Dörte HAFTENDORN, Lüneburg

Algebraische Kurven von der 8. Klasse bis zum 8. Semester

Hantierungen mit Seilen, Stangen, Lichtstahlen u.s.w. werden in Konstruktionen mit Zirkel und Lineal umgesetzt und dann im DGS realisiert. Die Variation der geometrischen Parameter führt zu Kurvenfamilien, deren Betrachtung und Beschreibung mathematische Fähigkeiten fördert. Ältere Lernende können zugehörige Gleichungen herleiten, doch prüfen können auch die Achtklässler durch Überlegungen und durch Eingabe in ein CAS, das implizit gegebene Kurven zeichnet. So ist es nur noch ein kleiner Schritt zu der Erkenntnis, dass Gleichungen und ihre Umformungen dasselbe Bild ergeben müssen. In der Lehrerausbildung kann dann der Bogen geschlagen werden zu Schnitten räumlicher Gebilde, deren Betrachtung (mit CAS oder 3D-Graphenzeichnern) dann ihrerseits eine Familie algebraischer Kurven beschreiben und klassifizieren hilft.

Vorbemerkungen, Anlass, Ziele

Die hier skizzierte Unterrichtseinheit ist in zwei 8. Gymnasialklassen durchgeführt, mit Erweiterungen im Leistungskurs Mathematik und mit zusätzlichen Schwerpunkten im Lehramtsstudiengang SekI/II als fachwissenschaftlicher Beitrag zur “Analytischen Geometrie” mehrfach eingesetzt worden.

Anlass war einerseits die unbestritten unzureichende Beherrschung von Term- und Gleichungsumformungen in allen auf Klasse 8 folgenden Schuljahren, andererseits die Beobachtung, dass in Klasse 8 der “Ausstieg aus der Mathematik” stattfindet. Danach ist ein viel zu großer Anteil der Lernenden -insbesondere der Mädchen- in Mathematik höchstens noch das Allernötigste zu leisten bereit.

Ziel war, durch Unterstützung von Verstehen und Kreativität, durch Handlungsorientierung, Selbststeuerung, Lebensbezug und Freude an ästhetischen Kurven den Heranwachsenden einen Einbau von Mathematik in ihr Selbstkonzept zu ermöglichen. Neben der Verbesserung der algebraischen Kompetenzen kann auch eine Erweiterung des Funktionsverständnisses[1] erhofft werden.

Die Lehramt-Studierenden sollen selbst Erfahrungen mit dieser Art des Lernens sammeln, damit sich Unterricht überhaupt wandeln kann. Inhaltlich muss eine entsprechende Vorlesung reichhaltig sein und auch mathematisch-handwerkliche Kompetenzen im Herleiten und Beweisen vermitteln. Dies kann hier nur angedeutet werden.

[1] Die “Eindeutigkeit der Lage von P in Abhängigkeit von Q” ist hier gemeint.

Darstellung der Grundidee am Beispiel der Konchoiden

Wandert Q auf einer Kurve C und liegt P in festem Abstand k von Q auf der Geraden durch Q und einen festen Punkt B, so heißt die Ortslinie von P "Konchoide". Diese allgemeine Definition wird den Lernenden zu Anfang nicht genannt, sondern spezialisiert in folgendes Bild gekleidet: Herrchen wandert auf einer geraden Straße und sein Hund Pluto zerrt an der Leine stets direkt auf seinen Lieblingsbaum zu, der etwas abseits der Straße steht. Der Weg von P wird "Hundekurve" genannt. Dieses wird mit Personen in Szene gesetzt. Nach ersten Beschreibungen wird die Situation an der Tafel geometrisch realisiert und die Kurve in den Schülerheften punktweise erzeugt. Dann erst wird der geometrische Zusammenhang in einem DGS konstruiert. Die Leinenlänge ist ein wesentlicher Parameter, sie muss daher mit variierbarer Strecke oder als "Zahlobjekt" (=Schieberegler) realisiert werden, um dann als Radius für einen Kreis um Q verwendet zu werden. Der Vorteil dieser Vorgehensweise ist, dass sich nun durch stetige Variation der Leinenlänge auch die Ortskurve stetig ändert und so alle Konchoidenformen interaktiv erzeugt werden können.[2]

Auf verschiedene Art kann noch entdeckt werden, dass die Hundekurve einen zweiten Ast hat, die Bahn des furchtsamen Fiffi.

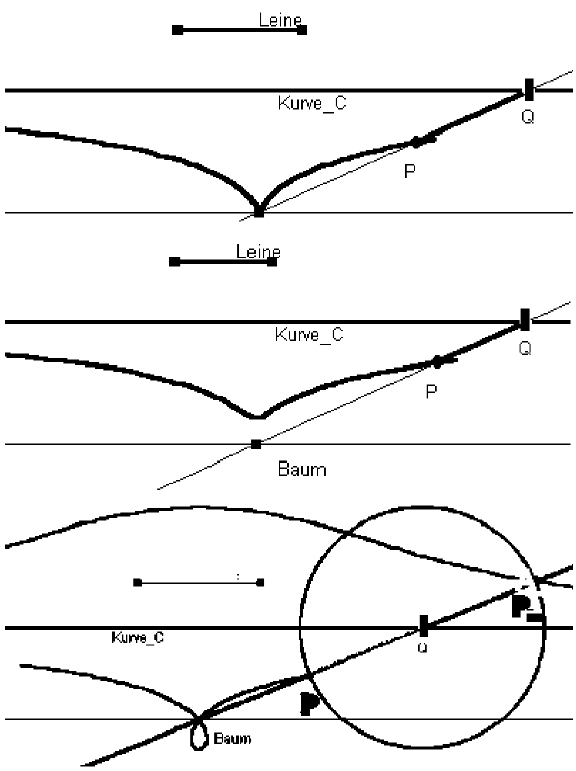

Abbildung 1

Ob man nun erst noch weitere Ortskurven erzeugt, wie weitere Konchoiden oder die Gärtnerellipse, oder sofort ein Koordinatensytem einführt, richtet sich nach der unterrichtlichen Situation.

Jedenfalls gehört zu diesen Geraden-Konchoiden die kartesische Gleichung

$$(x^2 + y^2)(y - a)^2 = k^2 y^2$$

mit dem Abstand Straße-Baum a und der Leinenlänge k.

[2] Die suggestive Kraft dieser Dynamisierung lässt sich im Druck nur schwer erahnen.

Zusammenhang zwischen Kurven und Gleichungen

Die Punkte (-1/4); (0/3); (1;2); (2/1) auf der Geraden rechts oben legen nahe $x + y = 3$ zu schreiben. Die Beschäftigung mit entsprechenden Darstellungen gipfelt in den Merksätzen:

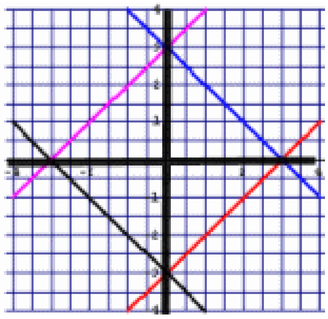

Abbildung 2

1) Genau die Punkte, die aus der Kurvengleichung eine **wahre Aussage** machen, liegen auf der Kurve.

2) Eine Gleichung, mit der ein sicher auf der Kurve liegender Punkt eine **falsche Aussage** erzeugt, ist sicher nicht die Kurvengleichung.

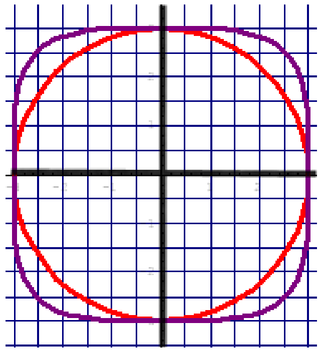

Abbildung 3

$x^4 + y^4 = 3^4$ beschreibt das "Rundecken-quadrat", es kann wie alle impliziten Gleichungen direkt mit Derive dargestellt werden. $(x^2 + y^2)^2 = 3^4$ wird als missglückter Term-umformungsversuch durch den davon verschiedenen Graphen entlarvt. Weitere Experimente dieser Art gipfeln in den Merksätzen:

3) Wenn zu einer umgeformten Gleichung eine **andere** Kurve erscheint, war die **Umformung sicher falsch**.

4) Erscheint dieselbe Kurve, **kann** die Umformung **richtig sein**, es kann aber auch so sein, dass der Fehler so klein, oder so geartet ist, dass man ihn am Bildschirm nicht sieht.

Dieses Rüstzeug sollte gemeinsam mit oder nach geometrischen Erzeugungen von Kurven erarbeitet werden, jedenfalls nicht vorweg. Denn m. E. müssen die Kurven zuerst mit Prozessen verbunden werden. Nun kann einer Galerie von Bildern eine Galerie von Gleichungen zugeordnet werden, Vorschläge siehe [Ha]. Die Schüler können Termumformungen prüfen. Dazu können entweder aus den Termen Gleichungen für das 2D-Fenster gemacht oder Terme direkt im 3D-Fenster dargestellt werden. Enthalten die Terme oder Gleichungen mehr als zwei Variablen, kann man in Derive 6 Schieberegler einfügen und alle, bis auf zwei, zu steuerbaren Parametern machen. Besonders günstig ist, dass hier der Erfindungsgabe der Schüler keine Grenzen gesetzt werden müssen. Sie probieren z.B. $x^9 + y^8 = 99$ und sind stolz, die Gleichung einer Fernsehröhre entdeckt zu haben. Im weiteren Verlauf kann man auch Kurven in Partnerarbeit oder mit dem Konzept "Lernen an Stationen" erkunden lassen.

Passende Prüfungsaufgaben

Um punktweise Erzeugung von Ortskurven möglich zu machen, schlage ich “Raster-Konstruktionen” vor. Bei Abbildung 4 sollen Q und P den gleichen Abstand von der Mittellinie haben. Es entsteht die Kissoide. Studierende sollten kartesische Gleichung und Polargleichung aufstellen können, Achtklässler müssen die richtige Gleichung aus drei vorgeschlagenen begründet auswählen und Ähnliches.

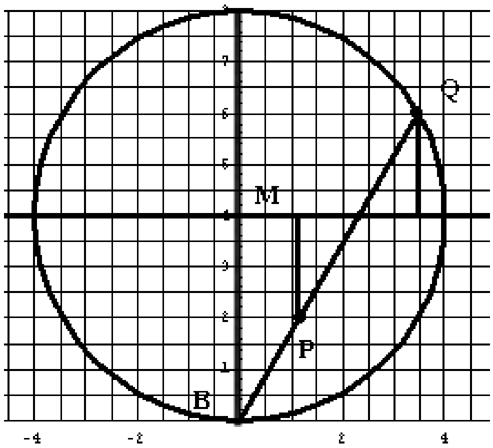

Abbildung 4

Abbildung 5 bezieht sich auf die gemeinsame Leitgeradenkonstruktion der Kegelschnitte und erfordert passendes Abzählen. Kegelschnitte sind auch wegen ihrer Allgegenwärtigkeit in Natur und Technik eine sinnvolle Kurvenklasse.

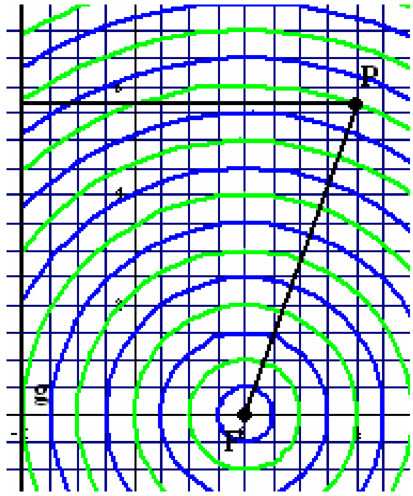

Abbildung 5

3D-Darstellungen

Algebraische Kurven sind durch $F(x,y)=0$ charakterisiert , wobei F ein Polynom in x und y ist. In Abbildung 6 ist die linke Seite als $z=F(x,y)$ dargestellt und die zugehörige Raumfläche mit der Koordinatenebene z = 0 zum Schnitt gebracht. So entsteht die Strophoide, aber beim Anheben der Ebene hat man gleich eine ganze Schar verwandter Kurven. In Derive 6 kann durch Schieberegler die Ebenenbewegung interaktiv gestaltet werden..

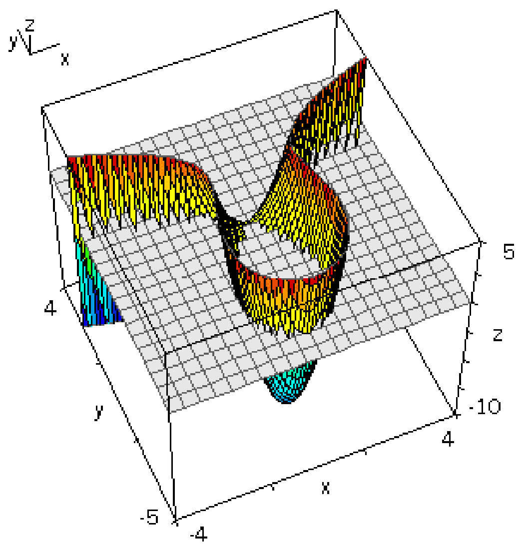

Abbildung 6

Fazit

Algebraische Kurven ermöglichen im Lehramtsstudium, in der Lehrerfortbildung und in der Schule reichhaltige und nachhaltige Mathematik

Literatur und weitere Informationen

[Ha] Haftendorn: “Kurven”, www.uni-lueneburg.de/mathe-lehramt