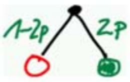
Zufallsampel

Zufallsampel Haftendorn 2012

nach Waldmann/Stocker: Stochastische Modelle, Beispiel 2.19

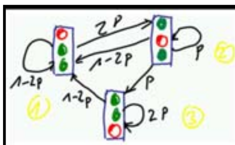
Zufallsampel
1. Wähle eine Lampe zufällig.
2. Ziehe sie heraus und stelle sie oben hin.



Welche Anordnungen gibt es? Welche Anordnungsverteilung ergibt sich auf lange Sicht?
Lösen Sie dieses als Markov-Prozess.
Unter suchen Sie für variables p.
Welche Anordnung(welcher Zustand) ist für welche p am erfolgreichsten?

Verwenden Sie geometrische Reihen und auch Analysis.
Stellen Sie die Zusammenhänge graphisch dar.

1.1



$\mathbf{aa}:=\begin{bmatrix}1-2\cdot p & 2\cdot p & 0\\ 1-2\cdot p & p & p\\ 1-2\cdot p & 0 & 2\cdot p\end{bmatrix}$

$[1\ 0\ 0]\cdot\mathbf{aa} \blacktriangleright [1-2\cdot p\quad 2\cdot p\quad 0]$

$[1\ 0\ 0]\cdot\mathbf{aa}^2 \blacktriangleright [-(2\cdot p-1)\quad -2\cdot p\cdot(p-1)\quad 2\cdot p^2]$

$[1\ 0\ 0]\cdot\mathbf{aa}^3 \blacktriangleright [-(2\cdot p-1)\quad -2\cdot p\cdot(p^2+p-1)\quad 2\cdot p^2\cdot(p+1)]$

$[1\ 0\ 0]\cdot\mathbf{aa}^4 \blacktriangleright [-(2\cdot p-1)\quad -2\cdot p\cdot(p^3+p^2+p-1)\quad 2\cdot p^2\cdot(p^2+p+1)]$

$[1\ 0\ 0]\cdot\mathbf{aa}^5 \blacktriangleright [-(2\cdot p-1)\quad -2\cdot p\cdot(p^4+p^3+p^2+p-1)\quad 2\cdot p^2\cdot(p^3+p^2+p+1)]$

$[1\ 0\ 0]\cdot\mathbf{aa}^6 \blacktriangleright [-(2\cdot p-1)\quad -2\cdot p\cdot(p^5+p^4+p^3+p^2+p-1)\quad 2\cdot p^2\cdot(p^4+p^3+p^2+p+1)]$

$[1\ 0\ 0]\cdot\mathbf{aa}^7 \blacktriangleright [-(2\cdot p-1)\quad -2\cdot p\cdot(p^6+p^5+p^4+p^3+p^2+p-1)\quad 2\cdot p^2\cdot(p^5+p^4+p^3+p^2+p+1)]$

1.2

$\mathbf{pterm}(p):=2\cdot p^2\cdot\sum_{i=0}^{n-2}(p^i) \blacktriangleright \mathit{Fertig}$ $\quad \mathbf{pterm}(p) \blacktriangleright \frac{2\cdot p^{n+1}}{p-1}-\frac{2\cdot p^2}{p-1}$ geometrische Reihe

$\mathbf{nte}(p):=[1-2\cdot p\quad 2\cdot p-\mathbf{pterm}(p)\quad \mathbf{pterm}(p)] \blacktriangleright \mathit{Fertig}$ Verteilung nach n Takten

$\mathbf{nte}(0.2) \blacktriangleright [0.6\quad 0.5\cdot(0.2)^n+0.3\quad 0.1-0.5\cdot(0.2)^n]$ Ende für p=0.2 [0.6,0.5,0.1]

$\mathbf{ende}(p):=\left[1-2\cdot p\quad 2\cdot p-\frac{2\cdot p^2}{1-p}\quad \frac{2\cdot p^2}{1-p}\right] \blacktriangleright \mathit{Fertig}$ allgemein

$\mathbf{ende}(0.1) \blacktriangleright [0.8\quad 0.177778\quad 0.022222]$ Hierzu sind auf Seite 1.7 Wertelisten

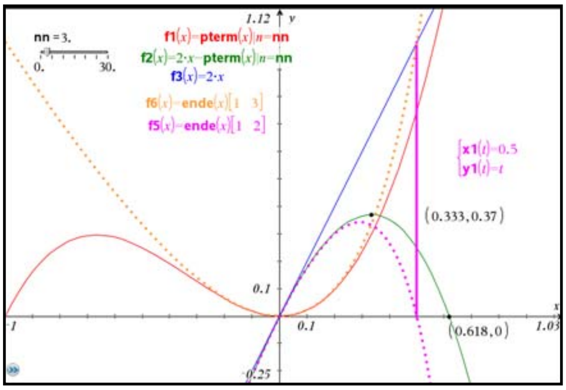
$\mathbf{ende}(0.2) \blacktriangleright [0.6\quad 0.3\quad 0.1]$

$\mathbf{ende}(0.3) \blacktriangleright [0.4\quad 0.342857\quad 0.257143]$

$\mathbf{ende}(0.4) \blacktriangleright [0.2\quad 0.266667\quad 0.533333]$ $\quad \frac{1}{5}+\frac{2}{30} \blacktriangleright \frac{4}{15} \quad \frac{1}{2}+\frac{1}{30} \blacktriangleright \frac{8}{15}$

$\mathbf{ende}(0.5) \blacktriangleright [0.\quad 0.\quad 1.]$ Also ist für p=0.5 Zustand 3 absorbierend.

1.3



1.4

Analytische Betrachtung:

$\mathbf{f1}(x) \blacktriangleright 2\cdot x^2\cdot(x+1.)$

$\mathbf{f2}(x) \blacktriangleright -2\cdot x\cdot(x^2+x-1)$

Hier werden nicht die Sumenformeln genommen. Die Terme hängen vom Wert des Schibereglers **nn** ▸ 3. ab. Untersuchung wäre nur numerisch, da ist Graphfenster besser geeignet.

$\mathbf{ende}(x)[1\ \ 2] \blacktriangleright \frac{2}{x-1}+4\cdot x+2$ $\qquad \frac{d}{dx}(\mathbf{ende}(x)[1\ \ 2]) \blacktriangleright 4-\frac{2}{(x-1)^2}$

$\mathbf{extr}:=\mathrm{zeros}\left(\frac{d}{dx}(\mathbf{ende}(x)[1\ \ 2]),x\right) \blacktriangleright \left\{\frac{-(\sqrt{2}-2)}{2},\frac{\sqrt{2}+2}{2}\right\}$ $\quad \mathrm{approx}(\mathbf{extr}[1]) \blacktriangleright 0.292893$

Maximum für Zustand 2 bei $p=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$, das wird auch in dem interaktiven Graphen angezeigt. Zustand 3 hat absolutes Maximum bei p=0.5, denn dann wird die rote Lampe nie gewählt, auf lange Sicht sinkt sie nach unten, Zustand 3 ist dann der einzige Endzustand, er ist dann absorbierend.

1.5

Interessant ist, wo sich die ende-Funktionen schneiden:

$\mathrm{zeros}(\mathbf{ende}(x)[1\ \ 3]-\mathbf{ende}(x)[1\ \ 2],x) \blacktriangleright \left\{0,\frac{1}{3}\right\}$

$\mathrm{zeros}(\mathbf{ende}(x)[1\ \ 3]-\mathbf{ende}(x)[1\ \ 1],x) \blacktriangleright \left\{\frac{1}{3}\right\}$

Also ist ab $p=\frac{1}{3}$ die Wahrscheinlichkeit von Zustand 3 größer als die von Zustand 2 und auch die von Zustand 1. Bis dahin ist Zustand 1 der dominierende, danach ist er der mit der geringsten Wahrscheinlichkeit.

Es ist interessant, dass die Wahrscheinlichkeit für Zustand 1 nur von p und nicht vom Takt n abhängt. Die beiden anderen Wahrscheinlichkeitsfunktionen reagieren auf den Schieberegeler nn, es ist pterm(x)|n=nn geschrieben, damit die variable n nicht verschwindet.

Anmerkungen zu den Darstellungen:

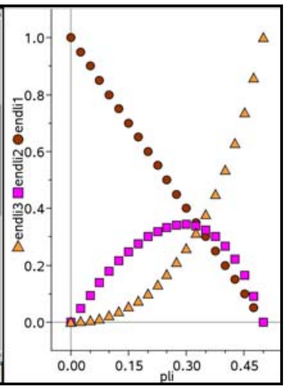
ende(x) ist eine Funktion, deren Funktionswert ein Zeilen-Vektor ist. mit [1,2] z.B. greift man die 2. Komponente heraus. Darum kann man ende(x)[1,2] zeichnen.

Das Komma tippt man, aber es wird später nicht dargestellt.

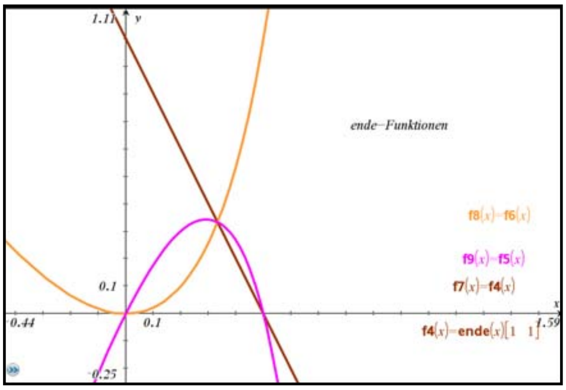
1.6

	A pli	B endli1	C endli2	D endli3
◆	=seq(i,i,0,(			
12	0.275	0.45	0.341379	0.20862
13	0.3	0.4	0.342857	0.25714
14	0.325	0.35	0.337037	0.31296
15	0.35	0.3	0.323077	0.37692
16	0.375	0.25	0.3	0.4
17	0.4	0.2	0.266667	0.53333
18	0.425	0.15	0.221739	0.62826
19	0.45	0.1	0.163636	0.73636
20	0.475	0.05	0.090476	0.85952
21	0.5	0.	0.	1
22				
23				
24				
25				

B1:B21 =ende(a1)[1 1]



1.7



1.8