Newton-Interpolationspolynom

Polynomräume **VPn Raum der Polynome bis zum n. Grad**

Prof Dr. Dörte Haftendorn 2012 Definition eines Pplynoms 3. Grades, das durch 4 frei ziehbare Punkte verläuft.

Newton–Interpolation

mgl. Ausgangssituation A=[1,5]; B=[2,2]; C=[5,3]; D=[7,5]

$\mathbf{apx}:=1$ ▸ 1 $\mathbf{bpx}:=2$ ▸ 2 $\mathbf{cpx}:=5$ ▸ 5 $\mathbf{dpx}:=7$ ▸ 7

$\mathbf{apy}:=5$ ▸ 5 $\mathbf{bpy}:=2$ ▸ 2 $\mathbf{cpy}:=3$ ▸ 3 $\mathbf{dpy}:=5$ ▸ 5

Das Handwerk zum Punktesetzen und "zugfest" machen ist auf Seite 2 des zweiten Problems der Lagrange–Interpolation beschrieben.

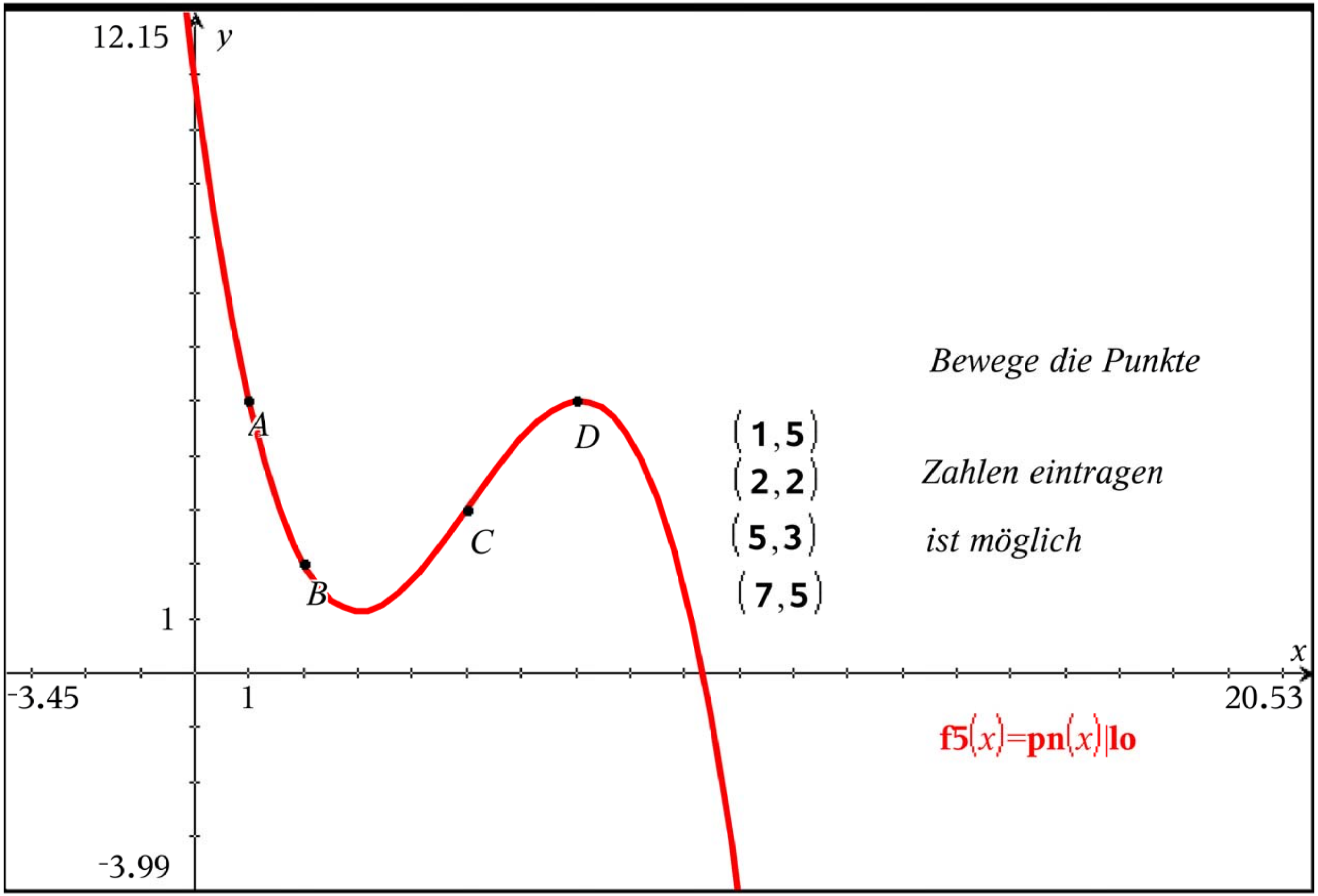
$\mathbf{ne0}(x):=1$ ▸ *Fertig* $\mathbf{ne1}(x):=x-\mathbf{apx}$ ▸ *Fertig* $\mathbf{ne2}(x):=(x-\mathbf{apx})\cdot(x-\mathbf{bpx})$ ▸ *Fertig*

$\mathbf{ne3}(x):=(x-\mathbf{apx})\cdot(x-\mathbf{bpx})\cdot(x-\mathbf{cpx})$ ▸ *Fertig*

$\mathbf{pn}(x):=c1\cdot\mathbf{ne0}(x)+c2\cdot\mathbf{ne1}(x)+c3\cdot\mathbf{ne2}(x)+c4\cdot\mathbf{ne3}(x)$ ▸ *Fertig*

Das gesuchte Polynom muss eine Linearkombination der vier Newtonpolynome sein. (Deren lineare Unabhängigkeit siehe unten). Wenn ein Punkt dazu kommt, muss man nur ein weiteres Newtonpolynom hinzunehmen.

1.1


12.15
y
Bewege die Punkte
A
D
(1,5)
(2,2)
Zahlen eintragen
C
(5,3)
ist möglich
B
(7,5)
1
x
-3.45
1
20.53
f5(x)=pn(x)|lo
-3.99

1.2

Bedingungen

gla:=**pn**(**apx**)=**apy** ▸ $c1=5$ **glb**:=**pn**(**bpx**)=**bpy** ▸ $c1+c2=2$

glc:=**pn**(**cpx**)=**cpy** ▸ $c1+4\cdot c2+12\cdot c3=3$

gld:=**pn**(**dpx**)=**dpy** ▸ $c1+6\cdot c2+30\cdot c3+60\cdot c4=5$

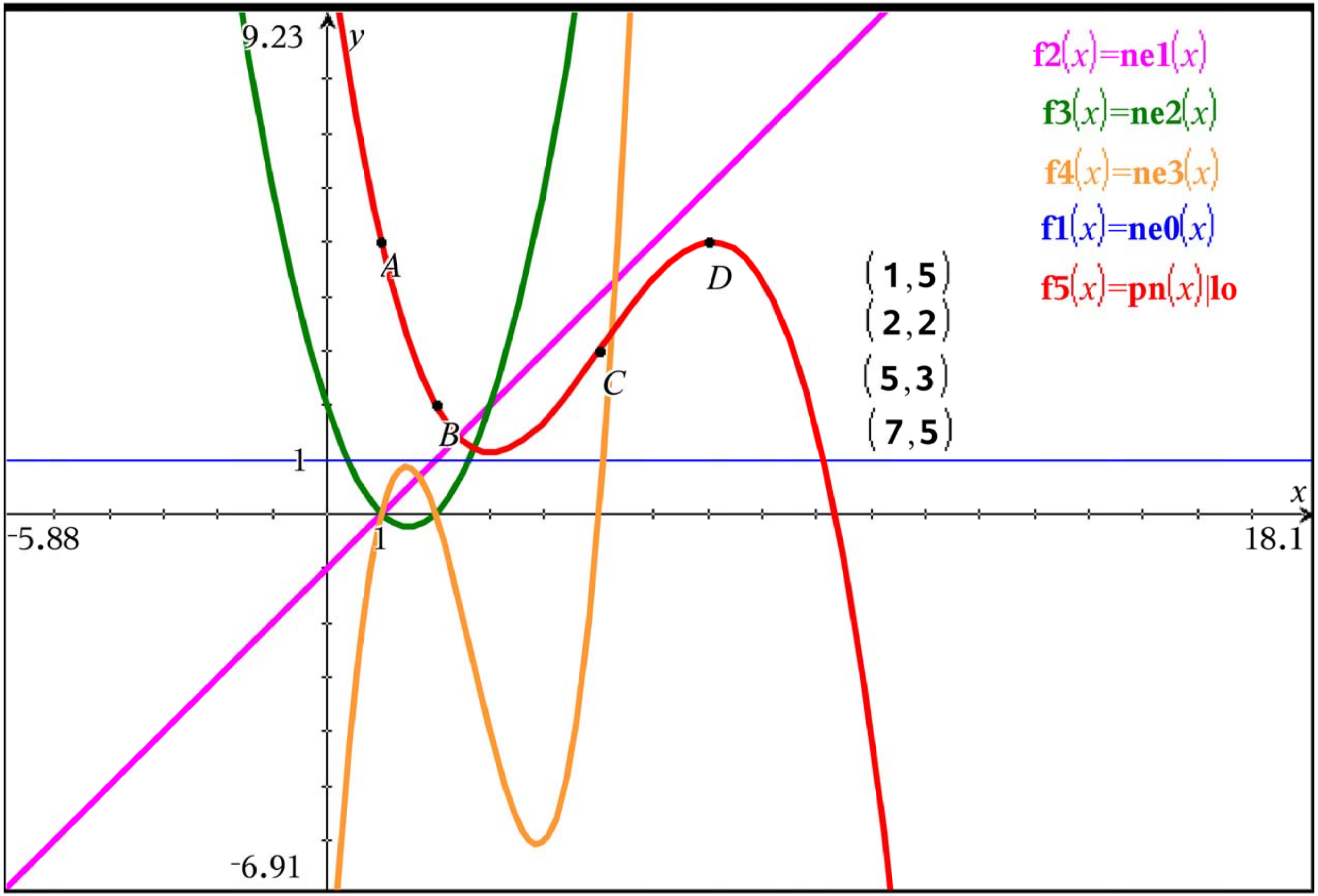
Dieses Gleichungssystem ist von oben aufgerollt von Hand einfach zu lösen.

Erst c1, dann c2, dann c3, dann c4. Hier geht es einfacher zusammen:

lo:=solve({**gla**,**glb**,**glc**,**gld**},{$c1,c2,c3,c4$}) ▸ $c1=5$ and $c2=^-3$ and $c3=\frac{5}{6}$ and $c4=\frac{^-7}{60}$

pn(x)|**lo** ▸ $\frac{^-7\cdot x^3}{60}+\frac{53\cdot x^2}{30}-\frac{449\cdot x}{60}+\frac{65}{6}$ **ist das gesuchte Interpolationspolynom**

1.3


9.23
y
f2(x)=ne1(x)
f3(x)=ne2(x)
f4(x)=ne3(x)
f1(x)=ne0(x)
f5(x)=pn(x)|lo
A
D
(1,5)
(2,2)
(5,3)
(7,5)
C
B
1
x
-5.88
1
18.1
-6.91

1.4

Lineare Unabhängigkeit der Newtonpolynome

$\text{solve}(\{\mathbf{pn}(1)=0,\mathbf{pn}(2)=0,\mathbf{pn}(5)=0,\mathbf{pn}(7)=0\},\{c1,c2,c3,c4\})$

▸ $c1=0$ and $c2=0$ and $c3=0$ and $c4=0$

erzwingt die triviale Lösung. das sieht man auch von Hand ganz schnell,

wenn mann die Klammerform der Definition betrachtet.

$\mathbf{pn}(1)=0$ ▸ $c1=0$

$\mathbf{pn}(2)=0$ ▸ $c1+c2=0$

$\mathbf{pn}(5)=0$ ▸ $c1+4\cdot c2+12\cdot c3=0$

$\mathbf{pn}(7)=0$ ▸ $c1+6\cdot c2+30\cdot c3+60\cdot c4=0$

1.5

Newton-Interpol-Spielwiese

Polynomräume **VPn Raum der Polynome bis zum n. Grad**

Prof Dr. Dörte Haftendorn 2012 Definition eines Pplynoms 3. Grades, das durch 4 frei ziehbare Punkte verläuft.

Newton–Interpolation

mgl. Ausgangssituation A=[1,5]; B=[2,2]; C=[5,3]; D=[7,5]

$\mathbf{apx}:=1 \blacktriangleright 1$ $\mathbf{bpx}:=2 \blacktriangleright 2$ $\mathbf{cpx}:=5 \blacktriangleright 5$ $\mathbf{dpx}:=7 \blacktriangleright 7$

$\mathbf{apy}:=5 \blacktriangleright 5$ $\mathbf{bpy}:=2 \blacktriangleright 2$ $\mathbf{cpy}:=3 \blacktriangleright 3$ $\mathbf{dpy}:=5 \blacktriangleright 5$

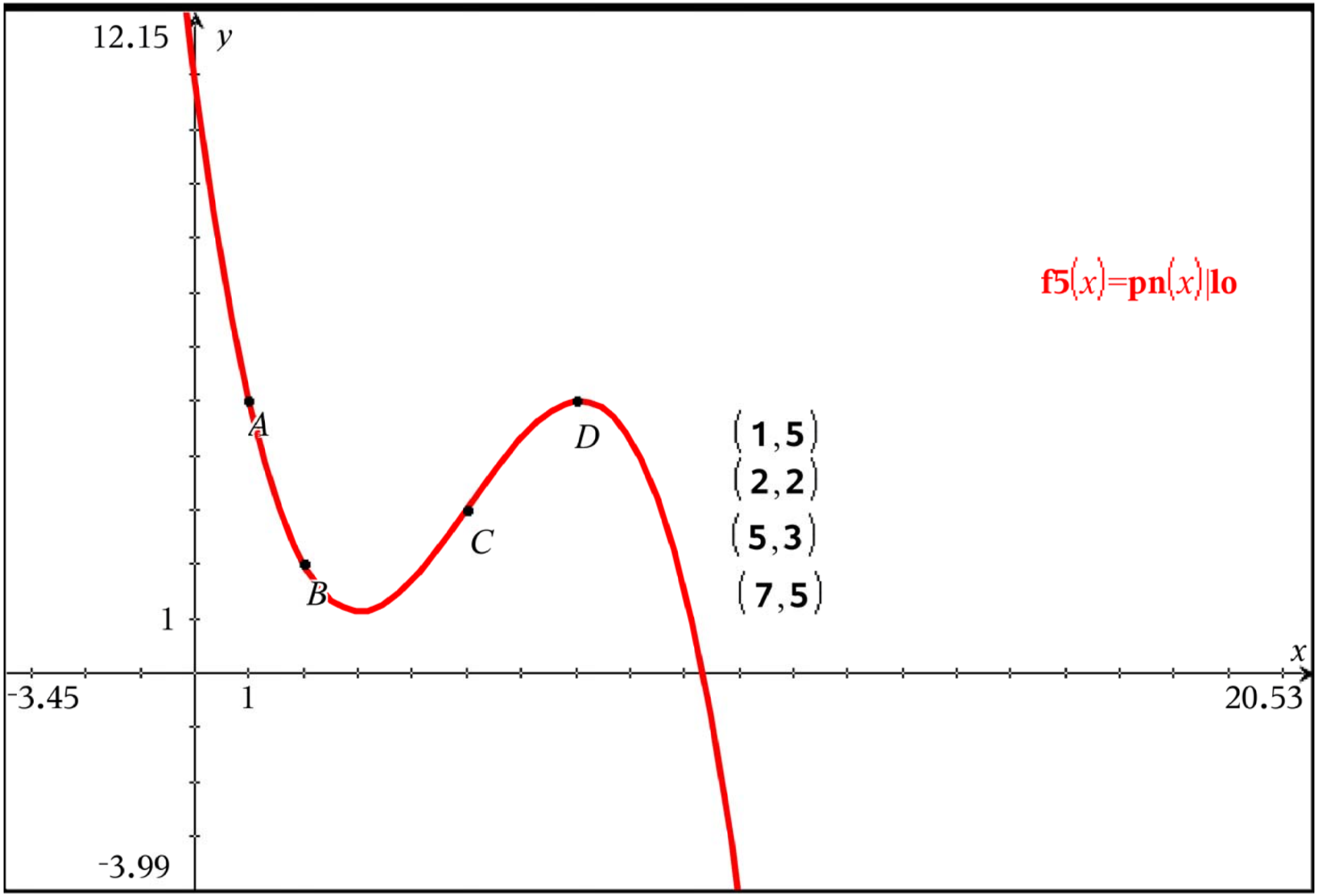
Das Handwerk zum Punktesetzen und "zugfest" machen ist auf Seite 2 des zweiten Problems der Lagrange–Interpolation beschrieben.

$\mathbf{ne0}(x):=1 \blacktriangleright \mathit{Fertig}$ $\mathbf{ne1}(x):=x-\mathbf{apx} \blacktriangleright \mathit{Fertig}$ $\mathbf{ne2}(x):=(x-\mathbf{apx})\cdot(x-\mathbf{bpx}) \blacktriangleright \mathit{Fertig}$

$\mathbf{ne3}(x):=(x-\mathbf{apx})\cdot(x-\mathbf{bpx})\cdot(x-\mathbf{cpx}) \blacktriangleright \mathit{Fertig}$

$\mathbf{pn}(x):=c1\cdot\mathbf{ne0}(x)+c2\cdot\mathbf{ne1}(x)+c3\cdot\mathbf{ne2}(x)+c4\cdot\mathbf{ne3}(x) \blacktriangleright \mathit{Fertig}$

2.1



2.2

Bedingungen

gla:=**pn**(**apx**)=**apy** ▸ $c1=5$ **glb**:=**pn**(**bpx**)=**bpy** ▸ $c1+c2=2$

glc:=**pn**(**cpx**)=**cpy** ▸ $c1+4\cdot c2+12\cdot c3=3$

gld:=**pn**(**dpx**)=**dpy** ▸ $c1+6\cdot c2+30\cdot c3+60\cdot c4=5$

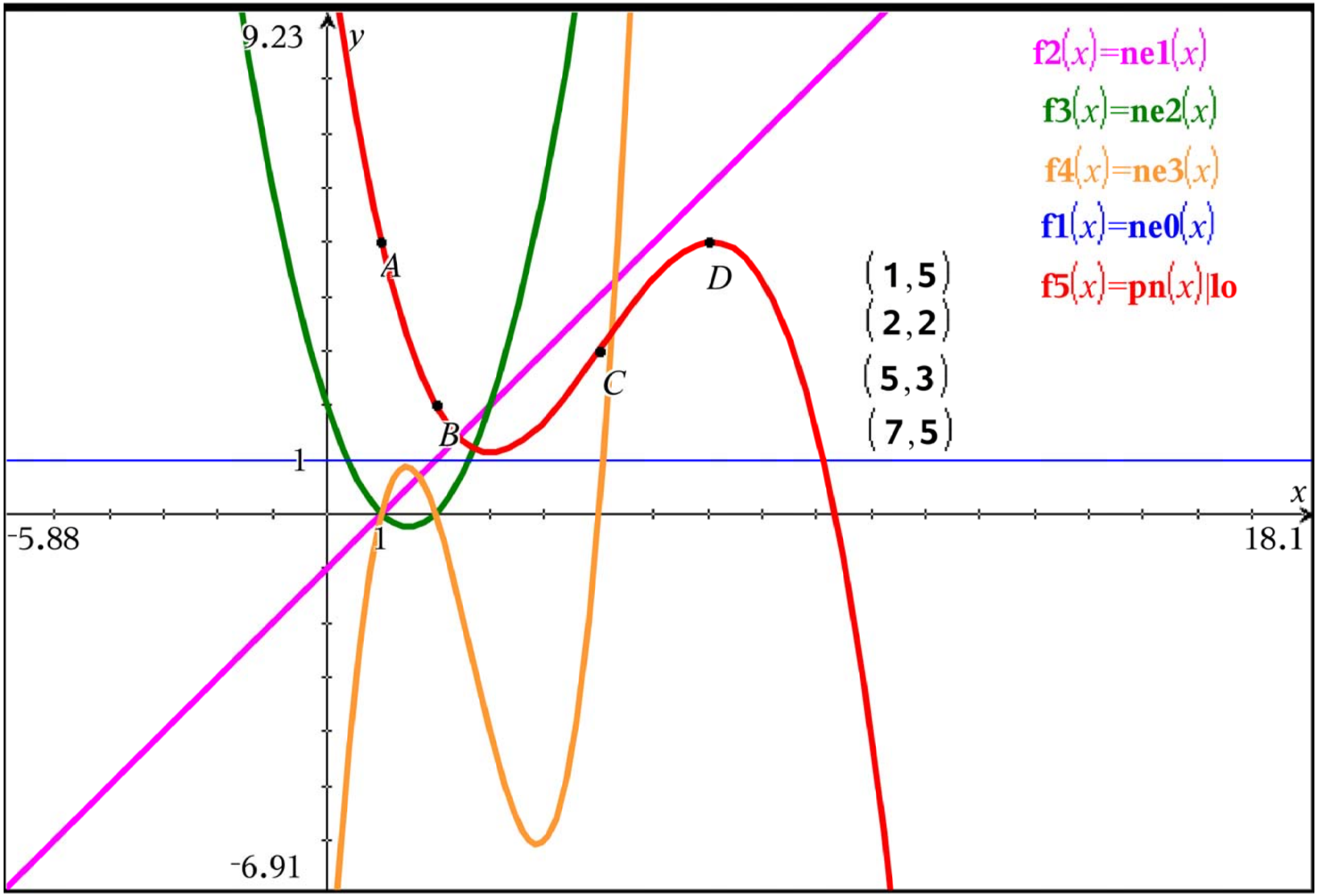
Dieses Gleichungssystem ist von oben aufgerollt von Hand einfach zu lösen.

Erst c1, dann c2, dann c3, dann c4. Hier geht es einfacher zusammen:

lo:=solve({**gla**,**glb**,**glc**,**gld**},{$c1,c2,c3,c4$}) ▸ $c1=5$ and $c2=^-3$ and $c3=\frac{5}{6}$ and $c4=\frac{^-7}{60}$

pn(x)|**lo** ▸ $\frac{^-7\cdot x^3}{60}+\frac{53\cdot x^2}{30}-\frac{449\cdot x}{60}+\frac{65}{6}$ **ist das gesuchte Interpolationspolynom**

2.3


9.23
y
x
-5.88
18.1
-6.91
1
1
A
B
C
D
(1,5)
(2,2)
(5,3)
(7,5)
f2(x)=ne1(x)
f3(x)=ne2(x)
f4(x)=ne3(x)
f1(x)=ne0(x)
f5(x)=pn(x)|lo

2.4