Probleme 1

Kubische Splines mit 4 Punkten

Prof. Dr. Dörte Haftendorn 2012 Definition eines kubischen Spines, der durch 4 frei ziehbare Punkte verläuft. A=[1,2]; B=[3,5]; C=[4,3]; D=[6,4] Die Punkte kann man sich als Nägel vorstellen, durch die der Spline laufen soll.

$\mathbf{apx}:=0 \blacktriangleright 0 \quad \mathbf{bpx}:=3 \blacktriangleright 3 \quad \mathbf{cpx}:=6 \blacktriangleright 6 \quad \mathbf{dpx}:=10 \blacktriangleright 10$

$\mathbf{apy}:=0 \blacktriangleright 0 \quad \mathbf{bpy}:=1 \blacktriangleright 1 \quad \mathbf{cpy}:=4 \blacktriangleright 4 \quad \mathbf{dpy}:=6 \blacktriangleright 6$

Das Handwerk zum Punktesetzen und "zugfest" machen ist auf Seite 2 des zweiten Problems der Datei lagrange-ti.tns beschrieben.

$\mathbf{p0}(x):=\mathbf{apy}+b0\cdot(x-\mathbf{apx})+\mathbf{c0}\cdot(x-\mathbf{apx})^2+d0\cdot(x-\mathbf{apx})^3 \blacktriangleright \mathit{Fertig}$ Durch (apx, apy)

$\mathbf{p1}(x):=\mathbf{bpy}+b1\cdot(x-\mathbf{bpx})+c1\cdot(x-\mathbf{bpx})^2+d1\cdot(x-\mathbf{bpx})^3 \blacktriangleright \mathit{Fertig}$ Durch (bpx, bpy)

$\mathbf{p2}(x):=\mathbf{cpy}+b2\cdot(x-\mathbf{cpx})+\mathbf{c2}\cdot(x-\mathbf{cpx})^2+d2\cdot(x-\mathbf{cpx})^3 \blacktriangleright \mathit{Fertig}$ Durch (cpx, cpy)

Damit erreicht jedes Polynom seinen "Startnagel".

$\mathbf{gl0}:=\mathbf{p0}(\mathbf{bpx})=\mathbf{bpy} \blacktriangleright 3\cdot b0+27\cdot d0=1$

$\mathbf{gl1}:=\mathbf{p1}(\mathbf{cpx})=\mathbf{cpy} \blacktriangleright 3\cdot b1+9\cdot c1+27\cdot d1+1=4$

$\mathbf{gl2}:=\mathbf{p2}(\mathbf{dpx})=\mathbf{dpy} \blacktriangleright 4\cdot b2+64\cdot d2+4=6$

Damit erreicht jedes Polynom seinen rechten Nachbarbagel

1.1

An den inneren Nägeln müssen die Polynome in der Steigung übereinstimmen.

$\mathbf{s0}(x):=\frac{d}{dx}(\mathbf{p0}(x)) \blacktriangleright \mathit{Fertig} \quad \mathbf{s1}(x):=\frac{d}{dx}(\mathbf{p1}(x)) \blacktriangleright \mathit{Fertig} \quad \mathbf{s2}(x):=\frac{d}{dx}(\mathbf{p2}(x)) \blacktriangleright \mathit{Fertig}$

$\mathbf{gl3}:=\mathbf{s0}(\mathbf{bpx})=\mathbf{s1}(\mathbf{bpx}) \blacktriangleright b0+27\cdot d0=b1$

$\mathbf{gl4}:=\mathbf{s1}(\mathbf{cpx})=\mathbf{s2}(\mathbf{cpx}) \blacktriangleright b1+6\cdot c1+27\cdot d1=b2$

An den inneren Nägeln müssen die Polynome in der Krümmung (also hier 2. Ableitung) übereinstimmen.

$\mathbf{ss0}(x):=\frac{d}{dx}(\mathbf{s0}(x)) \blacktriangleright \mathit{Fertig} \quad \mathbf{ss1}(x):=\frac{d}{dx}(\mathbf{s1}(x)) \blacktriangleright \mathit{Fertig} \quad \mathbf{ss2}(x):=\frac{d}{dx}(\mathbf{s2}(x)) \blacktriangleright \mathit{Fertig}$

$\mathbf{ss0}(x) \blacktriangleright 6\cdot d0\cdot x$

$\mathbf{gl5}:=\mathbf{ss0}(\mathbf{bpx})=\mathbf{ss1}(\mathbf{bpx}) \blacktriangleright 18\cdot d0=2\cdot c1$

$\mathbf{gl6}:=\mathbf{ss1}(\mathbf{cpx})=\mathbf{ss2}(\mathbf{cpx}) \blacktriangleright 2\cdot c1+18\cdot d1=0$

Gesucht sind 9 Variable, wir haben 7 Gleichungen. Also bleiben zwei Freiheiten.

Beim "natürlichen Spline" werden c0 und c1 auf 0 gesetzt. Das bedeutet, dass die Straklatte vorn und hinten keine Kümmung hat. $\mathbf{c0}:=0 \blacktriangleright 0 \quad \mathbf{c2}:=0 \blacktriangleright 0$

1.2

Nun ist das lineare Gleichungsystem zu lösen:

$\mathbf{lo}:=\mathrm{solve}(\{\mathbf{gl0},\mathbf{gl1},\mathbf{gl2},\mathbf{gl3},\mathbf{gl4},\mathbf{gl5},\mathbf{gl6}\},\{b0,d0,b1,c1,d1,b2,d2\})$

$\blacktriangleright b0=\frac{1}{6} \text{ and } b1=\frac{2}{3} \text{ and } b2=\frac{7}{6} \text{ and } c1=\frac{1}{6} \text{ and } d0=\frac{1}{54} \text{ and } d1=\frac{-1}{54} \text{ and } d2=\frac{-1}{24}$

$\mathbf{p0}(x)|\mathbf{lo} \blacktriangleright \frac{x^3}{54}+\frac{x}{6}$ im Graphfenster blau, gilt von A bis B

$\mathbf{p1}(x)|\mathbf{lo} \blacktriangleright \frac{-x^3}{54}+\frac{x^2}{3}-\frac{5\cdot x}{6}+1$ im Graphfenster rot, gilt von B bis C

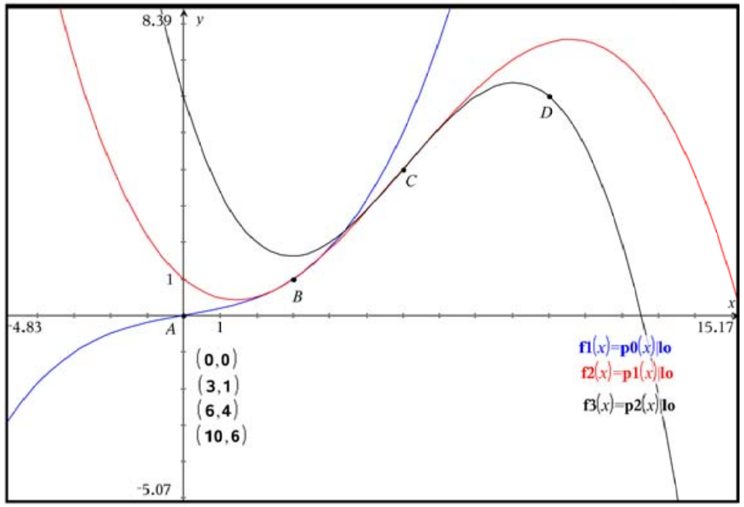
$\mathbf{p2}(x)|\mathbf{lo} \blacktriangleright \frac{-x^3}{24}+\frac{3\cdot x^2}{4}-\frac{10\cdot x}{3}+6$ im Graphfenster schwarz, gilt von C bis D

$\int \mathbf{p0}(x)|\mathbf{lo}\,dx \blacktriangleright \frac{x^4}{216}+\frac{x^2}{12}$

$\int_{\mathbf{apx}}^{\mathbf{bpx}} \mathbf{p0}(x)|\mathbf{lo}\,dx+\int_{\mathbf{bpx}}^{\mathbf{cpx}} \mathbf{p1}(x)|\mathbf{lo}\,dx+\int_{\mathbf{cpx}}^{\mathbf{dpx}} \mathbf{p2}(x)|\mathbf{lo}\,dx \blacktriangleright \frac{371}{12}$

Das ist das Integral unter dem Spline.

1.3



1.4