Herleitung, Programmierung, Diskussion

Erzeugung stochastischer Vektoren und Matrizen

Prof. Dr. Dieter Riebesehl+Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, Sept. 2011
www.mathematik−verstehen.de

Spielwiese mit den hier bereitgestellten Möglichkeiten:

$\mathbf{myv}:=\mathbf{stochvector}(3) ▸ \begin{bmatrix} 0.617002 & 0.185868 & 0.19713 \end{bmatrix}$ $\quad \text{round}(\mathbf{myv},2) ▸ \begin{bmatrix} 0.62 & 0.19 & 0.2 \end{bmatrix}$

So kann man stochastische Vektoren erzeugen.

$\mathbf{mym}:=\mathbf{stochmatrix}(3) ▸ \begin{bmatrix} 0.106652 & 0.042972 & 0.850376 \\ 0.529917 & 0.296396 & 0.173687 \\ 0.911463 & 0.005741 & 0.082796 \end{bmatrix}$ $\quad \text{round}(\mathbf{mym},2) ▸ \begin{bmatrix} 0.11 & 0.04 & 0.85 \\ 0.53 & 0.3 & 0.17 \\ 0.91 & 0.01 & 0.08 \end{bmatrix}$

eine stochastische Matrix mit Zeilensummen 1

$\mathbf{myv}\cdot\mathbf{mym} ▸ \begin{bmatrix} 0.343976 & 0.082736 & 0.573288 \end{bmatrix}$ eine Zustandsvektor−Änderung

$\mathbf{stabil}:=\mathbf{mym}^{50} ▸ \begin{bmatrix} 0.497789 & 0.03422 & 0.467992 \\ 0.497783 & 0.03422 & 0.467997 \\ 0.49778 & 0.03422 & 0.468 \end{bmatrix}$ Die stabile Übergangsmatrix

$\mathbf{eig}:=\mathbf{stabil}[1] ▸ \begin{bmatrix} 0.497789 & 0.03422 & 0.467992 \end{bmatrix}$ der Eihgenvektor

$\mathbf{eig}\cdot\mathbf{mym} ▸ \begin{bmatrix} 0.497781 & 0.03422 & 0.467999 \end{bmatrix}$ Beweis, dass er Eigenvektor ist.

Dieses kann man verwenden um (viele) Beispiele zu erfinden.

1.1

Herleitung, Programmierung, Diskussion

Erzeugung stochastischer Vektoren und Matrizen Herleitung Zum Ansatz siehe Seite 12

Prof. Dr. Dieter Riebesehl+Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, Sept. 2011

Gesucht ist eine Dichtefunktion für eine Zufallsgröße z auf dem Intervall [0,1], die z aus Symmetriegründen den Erwartungswert 1/n gibt. Ansatz: $\mathbf{phi}(z):=s\cdot z^k$ ▸ *Fertig* Es muss gelten

$\int \mathbf{phi}(z)\,dz$ ▸ $\frac{z^{k+1}\cdot s}{k+1}$ $\quad \frac{z^{k+1}\cdot s}{k+1}|z=1$ ▸ $\frac{s}{k+1}$ muss 1 sein, alsi s:=k+1 Nun also

$\mathbf{phi2}(z):=(k+1)\cdot z^k$ ▸ *Fertig* Weiter muss $\int_0^1 (z\cdot\mathbf{phi2}(z))\,dz=1/n$ sein. $\int (z\cdot\mathbf{phi2}(z))\,dz$ ▸ $\frac{(k+1)\cdot z^{k+2}}{k+2}$

$\frac{(k+1)\cdot z^{k+2}}{k+2}|z=1$ ▸ $\frac{k+1}{k+2}$ $\quad \text{solve}\left(\frac{k+1}{k+2}=\frac{1}{n},k\right)$ ▸ $k=\frac{-(n-2)}{n-1}$ $\quad \frac{-(n-2)}{n-1}+1$ ▸ $\frac{1}{n-1}$ ⚠ Dichte einer Zufallsgröße mit

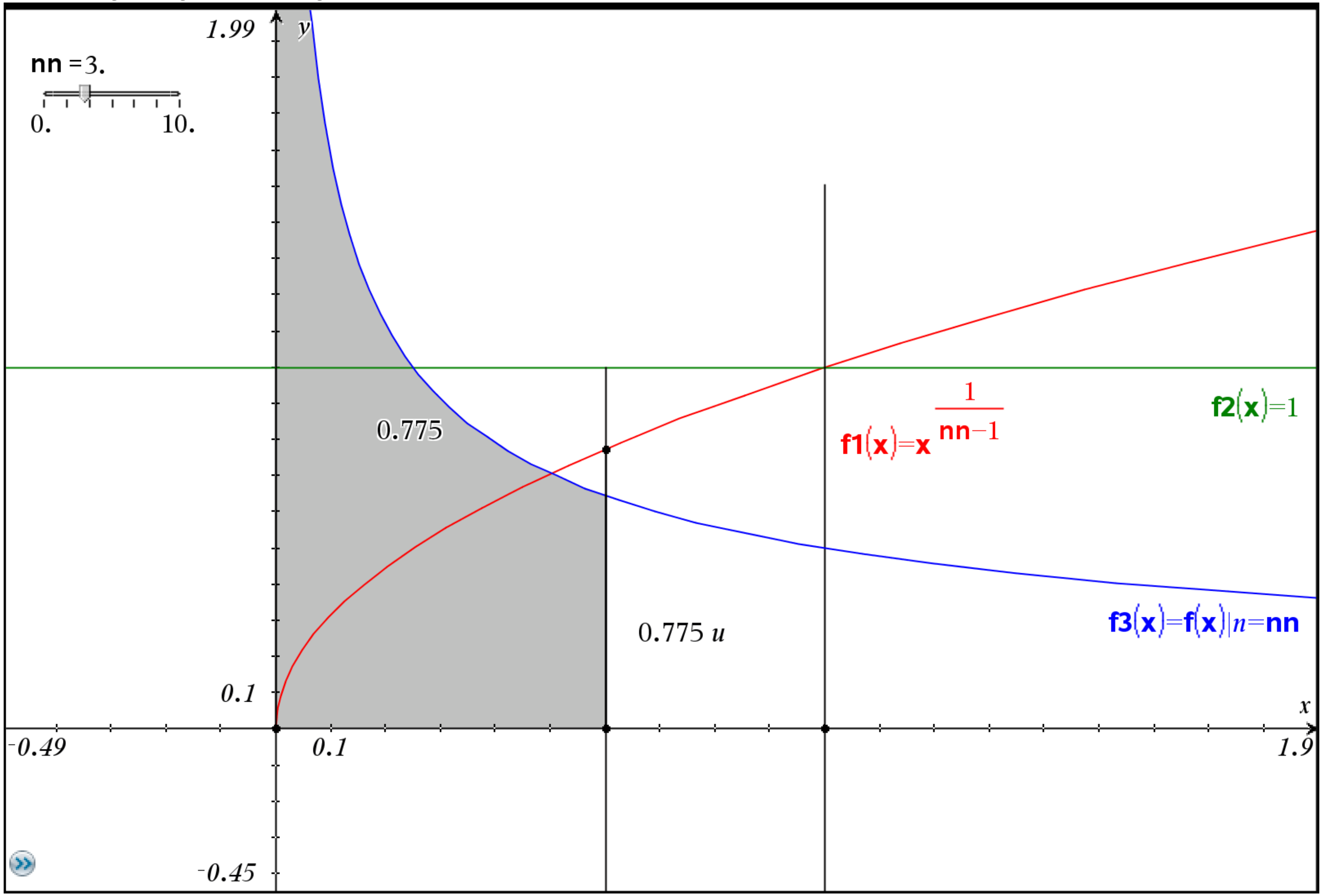
Erwartungswert 1/n $\mathbf{f}(z):=\frac{1}{n-1}\cdot z^{\frac{2-n}{n-1}}$ ▸ *Fertig* in [0,1] Dichte−Bedingung $\int_0^1 \mathbf{f}(z)\,dz|n>1$ ▸ 1 ,

Erwartungswert E(x)= $\int_0^1 (z\cdot\mathbf{f}(z))\,d\mathbf{x}|n>1$ ▸ $\frac{z^{\frac{1}{n-1}}}{n-1}$ Von dieser Dichtefunktion ist die kumulierte

Verteilungsfunktion: $\int \mathbf{f}(z)\,dz$ ▸ $z^{\frac{1}{n-1}}$ ⚠ mit der Bedeutung: $P(0<r<=z)=z^{\frac{1}{n-1}}=\sqrt[n-1]{z}$ für n>1

1.2

Herleitung, Programmierung, Diskussion



1.3

Herleitung, Programmierung, Diskussion

Das folgende Programm erzeugt einen stochastischen Vektor gewünschter Länge.

```
Define LibPub stochvector(n)=Func                              ▸ Fertig
                             Local x
                             If n=1 Then
                              Return [1]
                             Else
                              x:=(rand())^(1/(n-1))
                              Return augment([1-x],x·stochvector(n-1))
                             EndIf
                             EndFunc
```

Anmerkung: Es hätte auch erste Komponente x und Fakor in der zweiten (1−x) sein können.

stochvector(1) ▸ $[1]$

stochvector(2) ▸ $[0.056403 \quad 0.943597]$

stochvector(3) ▸ $[0.046942 \quad 0.813256 \quad 0.139802]$

stochvector(4) ▸ $[0.198595 \quad 0.290884 \quad 0.135894 \quad 0.374626]$

Der Vektor wird in diesem Konzept rekursiv erzeugt und die Komponenten haben eine Verteilung mit dem mit dem Erwartungwert $\frac{1}{n}$.

Veranschaulichung für n=3 in einem Dreieck, das dann gleichverteilte Punkte haben muss, siehe unten.

1.4

Herleitung, Programmierung, Diskussion

Nun ist eine einfache stochastische Matrix auch kein Problem mehr:

```
Define LibPub stochmatrix(n)=Func                    ▸ Fertig
    Local l,i
    l:=stochvector(n)
    For i,1,n−1
      l:=colAugment(l,stochvector(n))
    EndFor
    Return l
    EndFunc
```

Ein paar Tests:

stochmatrix(2) ▸ $\begin{bmatrix} 0.956008 & 0.043992 \\ 0.660637 & 0.339363 \end{bmatrix}$

round(**stochmatrix**(3),2) ▸ $\begin{bmatrix} 0. & 0.8 & 0.2 \\ 0.11 & 0.04 & 0.85 \\ 0.53 & 0.3 & 0.17 \end{bmatrix}$

round(**stochmatrix**(5),3) ▸ $\begin{bmatrix} 0.702 & 0.007 & 0.195 & 0.095 & 0.001 \\ 0.139 & 0.044 & 0.009 & 0.583 & 0.225 \\ 0.276 & 0.365 & 0.277 & 0.023 & 0.059 \\ 0.665 & 0.084 & 0.112 & 0.004 & 0.135 \\ 0.588 & 0.024 & 0.083 & 0.243 & 0.063 \end{bmatrix}$

1.5

Herleitung, Programmierung, Diskussion

Zum Nachweis, dass die stochastischen Vektoren wirklich gleichverteilt sind, werden 200 3−Vektoren so aufbereitet, dass man sieht, dass sie im Dreieck x+y+z=1, x≥0, y≥0, z≥0 wirklich gleichverteilt sind.

Zunächst eine Funktion, die von den Vektoren die ersten beiden Komponenten nimmt, als Punkte deutet und auf ein gleichseitiges Dreieck projiziert.

Define **stochpts**()=Func ▸ *Fertig*

Local l,**i**

$l:=\text{subMat}(\textbf{stochvector}(3),1,1,1,2)\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\end{bmatrix}$

For **i**,1,199

$l:=\text{colAugment}\left(l,\text{subMat}(\textbf{stochvector}(3),1,1,1,2)\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\end{bmatrix}\right)$

EndFor

Return l

EndFunc

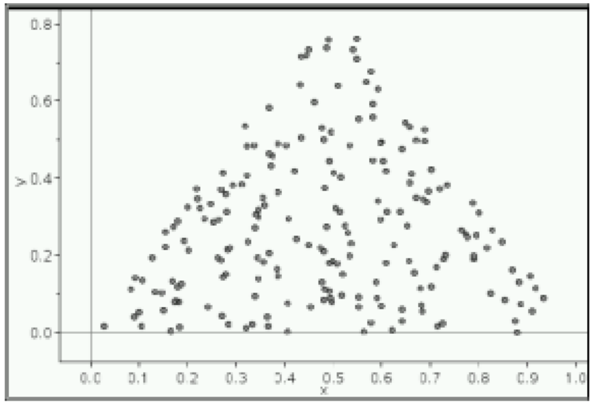
Dann wird b mit einer Matrix von Punkten gefüllt, Komponenten der Punkte untereinander:

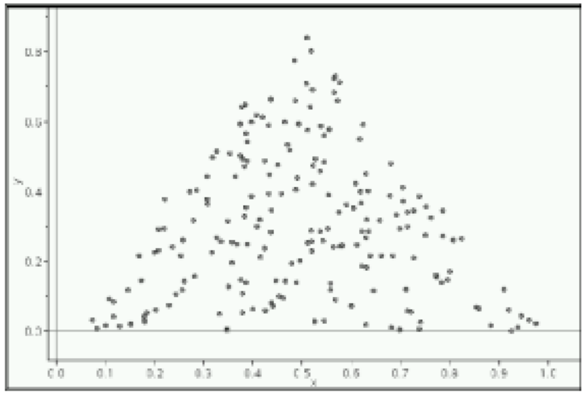
b:=(**stochpts**())^{T} (bitte nicht ausführen, das sprengt den Bildschirm! Ansehen im Calculator−Fenster.

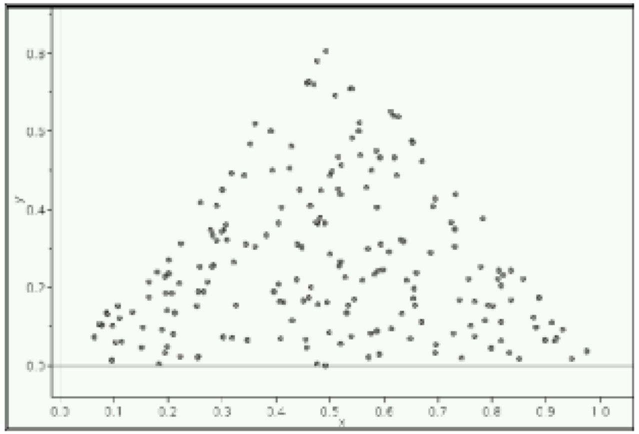
1.6

Herleitung, Programmierung, Diskussion

In Lists und Spreadsheats (siehe dort) werden mit den Werten aus b Spalten gefüllt, und in Data und Statistics die Punkte gezeigt: (einige Bilder davon ist hier eingefügt).







So sollte es sein!

1.7

Herleitung, Programmierung, Diskussion

Weitere Prüfungen:

Herausgreifen von 200 k−ten Komponenten:

```
Define komp(k)=Func                                  ▸ Fertig
        Local l,i
        l:={ }
        For i,1,200
          l:=augment(l,{stochvector(3)[1  k]})
        EndFor
        Return l
        EndFunc
```

seq(mean(komp(k)),k,1,3) ▸ {0.331224,0.335412,0.309414} an allen Komponenten ist der

seq(mean(komp(k)),k,1,3) ▸ {0.304561,0.332572,0.349752} Mittelwert etwa 1/3

seq(mean(komp(k)),k,1,3) ▸ {0.349114,0.32206,0.339901}

seq(stDevPop(komp(k)),k,1,3) ▸ {0.237784,0.235711,0.240808} Deutung aber nicht wie bei

2·seq(stDevPop(komp(k)),k,1,3) ▸ {0.472633,0.446255,0.466578} normalverteilten Zufallsgrößen.

seq(max(komp(k)),k,1,3) ▸ {0.916204,0.97023,0.960071} Der Wertebereich wird gut ausgeschöpft.

seq(min(komp(k)),k,1,3) ▸ {0.001068,0.009207,0.001348}

seq(median(komp(k)),k,1,3) ▸ {0.297608,0.299841,0.317993} Median scheint kleiner als Mittelwert.

1.8

Herleitung, Programmierung, Diskussion

$b:=\left(stochpts()\right)^T$

$$\begin{bmatrix} 0.636423 & 0.356749 & 0.393331 & 0.427929 & 0.565014 & 0.471186 & 0.582418 & 0.476935 & 0.255357 & 0.7\ldots \\ 0.27279 & 0.077842 & 0.588516 & 0.188373 & 0.152927 & 0.513376 & 0.338408 & 0.699873 & 0.065131 & 0.3\ldots \end{bmatrix}$$

$b:=\left(stochpts()\right)^T$

$$\begin{bmatrix} 0.85805 & 0.446088 & 0.361183 & 0.623918 & 0.800651 & 0.744756 & 0.901876 & 0.535322 & 0.498985 & 0.6\ldots \\ 0.207542 & 0.507953 & 0.048732 & 0.193911 & 0.283601 & 0.34695 & 0.075972 & 0.791256 & 0.802085 & 0.2\ldots \end{bmatrix}$$

$b:=\left(stochpts()\right)^T$

$$\begin{bmatrix} 0.103327 & 0.470201 & 0.408011 & 0.782758 & 0.915993 & 0.27243 & 0.577354 & 0.255809 & 0.760366 & 0.7\ldots \\ 0.060691 & 0.719512 & 0.069996 & 0.375888 & 0.063048 & 0.213917 & 0.500701 & 0.188528 & 0.101752 & 0.0\ldots \end{bmatrix}$$

$komp(1)$

$\{0.390668,0.025996,0.292281,0.171547,0.50066,0.73514,0.455511,0.11219,0.039799,0.122397,0.160783,0.\ldots$

4/99

1.9

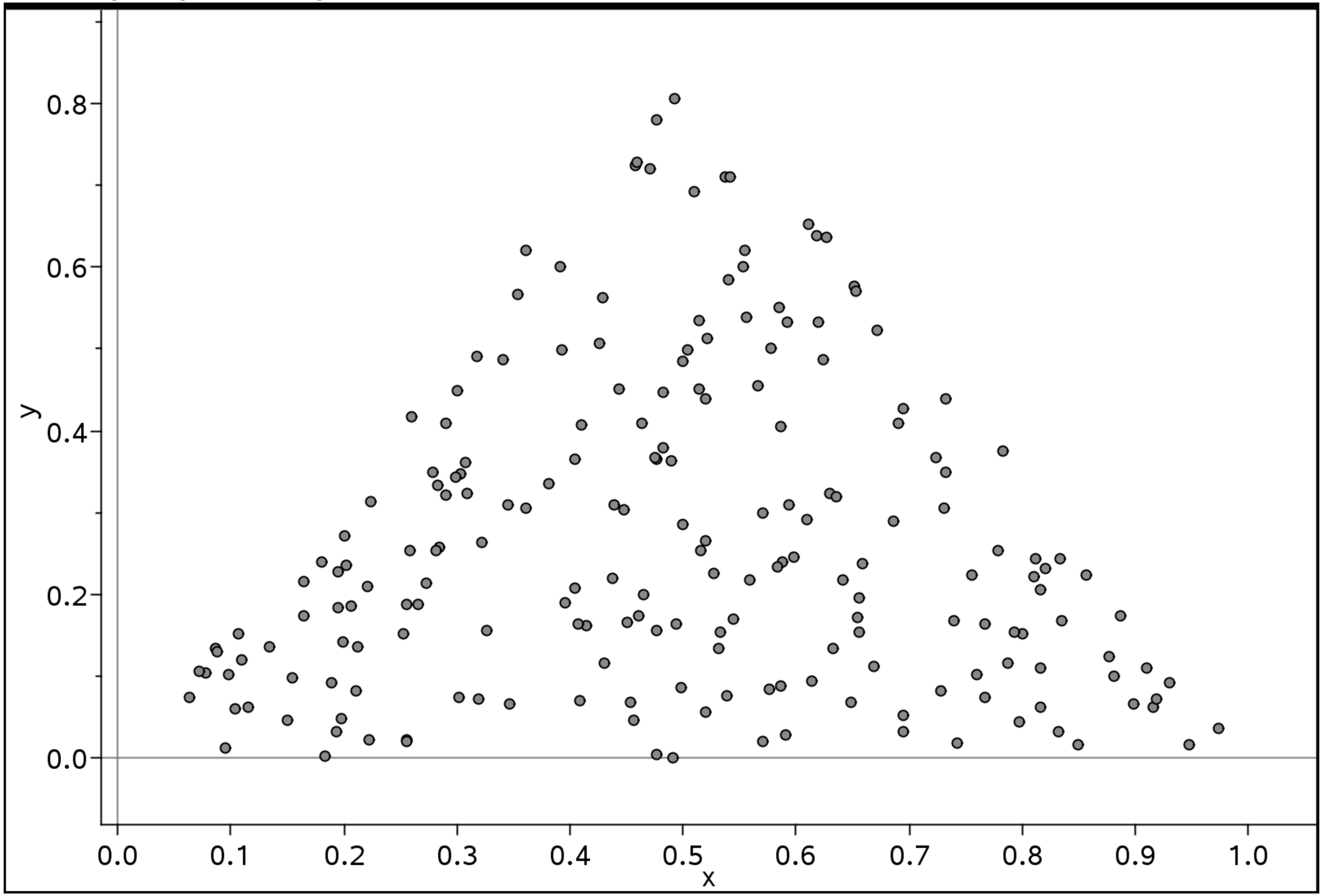
Herleitung, Programmierung, Diskussion

	A i	B x	C y	D	E	F	G	H	I	J
◆	=seq(j,j,1,:	=seq(b[1,j	=seq(b[2,j							
1	1	0.103327	0.060691							
2	2	0.470201	0.719512							
3	3	0.408011	0.069996							
4	4	0.782758	0.375888							
5	5	0.915993	0.063048							
6	6	0.27243	0.213917							
7	7	0.577354	0.500701							
8	8	0.255809	0.188528							
9	9	0.760366	0.101752							
10	10	0.766856	0.074707							
11	11	0.727908	0.082943							
12	12	0.188355	0.092879							
13	13	0.779086	0.252739							
14	14	0.503388	0.498253							
15	15	0.69452	0.033235							
16	16	0.686055	0.289077							
17	17	0.755686	0.222774							

A1 =1

1.10

Herleitung, Programmierung, Diskussion



1.11

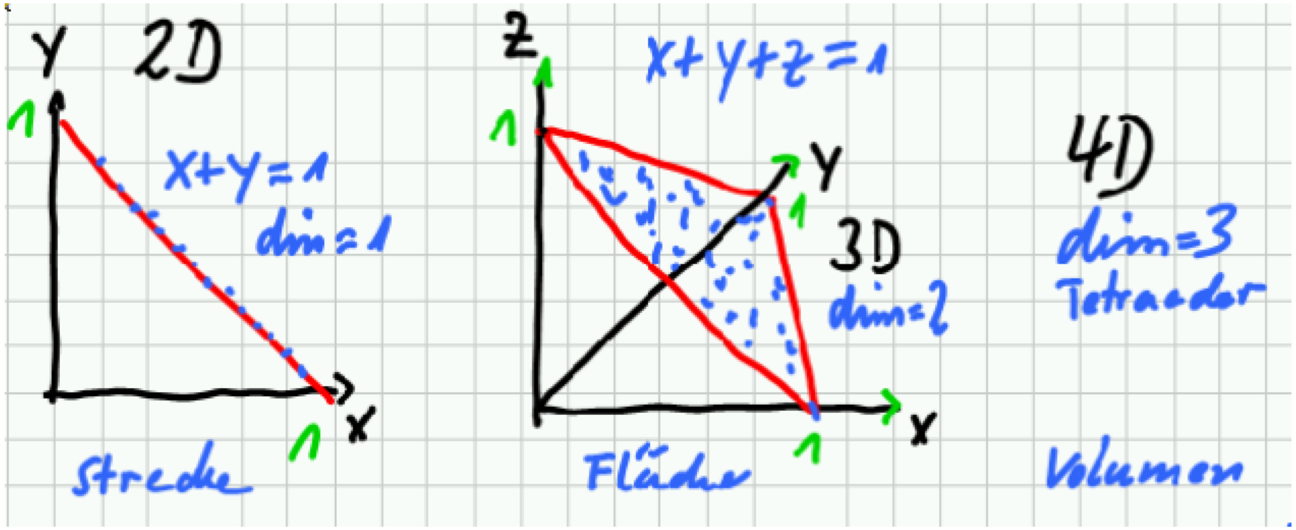
Zum Handling:

In Data und Statistics entsteht immer nur das Bild der momentat gültigen Listen aus Speadsheets. So ein Bild ist jeweils mit dem Schnappschuss−Werkzeug (Fotoapparat) herausgegriffen und dann in eine Notes−Seite (Nr. 6) eingefügt und kleiner gezogen.

Nach einer Neubelegungvon $\mathbf{b}:=\left(\mathbf{stochpts}()\right)^T$ im Calculatorfenster muss man die Zellen der zweiten Zeile in Spreadsheets neu abschicken.

Anmerkung zum Ansatz:

Der Ansatz einer Potenzfunktion für die Dichte− und damit auch für die Verteilung ist vernünftig, da



Das Gebilde, in dem die Punkte gleichverteilt sein müssen, ist mit einem Potenzgesetz verknüpft.

1.12