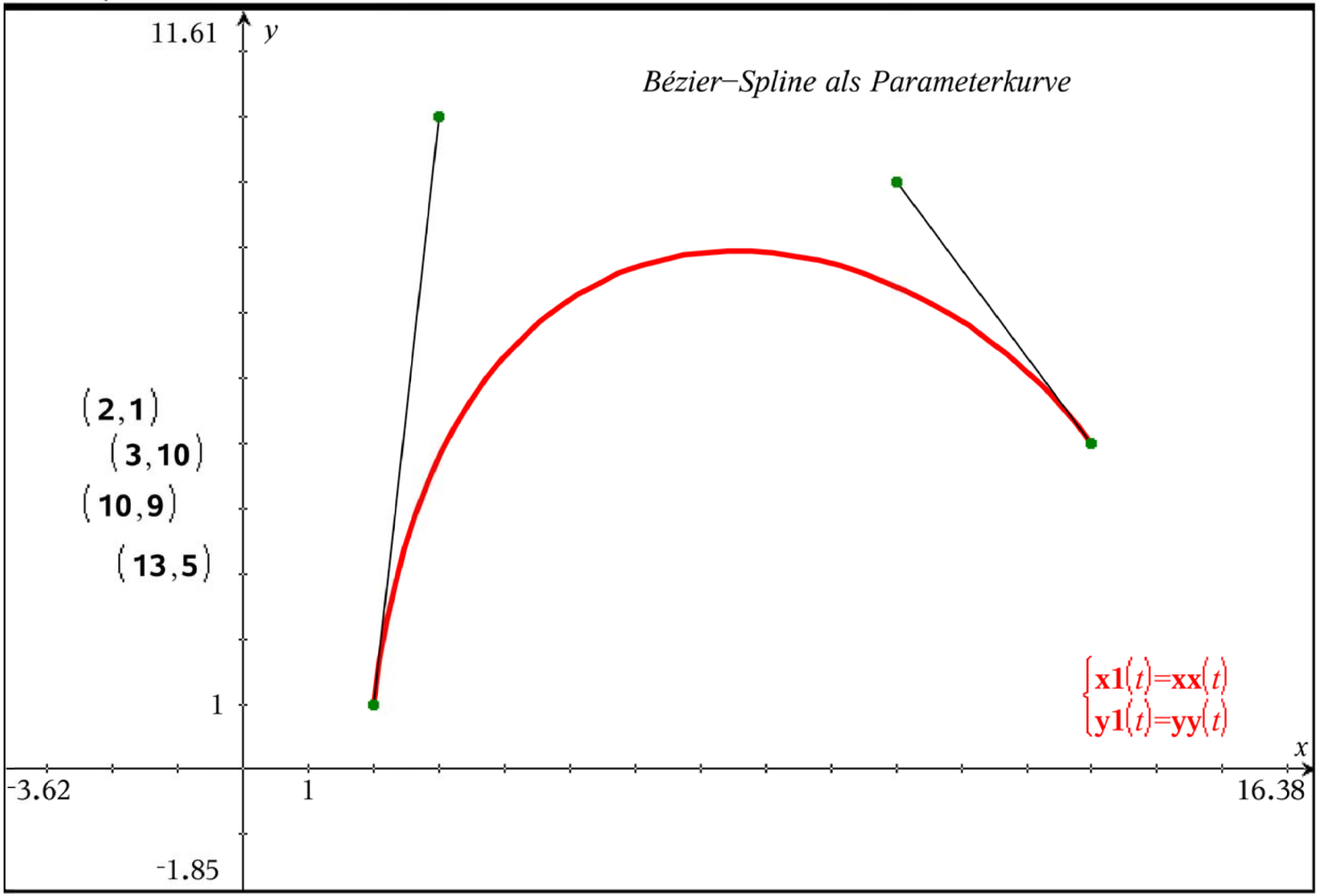
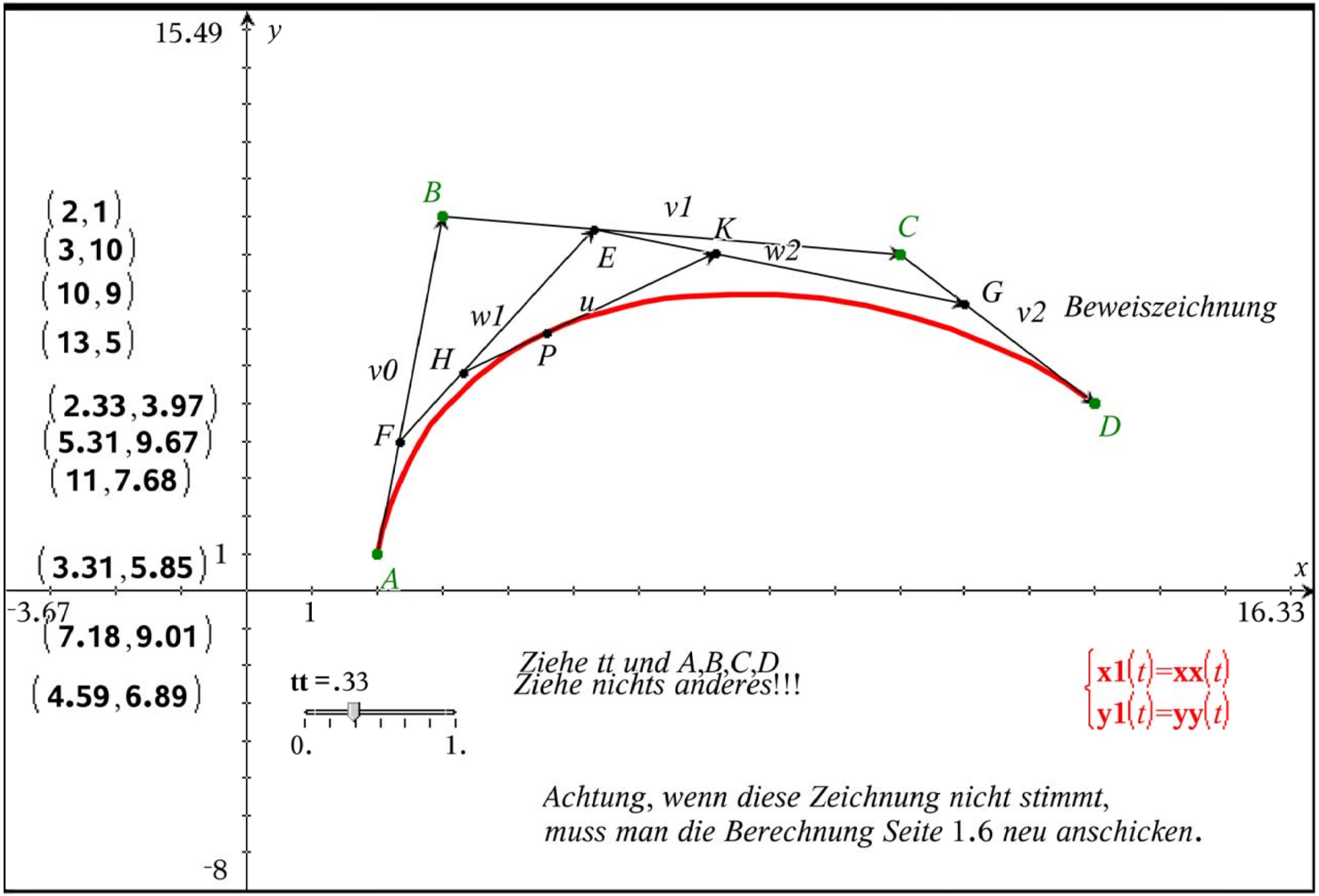
Bezier-Spline mit Beweis



1.1


15.49
y
(2,1)
(3,10)
(10,9)
(13,5)
(2.33,3.97)
(5.31,9.67)
(11,7.68)
(3.31,5.85)
(7.18,9.01)
(4.59,6.89)
B
C
D
A
E
F
G
H
K
P
v0
v1
v2
w1
w2
u
Beweiszeichnung
x
-3.67
1
16.33
-8
tt =.33
0.
1.
Ziehe tt und A,B,C,D
Ziehe nichts anderes!!!
x1(t)=xx(t)
y1(t)=yy(t)
Achtung, wenn diese Zeichnung nicht stimmt,
muss man die Berechnung Seite 1.6 neu anschicken.

1.2

Bézier−Spline ,vektorielle Konstruktion: 4 Steuerpunkte ***a,b,c,d*** Ha 2013

$\mathbf{v0}:=b-a \blacktriangleright b-a$ $\mathbf{v1}:=c-b \blacktriangleright c-b$ $\mathbf{v2}:=d-c \blacktriangleright d-c$ Drei Vektoren außen

drei Punkte f, e g auf den t−Teilungsstellen

$\mathbf{f}:=a+t\cdot \mathbf{v0} \blacktriangleright (b-a)\cdot t+a$ $\mathbf{e}:=b+t\cdot \mathbf{v1} \blacktriangleright (c-b)\cdot t+b$ $\mathbf{g}:=c+t\cdot \mathbf{v2} \blacktriangleright (d-c)\cdot t+c$

$\mathbf{w0}:=\mathbf{e}-\mathbf{f} \blacktriangleright (a-2\cdot b+c)\cdot t-a+b$ $\mathbf{w1}:=\mathbf{g}-\mathbf{e} \blacktriangleright (b-2\cdot c+d)\cdot t-b+c$ dann zwei Vektoren

zwei Punkte k und h auf den t−Teilungsstellen

$\mathbf{h}:=\mathbf{f}+t\cdot \mathbf{w0} \blacktriangleright (a-2\cdot b+c)\cdot t^2-2\cdot (a-b)\cdot t+a$ $\mathbf{k}:=\mathbf{e}+t\cdot \mathbf{w1} \blacktriangleright (b-2\cdot c+d)\cdot t^2-2\cdot (b-c)\cdot t+b$

$\mathbf{u}:=\mathbf{k}-\mathbf{h} \blacktriangleright (-a+3\cdot b-3\cdot c+d)\cdot t^2+(2\cdot a-4\cdot b+2\cdot c)\cdot t-a+b$ dann ein letzter Vektor

ein Punkt p auf der t−Teilungsstelle

$\mathbf{p}:=\mathbf{h}+t\cdot \mathbf{u} \blacktriangleright -(a-3\cdot b+3\cdot c-d)\cdot t^3+3\cdot (a-2\cdot b+c)\cdot t^2-3\cdot (a-b)\cdot t+a$

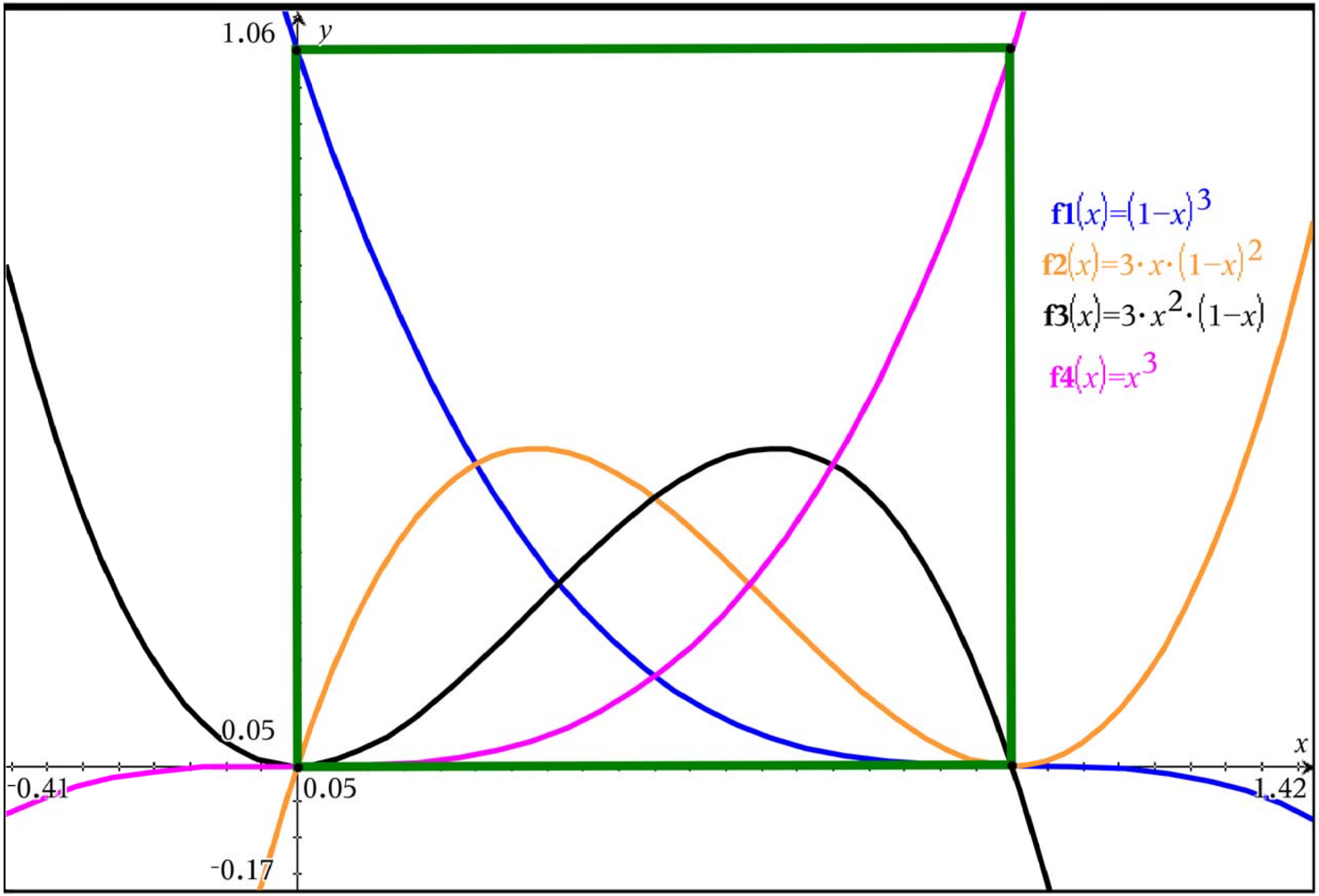
$\mathbf{bern0}(t):=\text{factor}(\mathbf{p}|a=1 \text{ and } b=0 \text{ and } c=0 \text{ and } d=0) \blacktriangleright$ *Fertig* $\mathbf{bern0}(t) \blacktriangleright -(t-1)^3$

$\mathbf{bern1}(t):=\text{factor}(\mathbf{p}|a=0 \text{ and } b=1 \text{ and } c=0 \text{ and } d=0) \blacktriangleright$ *Fertig* $\mathbf{bern1}(t) \blacktriangleright 3\cdot t\cdot (t-1)^2$

$\mathbf{bern2}(t):=\text{factor}(\mathbf{p}|a=0 \text{ and } b=0 \text{ and } c=1 \text{ and } d=0) \blacktriangleright$ *Fertig* $\mathbf{bern2}(t) \blacktriangleright -3\cdot t^2\cdot (t-1)$

$\mathbf{bern3}(t):=\text{factor}(\mathbf{p}|a=0 \text{ and } b=0 \text{ and } c=0 \text{ and } d=1) \blacktriangleright$ *Fertig* $\mathbf{bern3}(t) \blacktriangleright t^3$

1.3


1.06
y
$f1(x)=(1-x)^3$
$f2(x)=3\cdot x\cdot(1-x)^2$
$f3(x)=3\cdot x^2\cdot(1-x)$
$f4(x)=x^3$
0.05
x
-0.41
0.05
1.42
-0.17

1.4

ax:=2 ▸ 2 **bx**:=3 ▸ 3 **cx**:=10 ▸ 10 **dx**:=13 ▸ 13

ay:=1 ▸ 1 **by** ▸ 10 **cy** ▸ 9 **dy** ▸ 5

Der Bezier Spline hat eine einfache Parameterdarstellung:

Die Koordinaten (abhängg von von t) sind Linearkombinationen der Bernsteinpolynome (abhängig von t).

Dabei ergeben sich die Koeffizienten direkt aus den Koordinaten der Steuerpunkte.

xx(t):=**ax**· **bern0**(t)+**bx**· **bern1**(t)+**cx**· **bern2**(t)+**dx**· **bern3**(t) ▸ *Fertig*

yy(t):=**ay**· **bern0**(t)+**by**· **bern1**(t)+**cy**· **bern2**(t)+**dy**· **bern3**(t) ▸ *Fertig*

xx(t) ▸ $^-10\cdot t^3+18\cdot t^2+3\cdot t+2$

yy(t) ▸ $7\cdot t^3-30\cdot t^2+27\cdot t+1$

1.5

Diese Definietionen sind nötig, um das Beweisbild interaktiv zu gestalten.

$fx:=ax+tt\cdot(bx-ax)$ ▸ 2.33 $ex:=bx+tt\cdot(cx-bx)$ ▸ 5.31

$fy:=ay+tt\cdot(by-ay)$ ▸ 3.97 $ey:=by+tt\cdot(cy-by)$ ▸ 9.67

$gx:=cx+tt\cdot(dx-cx)$ ▸ 10.99

$gy:=cy+tt\cdot(dy-cy)$ ▸ 7.68

$hx:=fx+tt\cdot(ex-fx)$ ▸ 3.3134 $kx:=ex+tt\cdot(gx-ex)$ ▸ 7.1844

$hy:=fy+tt\cdot(ey-fy)$ ▸ 5.851 $ky:=ey+tt\cdot(gy-ey)$ ▸ 9.0133

$px:=hx+tt\cdot(kx-hx)$ ▸ 4.59083

$py:=hy+tt\cdot(ky-hy)$ ▸ 6.89456

1.6

Lineare Unabhängigkeit

$\mathbf{lk}:=s0\cdot \mathbf{bern0}(t)+s1\cdot \mathbf{bern1}(t)+s2\cdot \mathbf{bern2}(t)+s3\cdot \mathbf{bern3}(t)$

$\blacktriangleright\ (-s0+3\cdot s1-3\cdot s2+s3)\cdot t^3+3\cdot (s0-2\cdot s1+s2)\cdot t^2-3\cdot (s0-s1)\cdot t+s0$

$\mathbf{lk}|t=0\ \blacktriangleright\ s0$

$\mathbf{lk}|t=1\ \blacktriangleright\ s3$

$\mathbf{lk}|t=\frac{1}{3}\ \blacktriangleright\ \frac{8\cdot s0}{27}+\frac{4\cdot s1}{9}+\frac{6\cdot s2+s3}{27}$

$\mathbf{lk}|t=\frac{2}{3}\ \blacktriangleright\ \frac{s0}{27}+\frac{2\cdot s1}{9}+\frac{4\cdot (3\cdot s2+2\cdot s3)}{27}$

$\mathbf{gls}:=\left\{0=\mathbf{lk}|t=0,0=\mathbf{lk}|t=1,0=\mathbf{lk}|t=\frac{1}{3},0=\mathbf{lk}|t=\frac{2}{3}\right\}$

$\blacktriangleright\ \left\{0=s0,0=s3,0=\frac{8\cdot s0}{27}+\frac{4\cdot s1}{9}+\frac{6\cdot s2+s3}{27},0=\frac{s0}{27}+\frac{2\cdot s1}{9}+\frac{4\cdot (3\cdot s2+2\cdot s3)}{27}\right\}$

$\text{solve}(\mathbf{gls},\{s0,s1,s2,s3\})\ \blacktriangleright\ s0=0 \text{ and } s1=0 \text{ and } s2=0 \text{ and } s3=0$

Nach Sicht sofort $4\ s1+2\ s2=0$ und 2 s1+4 s2=0 !!!!!!!!!!!!

1.7

Sonderfall: Wenn die vier Stützstellen in gleichen Abstand liegen, gilt:

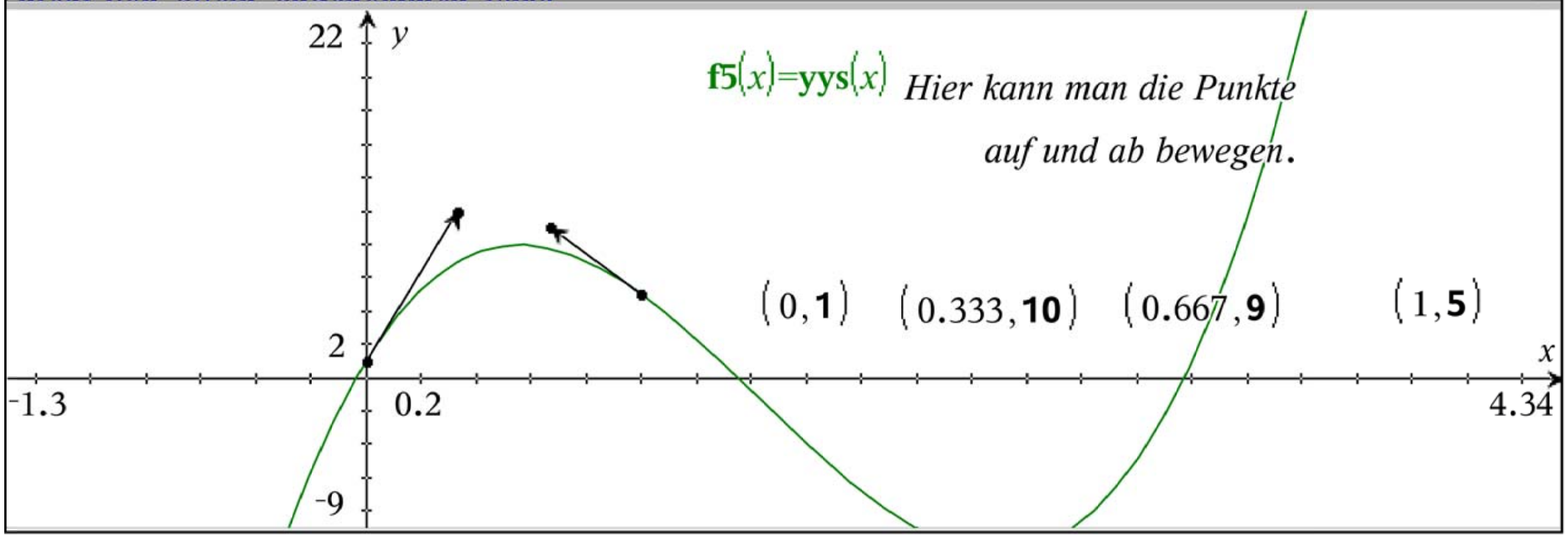
$\mathbf{axs}:=0$ ▸ 0 $\mathbf{bxs}:=\frac{1}{3}$ ▸ $\frac{1}{3}$ $cxs:=2/3$ ▸ $\frac{2}{3}$ $dxs:=1$ ▸ 1

$\mathbf{xxs}(t):=\mathbf{axs}\cdot\mathbf{bern0}(t)+\mathbf{bxs}\cdot\mathbf{bern1}(t)+\mathbf{cxs}\cdot\mathbf{bern2}(t)+\mathbf{dxs}\cdot\mathbf{bern3}(t)$ ▸ *Fertig*

$\mathbf{xxs}(t)$ ▸ t

Dann ist es also eine triviale Parameterdarstellung in dem Sinne, dass yys als Funktion von x geschrieben werden kann:

$\mathbf{yys}(x):=\mathbf{ay}\cdot\mathbf{bern0}(x)+\mathbf{by}\cdot\mathbf{bern1}(x)+\mathbf{cy}\cdot\mathbf{bern2}(x)+\mathbf{dy}\cdot\mathbf{bern3}(x)|t=x$ ▸ *Fertig* *(Merkwürdig, dass x*



1.8