Handwerker und geometrische Verteilung

Prof. Dr. Dörte Haftendorn MuPAD 4 Nov. 07 http://haftendorn.uni-lueneburg.de

##

Markowkette mit zwei Zuständen, Handwerkerbeispiel,

siehe zughörige pdf-Seite

Nun aber allgemein durchgeführt. Achtung hier ist nicht notwendig q gleich 1-p.

```
HW:=matrix([[p,1-p],[1-q,q]]);
```

$$\begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-q & q \end{pmatrix}$$

Übergangsmatrix

```
HW^2
```

$$\begin{pmatrix} p^2 + (p-1)\cdot(q-1) & -p\cdot(p-1) - q\cdot(p-1) \\ -p\cdot(q-1) - q\cdot(q-1) & q^2 + (p-1)\cdot(q-1) \end{pmatrix}$$

```
expand(%)
```

$$\begin{pmatrix} p^2 - q - p + p\cdot q + 1 & p + q - p^2 - p\cdot q \\ p + q - q^2 - p\cdot q & q^2 - q - p + p\cdot q + 1 \end{pmatrix}$$

```
HW71:=(HW|p=0.7)|q=0.9
```

$$\begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}$$

Aus der Eigenvektorberechnung auf der pdf-Seite ergibt sich:

```
Q:=3:
vh:=matrix([[1/(1+Q),1/(1+1/Q)]])
```

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Dieses soll also der Eigenvektor sein:

```
vh*HW71
```

$$\begin{pmatrix} 0.25 & 0.75 \end{pmatrix}$$

Er ist es tatsächlich.

```
HW71^10
```

$$\begin{pmatrix} 0.2545349632 & 0.7454650368 \\ 0.2484883456 & 0.7515116544 \end{pmatrix}$$

Das zeigt sich auch beim Potenzieren der Übergangsmatrix.

```
matrix([[0,1]])*HW71^20
```

$$\begin{pmatrix} 0.2499908596 & 0.7500091404 \end{pmatrix}$$

Hier zeigt sich übrigens, dass man mit Rechner Eigenvektoren leicht durch hinreichend hohe Potenzen der Übergangsmatrix bekommt.
###

Simulation für die mittlere Wartezeit

Wahrscheinlichkeit für 1 sei 25%.

```
ar:=random(1..4):
ar() $ k=1..20
```

2, 3, 2, 4, 1, 3, 2, 1, 2, 2, 4, 4, 2, 1, 3, 2, 1, 2, 4, 2

Mittlere Wartezeit auf eine 1. Durch Auszählen gewonnen.

```
(2+4+7+2+3)/5, "=",float((2+4+7+2+3)/5)
```

$\frac{18}{5}$, "=", 3.6

Geometrische Verteilung

Theoretisch wird die Wartezeit auf ein Ereignis, das mit Wahrscheinlichkeit p eintritt, modelliert durch eine "Geometrische Verteilung", wie man sich leicht am Baumdiagramm klarmacht.
P(T=k)=p*(1-p)^k

```
p*hold((1-p))^k $ k=0..5
```

$p,\ p\cdot(1-p),\ p\cdot(1-p)^2,\ p\cdot(1-p)^3,\ p\cdot(1-p)^4,\ p\cdot(1-p)^5$

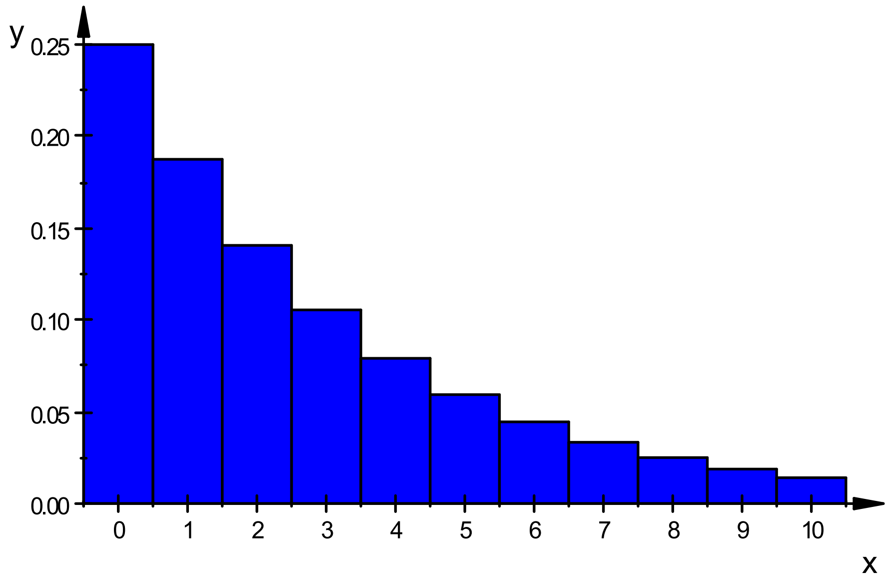
Dieses ist eine unendliche geometrische Folge, ihre Summe ist

```
p*1/(1-(1-p))
```

1

Darum ist dies die Verteilung der Wartezeit.

```
p:=0.25:
plot(plot::Bars2d([p*(1-p)^k $ k=0..10]))
```



Die mittlere Wartezeit kann man überlegen: Wenn die W. 25% ist kommen auf 100 Takte 25 Erfolge. Verteilt man die gleichmäßig auf die 100, muss man im Mittel 4 Takte auf einen Erfolg warten, allgemein 1/p Takte.

Auf ein p-Ereignis muss man im Mittel 1/p Takte warten.

Das ergibt sich auch durch die theoretische Erwartungswertberechnung.

```
p*(1-p)^(1/p)
```

$$p \cdot \sqrt[p]{1-p}$$

Dies ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Erwartungswert der Wartezeit eintritt.

```
%|p=0.25
```

$$0.0791015625$$

```
plotfunc2d(p*(1-p)^(1/p),p=0..1)
```