Newton-Interpolationspolynom

Polynomräume **VPn Raum der Polynome bis zum n. Grad**

Prof Dr. Dörte Haftendorn 2012 Definition eines Pplynoms 3. Grades, das durch 4 frei ziehbare Punkte verläuft.

Newton–Interpolation

mgl. Ausgangssituation A=[1,5]; B=[2,2]; C=[5,3]; D=[7,5]

apx:=1 ▸ 1 bpx:=2 ▸ 2 cpx:=5 ▸ 5 dpx:=7 ▸ 7

apy:=5 ▸ 5 bpy:=2 ▸ 2 cpy:=3 ▸ 3 dpy:=5 ▸ 5

Das Handwerk zum Punktesetzen und "zugfest" machen ist auf Seite 2 des zweiten Problems der Lagrange–Interpolation beschrieben.

ne0(x):=1 ▸ *Fertig* ne1(x):=x−apx ▸ *Fertig* ne2(x):=(x−apx)·(x−bpx) ▸ *Fertig*

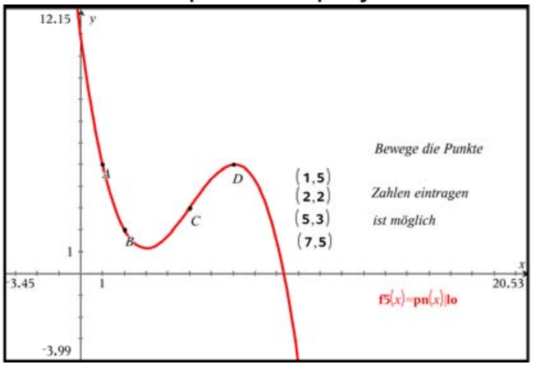
ne3(x):=(x−apx)·(x−bpx)·(x−cpx) ▸ *Fertig*

pn(x):=c1·ne0(x)+c2·ne1(x)+c3·ne2(x)+c4·ne3(x) ▸ *Fertig*

Das gesuchte Polynom muss eine Linearkombination der vier Newtonpolynome sein. (Deren lineare Unabhängigkeit siehe unten). Wenn ein Punkt dazu kommt, muss man nur ein weiteres Newtonpolynom hinzunehmen.

1.1

Newton-Interpolationspolynom



1.2

Newton-Interpolationspolynom

Bedingungen

gla:=pn(apx)=apy ▸ $c1=5$ glb:=pn(bpx)=bpy ▸ $c1+c2=2$

glc:=pn(cpx)=cpy ▸ $c1+4\cdot c2+12\cdot c3=3$

gld:=pn(dpx)=dpy ▸ $c1+6\cdot c2+30\cdot c3+60\cdot c4=5$

Dieses Gleichungssystem ist von oben aufgerollt von Hand einfach zu lösen.

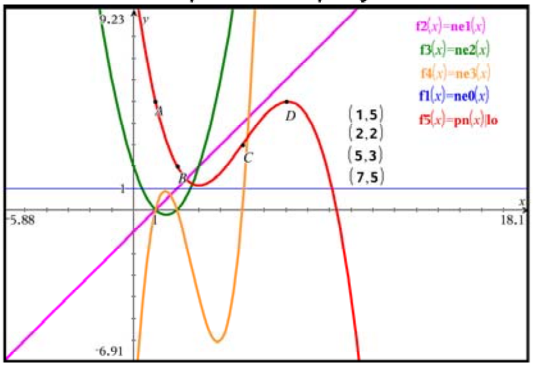
Erst c1, dann c2, dann c3, dann c4. Hier geht es einfacher zusammen:

lo:=solve({gla,glb,glc,gld},{c1,c2,c3,c4}) ▸ $c1=5$ and $c2=-3$ and $c3=\frac{5}{6}$ and $c4=\frac{-7}{60}$

pn(x)|lo ▸ $\frac{-7\cdot x^3}{60}+\frac{53\cdot x^2}{30}-\frac{449\cdot x}{60}+\frac{65}{6}$ **ist das gesuchte Interpolationspolynom**

1.3

Newton-Interpolationspolynom



1.4

Newton-Interpolationspolynom

Lineare Unabhängigkeit der Newtonpolynome

solve({pn(1)=0,pn(2)=0,pn(5)=0,pn(7)=0},{c1,c2,c3,c4})
▸ $c1=0$ and $c2=0$ and $c3=0$ and $c4=0$

erzwingt die triviale Lösung. das sieht man auch von Hand ganz schnell, wenn mann die Klammerform der Definition betrachtet.

pn(1)=0 ▸ $c1=0$

pn(2)=0 ▸ $c1+c2=0$

pn(5)=0 ▸ $c1+4\cdot c2+12\cdot c3=0$

pn(7)=0 ▸ $c1+6\cdot c2+30\cdot c3+60\cdot c4=0$

1.5

Newton-Interpol-Spielwiese

Polynomräume **VPn Raum der Polynome bis zum n. Grad**

Prof Dr. Dörte Haftendorn 2012 Definition eines Pplynoms 3. Grades, das durch 4 frei ziehbare Punkte verläuft.

Newton–Interpolation

mgl. Ausgangssituation A=[1,5]; B=[2,2]; C=[5,3]; D=[7,5]

apx:=1 ▸ 1 bpx:=2 ▸ 2 cpx:=5 ▸ 5 dpx:=7 ▸ 7

apy:=5 ▸ 5 bpy:=2 ▸ 2 cpy:=3 ▸ 3 dpy:=5 ▸ 5

Das Handwerk zum Punktesetzen und "zugfest" machen ist auf Seite 2 des zweiten Problems der Lagrange–Interpolation beschrieben.

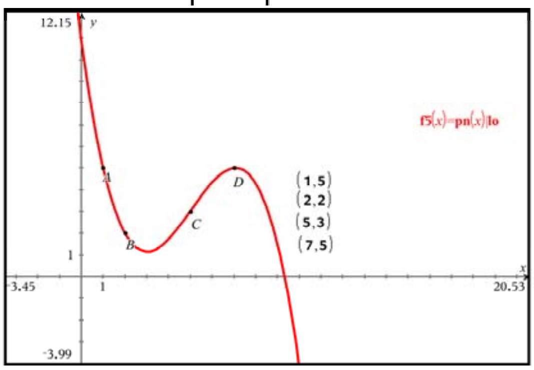
ne0(x):=1 ▸ *Fertig* ne1(x):=x−apx ▸ *Fertig* ne2(x):=(x−apx)·(x−bpx) ▸ *Fertig*

ne3(x):=(x−apx)·(x−bpx)·(x−cpx) ▸ *Fertig*

pn(x):=c1·ne0(x)+c2·ne1(x)+c3·ne2(x)+c4·ne3(x) ▸ *Fertig*

2.1

Newton-Interpol-Spielwiese



2.2

Newton-Interpol-Spielwiese

Bedingungen

gla:=pn(apx)=apy ▸ $c1=5$ glb:=pn(bpx)=bpy ▸ $c1+c2=2$

glc:=pn(cpx)=cpy ▸ $c1+4\cdot c2+12\cdot c3=3$

gld:=pn(dpx)=dpy ▸ $c1+6\cdot c2+30\cdot c3+60\cdot c4=5$

Dieses Gleichungssystem ist von oben aufgerollt von Hand einfach zu lösen.

Erst c1, dann c2, dann c3, dann c4. Hier geht es einfacher zusammen:

lo:=solve({gla,glb,glc,gld},{c1,c2,c3,c4}) ▸ $c1=5$ and $c2=-3$ and $c3=\frac{5}{6}$ and $c4=\frac{-7}{60}$

pn(x)|lo ▸ $\frac{-7\cdot x^3}{60}+\frac{53\cdot x^2}{30}-\frac{449\cdot x}{60}+\frac{65}{6}$ **ist das gesuchte Interpolationspolynom**

2.3