

Stochastik: Markow-Ketten mit zwei Zuständen: Handwerker

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Uni Lüneburg, www.mathematik-verstehen.de 29. Nov 2004 neu 2010

Es geht hier um Markowprozesse mit genau zwei Zuständen.

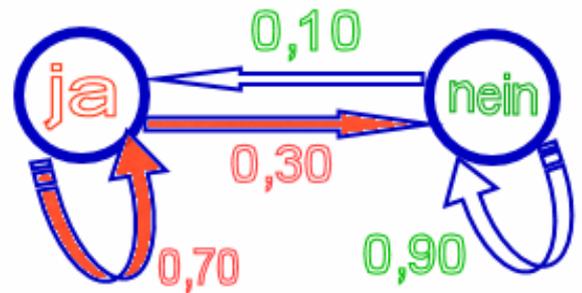
Handwerker-Beispiel

Zwei Zustände:

ja: die Handwerker sind heute da
nein: die Handwerker sind heute nicht da
Die Prozentsätze geben an, mit welcher Wahrscheinlichkeit morgen der betreffende Zustand eintritt.

Also: Wenn heute Handwerker da sind, sind sie mit 70% Wahrscheinlichkeit auch morgen da, mit 30 % W. aber nicht.

Wenn sie heute nicht da sind, dann sind sie mit 90% W. morgen auch nicht da, nur mit 10% W. kommen sie morgen.



| | | morgen | |
|-------|------|--------|------|
| | | ja | nein |
| heute | ja | 0,7 | 0,3 |
| | nein | 0,1 | 0,9 |

In [Markow 2x2 mit MuPAD](#) ist dieses Beispiel ausführlich dargestellt

Allgemein gilt: Übergangsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$$

Wenn p und q nicht vom betrachteten Zeitpunkt abhängen, liegt ein **homogener Markow-Prozess** vor.

Ist die heute die Verteilung heute=(x,y), so gilt morgen die Verteilung

$$\text{morgen} = \text{heute} \cdot A = (x \ y) \cdot \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix} = (x(1-p) + yq \quad xp + y(1-q))$$

wie es sich aus der Matrizenmultiplikation ergibt. Der Startvektor heute=(x,y) muss ein **stochastischer Vektor** sein, also x+y=1.

Dann ist auch morgen ein stochastischer Vektor, denn

$$(x(1-p) + yq + xp + y(1-q)) = x + y = 1$$

Eine **Gleichgewichtsverteilung**, stabile Verteilung v, ist ein Vektor, der durch die Multiplikation mit A nicht verändert wird. v heißt Eigenvektor von A zum Eigenwert

$$1. \quad v = vA = (x \ y) \cdot \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix} = (x(1-p) + yq \quad xp + y(1-q)) = (x \ y)$$

$$x(1-p) + yq = x$$

als Gleichungssystem heißt das $xp + y(1-q) = y$, dieses hat die Lösung

$$x + y = 1$$

$$v = (x \ y) = \left(\frac{q}{p+q} \quad \frac{p}{p+q} \right). \quad \text{Im obigen Beispiel: } \vec{v} = (0.25 \quad 0.75). \quad \text{Also sind auf}$$

lange Sicht die Handwerker in 25% der Tage da, in 75% nicht.

Markow-handwerker.wpd (Neu Jan 10)

