Varianz einer diskreten Zufallsvariabeln X

$$Var(X) := E\left((X-\mu)^2\right) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k)\cdot(k-\mu)^2$$ mit

$$\mu := E(X) := \sum_{k=0}^{n} P(X=k)\cdot k$$

Verschiebungssatz zur Varianzberechnung

$$Var(X) = \left(\sum_{k=0}^{n} P(X=k)\cdot k^2\right) - \mu^2 = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$$

Beweis

$$Var(X) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k)\cdot(k-\mu)^2 =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} P(X=k)\cdot(k^2 - 2k\mu + \mu^2)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} P(X=k)\cdot k^2 - 2\mu\cdot\sum_{k=0}^{n} P(X=k)\cdot k + \mu^2\sum_{k=0}^{n} P(X=k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} P(X=k)\cdot k^2 - 2\mu\cdot\mu + \mu^2\cdot 1$$

$$= \sum_{k=0}^{n} P(X=k)\cdot k^2 - \mu^2 \qquad q.e.d.$$

Der Verschiebungssatz gilt für alle disketen Verteilungen.

Henn-Büchter http://www.elementare-stochastik.de

D. Beweis zu Satz 25 (S. 261), geometrische Verteilung

Mit Hilfe des Verschiebungssatzes $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ ((~~Satz 20 a auf S. 245~~) und des Ergebnisses von a. muss nur noch $E(X^2)$ bestimmt werden. Es gilt hier

$$E(X^2) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2\cdot p\cdot(1-p)^{n-1} = p\cdot\sum_{n=1}^{\infty} n^2\cdot(1-p)^{n-1}$$

$$= p\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\cdot(1-p)^n}{1-p} = \frac{p}{1-p}\cdot\sum_{n=1}^{\infty} n^2\cdot(1-p)^n$$

Nach Teil A. „Beweis zweier Reihenformeln“ auf dieser Homepage gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2\cdot a^n = \frac{a\cdot(1+a)}{(1-a)^3} \text{ für } 0<a<1.$$

Für $a = 1-p$ und $0<p<1$ ist die Voraussetzung für die Anwendung der Formel erfüllt. Also folgt

$$E(X^2) = \frac{p}{1-p}\cdot\frac{(1-p)\cdot(1+(1-p))}{(1-(1-p))^3} = \frac{2-p}{p^2}$$

und damit folgt schließlich wie behauptet

$$V(X) = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}.$$