Stochastik: Markow-Ketten, Grundlagen

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Uni Lüneburg, , www.uni-lueneburg.de/mathe-lehramt 29. November 2004

Es geht um mehrstufige Zufallsversuche, sogenannte Zufallsprozesse, bei denen nacheinander "Zustände" angenommen werden.

Die Zustände heißen $i_1, i_2, i_3, \ldots \in I$. (Das ist übliche Bezeichnung, schulisch ist evt Z_i besser.)

Eine Liste, ein Vektor $X = (i_5, i_2, i_7, i_2, i_2)$ zeigt z.B. an, dass das System nacheinander die Zustände $i_5\, i_2, i_7\ i_2, i_2$ angenommen hat. Man schreibt auch

$X_0 = i_5,\ X_1 = i_2, X_2 = i_7, X_3 = i_2,\ X_4 = i_2$.

Dementsprechend ist $P(X_n = i_k \mid X_0 = \ldots Vorgeschichte)$ die Wahrscheinlichkeit, dass $X_n = i_k\ ist,\ wenn\ \ldots$ die anderen X_i vorher die anderen genannten Zustände angenommen haben.

Mit dem senkrechten Strich wird bekanntermaßen eine bedingte Wahrscheinlichkeit angegeben. X, b.z.w. die X_i können als Zufallsgrößen aufgefasst werden, deren "Werte" die Zustände sind.

An dieser Stelle merkt man, dass es leichter wird, wenn die genannte Wahrscheinlichkeit nicht von der gesamten Vorgeschichte sondern nur von dem letzten eingenommenen Zustand abhängt. Das genau beschreibt der Begriff "Markow-Kopplung" und der Vektor X ist dann eine **Markow-Kette**.

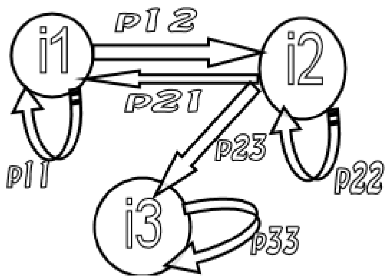
Ein Zufallsprozess hat "**Markow-Kopplung**", wenn

$$P(X_n = i_k \mid X_1 = \ldots Vorgeschichte) = P(X_n = i_k \mid X_{n-1} = i_r) = p_{rk}(n)$$

Diese Wahrscheinlichkeit kann dann als Beschriftung eines "Übergangspfeiles" $i_r \xrightarrow{p_{rk}(n)} i_k$ dargestellt werden.

Nochmals einfacher wird die Betrachtung, wenn diese **"Übergangs-wahrscheinlichkeiten**" nicht vom Zeittakt (oder Zeitpunkt in stetigen Fall) abhängen. Dann hat man eine "**homogene Markow-Kette**" kurz HMK. Bei HMKn kann man die Übergangswahrscheinlichkeiten in einer

"**Übergangsmatrix**" anordnen $A = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \ldots \\ p_{22} & p_{22} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$,



A hat so viele Zeilen und Spalten wie es Zustände gibt, die Anzahl sei a. (Abzählbarkeit von I war vorausgesetzt. Auch a=unendlich)

Nun lassen sich die Zusammenhänge auch gut im "**Zustandsgraphen**" darstellen. Die Summe der von einem Zustand ausgehenden Pfeile muss 1 sein, d.h. in A müssen die Zeilesummen 1 sein, A heißt deswegen "**stochastische Matrix**".

Der Vektor $w_o = (P(X_0 = i_1),\ P(X_0 = i_2),\ P(X_0 = i_1), \ldots,\ P(X_0 = i_a))$ wird Startvektor oder Startverteilung genannt. Es muss wirklich eine "Verteilung" sein, d.h. die Summe der genannten Wahrscheinlichkeiten muss 1 sein. w_1 erhält man dann durch Matrizenmultiplikation $w_0 * A = w_1 = (P(X_1 = i_1),\ P(X_1 = i_2),\ \ldots,\ P(X_1 = i_a))$.

Eine Gleichgewichtsverteilung v ist Eigenvektor von A zum Eigenwert 1: $v * A = v$