Toplogie Einführung, Grundbegriffe

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Uni Lüneburg, Februar 2004

Was ist ein **topologischer Raum** (X,O) ?

Eine Menge X und eine Menge O von “offenen” Teilmengen von X

Axiome: T1 Beliebige Vereinigung offener Mengen ist offen.
T2 Der Durchschnitt zweier offener Mengen ist offen.
T3 X und $\varnothing$ sind offen.

Woher bekommt man einen topologischen Raum?

> Mit dem üblichen”euklidischen” Abstand sind der $\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$, topologische Räume.

Die Elemente von X heißen oft “Punkte”.

Aus jedem **metrischen Raum** (X,d) kann man einen topologischen Raum (X,O(d)) machen: Mit d d definiert man eine ε-Kugel um $x \in X$. **Offene Mengen** sind die, die zu jedem ihrer Punkte eine ε-Kugel um ihn herum enthalten.
Im R^2 sind die Kugeln Kreisscheiben, im R^1 Intervalle.

Eine **Metrik** d kann man sich als “**Abstand**” vorstellen:
Axiome:
M1 $d(x,y) \geq 0, \forall x,y \in X$
$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
M2 $d(x,y) = d(y,x)$
M3 $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

$$K_\varepsilon(x) = \{ y \mid d(x,y) \leq \varepsilon,\ y \in X \}$$

Was sind **abgeschlossene** Mengen?
Umgebung von x?

Das sind die Komplemente der offenen Mengen.
muss eine $K_\varepsilon(x)$ enthalten

Damit sind X und $\varnothing$ sind sowohl abgeschlossen als auch offen.

Innerer Punkt von A?
Äußerer Punkt?
Randpunkt von A?

wenn A Umgebung ist,
wenn X \ A Umgebung,
wenn beides nicht ist.

Die “**abgeschlossenen Hülle**” von A sind alle Punkte, die keine äußeren Punkte sind.

Was ist eine **topologische Abbildung**, ein Homöomorphismus?

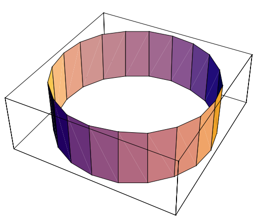
eine **eineindeutige stetige** Abbildung, Nachbarschaft bleibt erhalten

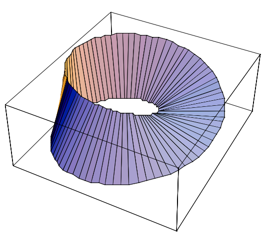
Zu jeder ε-Kugel um den Ur- Bildpunkt gibt es eine δ-Kugel um den B Urbildpunkt, so dass deren Bild ganz in der ε-Kugel liegt. In beiden Richtungen stetig!!!!!!

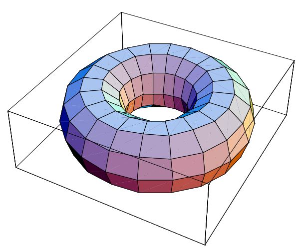
Wann sind zwei “Figuren” **topologisch gleich,** homöomorph?

wenn es eine topologische Abbildung von der einen auf die andere gibt.

Das ist der Fall, wenn sie weder zerrissen wurden, noch verklebt wurden. Sie dürfen aber zerschnitten und so wieder zusammgefügt weden, dass getennte Nachbarpunkte wieder Nachbarn werden.







> Zylinderring,
> Möbiusband,
> Torus