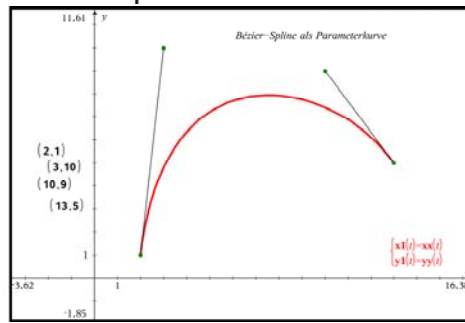
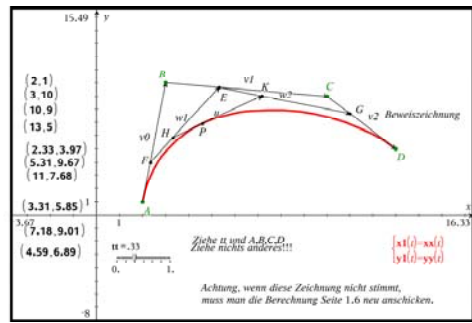


Bezier-Spline mit Beweis



1.1



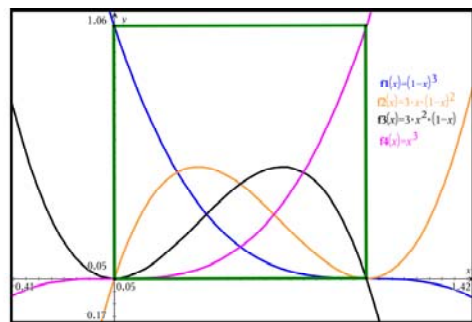
1.2

**Bezier-Spline, vektorielle Konstruktion: 4 Steuerpunkte a,b,c,d**

2013 Ha

$v_0 = b-a$ ,  $v_1 = c-b$ ,  $v_2 = d-c$ . Drei Vektoren außen  
 drei Punkte  $f, e, g$  auf den  $t$ -Teilungstellen  
 $f = a + t \cdot v_0$ ,  $(b-a) + t \cdot v_1$ ,  $(c-b) + t \cdot v_2$ ,  $g = c + t \cdot v_2$ ,  $(d-c) + t \cdot v_2$   
 $w_0 = e - f = (a-2b+c) \cdot t + a - b$ ,  $w_1 = g - e = (b-2c+d) \cdot t - b + c$  dann zwei Vektoren  
 zwei Punkte  $k$  und  $h$  auf den  $t$ -Teilungstellen  
 $h = f + t \cdot w_0 = (a-2b+c) \cdot t^2 - 2(a-b) \cdot t + a$ ,  $k = e + t \cdot w_1 = (b-2c+d) \cdot t^2 - 2(b-c) \cdot t + b$   
 $u = k - h = (a+3b-3c+d) \cdot t^2 + (2a-4b+2c) \cdot t - a + b$  dann ein letzter Vektor  
 ein Punkt  $p$  auf der  $t$ -Teilungsstelle  
 $p = h + t \cdot u = (a-3b+3c-d) \cdot t^3 + 3(a-2b+c) \cdot t^2 - 3(a-b) \cdot t + a$   
 $bern0(t) = \text{factor}(p(a-1 \text{ and } b=0 \text{ and } c=0 \text{ and } d=0)) \cdot \text{Fertig}$   $bern0(t) = (t-1)^3$   
 $bern1(t) = \text{factor}(p(a=0 \text{ and } b=1 \text{ and } c=0 \text{ and } d=0)) \cdot \text{Fertig}$   $bern1(t) = 3 \cdot t \cdot (t-1)^2$   
 $bern2(t) = \text{factor}(p(a=0 \text{ and } b=0 \text{ and } c=1 \text{ and } d=0)) \cdot \text{Fertig}$   $bern2(t) = 3 \cdot t^2 \cdot (t-1)$   
 $bern3(t) = \text{factor}(p(a=0 \text{ and } b=0 \text{ and } c=0 \text{ and } d=1)) \cdot \text{Fertig}$   $bern3(t) = t^3$

1.3



1.4

$ax=2 \cdot t^2$ ,  $bx=3 \cdot t^3$ ,  $cx=10 \cdot t^4$ ,  $dx=13 \cdot t^5$   
 $ay=1 \cdot t$ ,  $by=10 \cdot t^2$ ,  $cy=9 \cdot t^3$ ,  $dy=5$

Der Bezier Spline hat eine einfache Parameterdarstellung:  
 Die Koordinaten (abhängig von  $t$ ) sind Linearkombinationen der Bernsteinpolynome (abhängig von  $t$ ).  
 Dabei ergeben sich die Koeffizienten direkt aus den Koordinaten der Steuerpunkte.

$xx(t) = ax \cdot bern0(t) + bx \cdot bern1(t) + cx \cdot bern2(t) + dx \cdot bern3(t)$  • Fertig  
 $yy(t) = ay \cdot bern0(t) + by \cdot bern1(t) + cy \cdot bern2(t) + dy \cdot bern3(t)$  • Fertig  
 $xx(t) = 10 \cdot t^3 + 18 \cdot t^2 + 3 \cdot t + 2$   
 $yy(t) = 7 \cdot t^3 - 30 \cdot t^2 + 27 \cdot t + 1$

1.5

Diese Definitionen sind nötig, um das Beweisbild interaktiv zu gestalten.

$fx = ax + t \cdot (bx - ax) = 2.33$ ,  $ex = bx + t \cdot (cx - bx) = 5.31$   
 $fy = ay + t \cdot (by - ay) = 3.97$ ,  $ey = by + t \cdot (cy - by) = 9.67$   
 $gx = cx + t \cdot (dx - cx) = 10.99$   
 $gy = cy + t \cdot (dy - cy) = 7.68$   
 $hx = fx + t \cdot (ex - fx) = 3.3134$ ,  $kx = ex + t \cdot (gx - ex) = 7.1644$   
 $hy = fy + t \cdot (ey - fy) = 5.851$ ,  $ky = ey + t \cdot (gy - ey) = 9.0133$   
 $px = hx + t \cdot (kx - hx) = 4.59083$   
 $py = hy + t \cdot (ky - hy) = 6.89456$

1.6

**Lineare Unabhängigkeit**

$tk = s_0 \cdot bern0(t) + s_1 \cdot bern1(t) + s_2 \cdot bern2(t) + s_3 \cdot bern3(t)$   
 $(s_0 - 3 \cdot s_1 - 3 \cdot s_2 + s_3) \cdot t^3 + 3 \cdot (s_0 - 2 \cdot s_1 + s_2) \cdot t^2 - 3 \cdot (s_0 - s_1) \cdot t + s_0$   
 $tk_0 = 0$ ,  $s_0$   
 $tk_1 = 1$ ,  $s_3$   
 $tk_2 = \frac{1}{3}$ ,  $\frac{8 \cdot s_0}{27} - \frac{4 \cdot s_1}{9} + \frac{6 \cdot s_2 + s_3}{27}$   
 $tk_3 = \frac{2}{3}$ ,  $\frac{s_0}{27} - \frac{2 \cdot s_1}{9} + \frac{4 \cdot (3 \cdot s_2 + 2 \cdot s_3)}{27}$   
 $gls = \begin{pmatrix} 0 & -tk_1 & 0 & 0 & -tk_2 & 1 & 0 & -tk_3 & \frac{2}{3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$   
 $\text{solve}(gls, [s_0, s_1, s_2, s_3])$ ,  $s_0=0$  and  $s_1=0$  and  $s_2=0$  and  $s_3=0$   
 Nach Sicht sofort  $4 \cdot s_1 + 2 \cdot s_2 = 0$  und  $2 \cdot s_1 + 4 \cdot s_2 = 0$  !!!!!!!!!!!!!

1.7

**Sonderfall: Wenn die vier Stützstellen in gleichen Abstand liegen, gilt:**

$axs=0 \cdot t$ ,  $bxs=\frac{1}{3} - \frac{1}{3}$ ,  $cx=-2/3$ ,  $dx=-1 \cdot t$   
 $xxs(t) = axs \cdot bern0(t) + bxs \cdot bern1(t) + cxs \cdot bern2(t) + dxs \cdot bern3(t)$  • Fertig  
 $xxs(t) = t$   
 Dann ist es also eine triviale Parameterdarstellung in dem Sinne, dass  $yy$  als Funktion von  $x$  geschrieben werden kann:  
 $yyx(x) = ay \cdot bern0(x) + by \cdot bern1(x) + cy \cdot bern2(x) + dy \cdot bern3(x) = yx$  • Fertig (Merkwürdig, dass  $x$ )

1.8