{i\in I} c_i\overline{x}_i + \sum_{j\notin I} c_j\overline{x}_j \\
&= \sum_{i\in I} c_i(x_i^{(0)} - \sum_{j\notin I} d_{ij}\overline{x}_j) + \sum_{j\notin I} c_j\overline{x}_j \\
&= \sum_{i\in I} c_i x_i^{(0)} + \sum_{j\notin I} \overline{x}_j\,(c_j - \sum_{i\in I} d_{ij}c_i) \\
&= \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}^{(0)} + \sum_{j\notin I} \overline{x}_j\,(c_j - \sum_{i\in I} d_{ij}c_i).
\end{aligned} \tag{7.5}$$

Wir setzen

$$\sigma_j := \sum_{i\in I} d_{ij}c_i \quad \text{und} \quad t_j := c_j - \sigma_j \quad \text{für alle} \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{7.6}$$

Satz 7.6. a) Genau dann ist $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\overline{\mathbf{x}} < \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}^{(0)}$, wenn $\sum_{j\notin I} t_j\overline{x}_j < 0$. b) Ist $t_j \ge 0$ für alle $j \notin I$, so ist $\mathbf{x}^{(0)}$ Lösung von (7.2).

Beweis: a) folgt direkt aus (7.5) in der Form $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}^{(0)} + \sum_{j\notin I} t_j\overline{x}_j$. b) Unter den getroffenen Voraussetzungen ist $\sum_{j\notin I} t_j\overline{x}_j \ge 0$, also $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\overline{\mathbf{x}} \ge \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}^{(0)}$ für jedes zulässige $\overline{\mathbf{x}}$. Also ist $\mathbf{x}^{(0)}$ Lösung. $\square$

Ist also $\mathbf{x}^{(0)}$ keine Lösung, so existiert ein $r \notin I$ mit $t_r < 0$.

Satz 7.7. Existiere ein Index $r \notin I$ mit $t_r < 0$. a) Für jedes $\delta \in \mathbb{R}$ löst $\mathbf{x}(\delta) \in \mathbb{R}^n$ mit

$$x_j(\delta) = \begin{cases} x_j^{(0)} - \delta d_{jr} & \text{für } j \in I, \\ \delta & \text{für } j = r, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \tag{7.7}$$

das Gleichungssystem $\mathbf{A}\mathbf{x}(\delta) = \mathbf{b}$ und $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}(\delta) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}^{(0)} + \delta t_r$. b) Ist $d_{ir} \le 0$ für alle $i \in I$, so hat die Aufgabe (7.2) keine Lösung.

Beweis: a) Die j-te Spalte von $\mathbf{A}$ bezeichnen wir wieder mit $\mathbf{a}^j$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\mathbf{x}(\delta) &= \sum_{j=1}^n x_j(\delta)\mathbf{a}^j = \sum_{j\in I} x_j(\delta)\mathbf{a}^j + \delta\mathbf{a}^r = \sum_{j\in I}(x_j^{(0)} - \delta d_{jr})\mathbf{a}^j + \delta\mathbf{a}^r \\
&= \mathbf{A}\mathbf{x}^{(0)} + \delta(\mathbf{a}^r - \sum_{j\in I} d_{jr}\mathbf{a}^j) = \mathbf{A}\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{b}.
\end{aligned}$$

Lineare Optimierung

Bronstein

$$\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_N = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 5 & 5 & -3 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} x_1 & x_3 & x_4 \end{matrix} \end{array}, \qquad \mathbf{A}_B^{-1}\underline{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}. \tag{18.11b}$$

Es ergibt sich das System

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 & = & 1 \\ -x_1 - x_3 + x_4 + x_5 & = & 1 \\ -x_1 + 2x_3 + x_6 & = & 2 \\ 5x_1 + 5x_3 - 3x_4 + x_7 & = & 5 \end{array}\right\}. \tag{18.12}$$

Aus $f(\underline{\mathbf{x}}) = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$ erhält man durch Subtraktion der mit 3 multiplizierten ersten Nebenbedingung eine auf Nichtbasisvariablen umgerechnete Zielfunktion

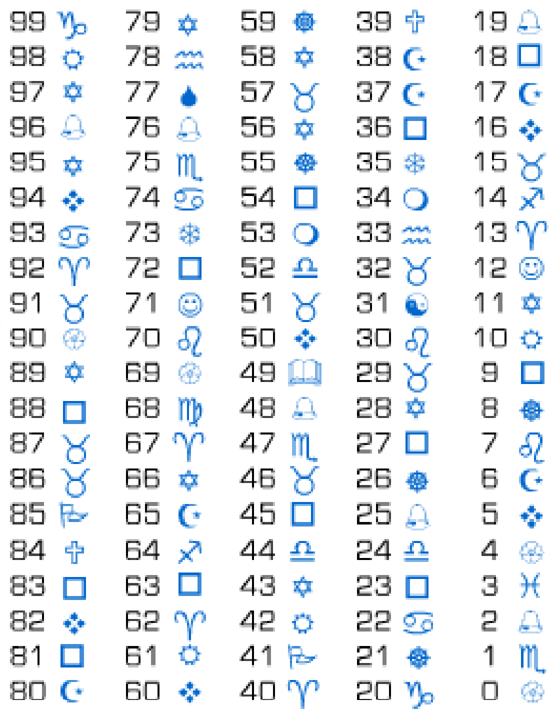
$$f(\underline{\mathbf{x}}) = -x_1 + x_3 + 3x_4 + 3. \tag{18.13}$$

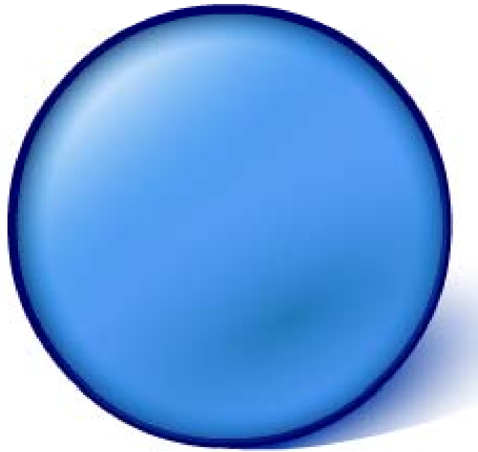
Ende eines Beispiels

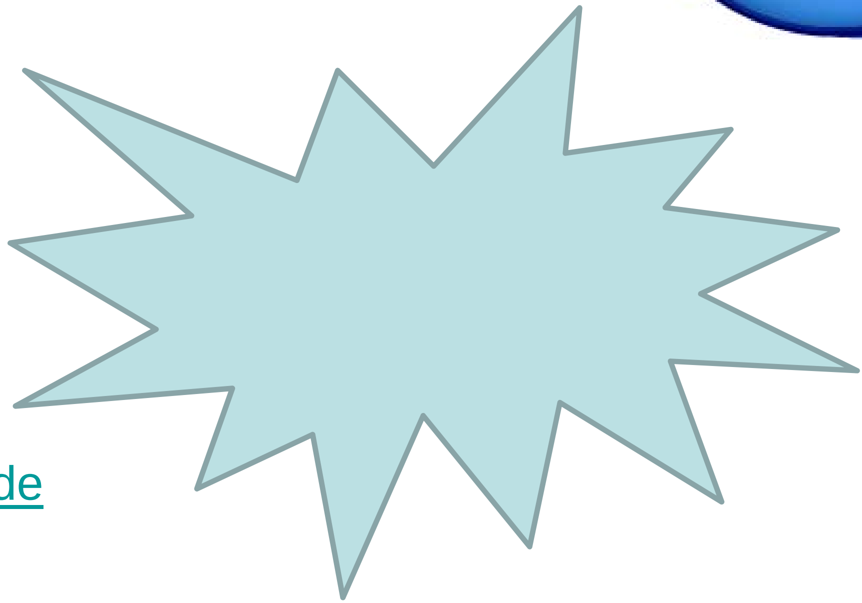
..... aha, das kommt also für manche von Ihnen Mathe WiWi 2,
Allerdings: Verstehen ist wichtig, rechnen tut der Computer.

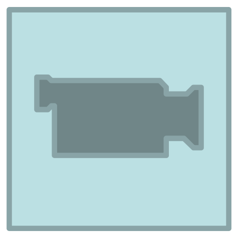
Welch ein Glück!

Magische Zahlenkugel









Dies finden Sie in
www.mathematik-verstehen.de
Bereich Arithmetik