Dörte HAFTENDORN, Lüneburg, Münster GDM-Tagung 2013

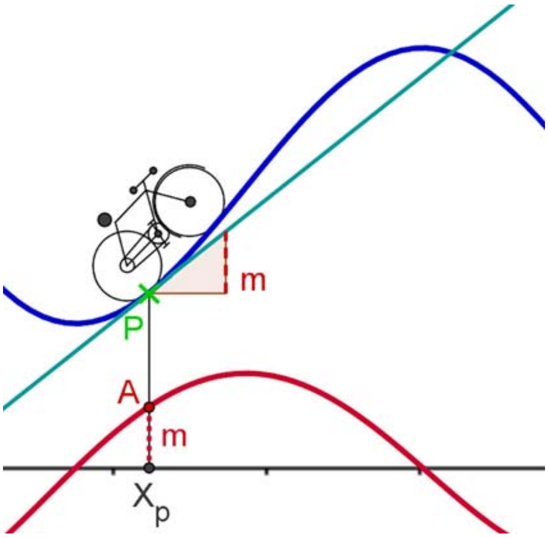
Ortslinie als Leitlinie

1. Zusammenfassung

Es geht um den Übergang von statischen Betrachtungen, bei denen im Koordinatensystem ein Punkt mit gewissen Eigenschaften erzeugt wird, zu einer dynamischen Sicht, bei welcher der Punkt eine Ortsline erzeugt. Diese zeigt eine globale Sicht auf das betrachtete Phänomen und wird dadurch selber zum Objekt weiterer Überlegungen. Ein bekanntes Beispiel ist die Steigung in einem Punkt einer Funktion, die global in der Ableitungsfunktion erfasst wird.

Lässt man sich in der Lehre aber nun von den in den Werkzeugen leicht verfügbaren Ortslinen leiten, diesen zweischrittigen Prozess interaktiv zu gestalten, so wird vertieftes Verstehen ermöglicht. Beispiele v.a. aus der Analysis von Schule und Hochschule zeigen dies.

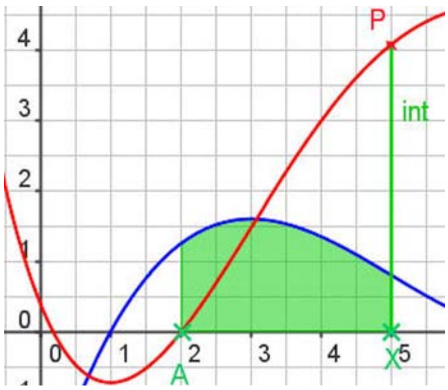
2. Ableitungsfunktion



Die lokale Eigenschaft: „Steigung einer Kurve in einem Punkt“ sollte von den Lernenden schon verstanden sein. Die hier gezeigte Interpretation als Steigung der Tangente im Punkt P ist also vertraut. Tangente in P und Steigung m einer Geraden sind fertige Befehle in GeoGebra. Nun bekommt ein Punkt A die Abszisse von P und die Ordinate m. Die Spur von A erscheint interaktiv, wenn man an P zieht. Das Fahrrad (Autor Dieter Riebesehl) „fährt“ dabei so langsam auf der Kurve, dass die Lernenden Zeit haben, die punktweise entstehende Ortslinie von A zu begreifen und ihre Besonderheiten vorherzusagen. Der Name „Ableitungsfunktion“ wird verstanden. Es ist für das Verstehen von Vorteil, wenn man f als Interpolationspolynom von z.B. 6 Punkten - mit direktem Befehl - definiert und damit eine interessante Wellenform erzeugt. Wenn alles erkundet ist, zeichnet man die „Ortslinie“ von A ein. GeoGebra und andere Dynamische Mathematiksysteme (DMS) verwenden hierzu einen Spline, der intern rechnerisch den Weg von A in dem dargestellten Fenster erzeugt und auch nachträglich auf Änderungen der gegebenen Funktion reagiert. Eindruchsvoll ist das Ziehen an den f definierenden Punkten und die direkte Reaktion der Ortslinie für die Ableitung. Dadurch wird der mathematische Sinn des Zusammenhangs von Funktion und ihrer Ableitung augenfällig. Weiterführend ist dann die analytische Behandlung von Differenzenquotienten und Differenzialquotienten und damit die Ausrechnung der Ableitungsfunktion. Eine solche kann als Probe durch Nutzung derselben GeoGebra-Datei mit der Ortslinie verglichen werden.

Das eben zur Entstehung und Verwendung der Ortslinie Gesagte gilt auch für alle nachfolgenden Bespiele. Sie entsteht stets punktweise aus dem mathematischen Zusammenhang und niemals durch die Rechnung, die später für sie hergeleitet werden kann. Für die „Tangentensteigung in einem Punkt", bzw. und den nächsten Beispielen „Fläche unter der Kurve", „Abstand" o.Ä. verwendet das DMS natürlich die elaborierten mathematischen Werkzeuge, aber dies sind alles Begriffe, deren Einzelwerte die Lernenden auch mit dem Geodreieck oder mit Auszählen hätten bestimmen können.

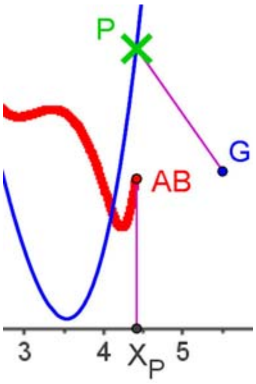
3. Integralfunktion



Es geht um einen Abschnitt aus der Hinführung zum Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung.
Dabei ist es wichtig, dass die Lernenden verstehen, dass es sinnvoll ist, die Integralfunktion $F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ zu betrachten. Der Ausdruck „Teppichabrollfunktion" ist eine Hilfe um zu begreifen, dass bei Festlegung eines Startes in A=(a;0) die bis X „abgerollte" Fläche unter der Kurve f als Punkt P mit der Abszisse a und dem Flächeninhalt unter der Kurve als Ordinate dargestellt werden kann. Langsames Ziehen an X ergibt eine Ortslinie, die als Funktion der Stellung von X sinnfällig wird. Sowohl die Wirkung der Grenzenvertauschung beim Integral als auch der negative Eintrag der Flächen unter der x-Achse sollte vorher durch entsprechenden Unterricht erarbeitet worden sein. Dann kann auch die vom DMS gezeigt gesamte Ortslinie verstanden werden. Rückt man an A, so wird diese Ortslinie parallel zur y-Achse veschoben. Konzentriert man sich nun auf den Flächenzuwachs von Stellung X nach Stellung X+dx, so wird einsichtig, dass dieser Flächenzuwachs nicht von der Stellung von A abhängt. Alle Integralfunktionen haben an derselben Stelle also denselben infinitesimalen Zuwachs. Darum haben sie also an jeder Stelle dieselbe Ableitung. Dass diese die gegebene Funktion f selbst ist, fällt den Lernenden gleich auf.

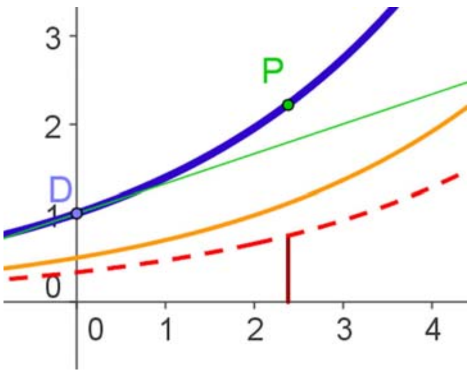
Damit ist der Boden bereitet für den Hauptsatz und seinen üblichen Beweis mit dem Differenzenquotienten der Intergalfunktion und dessen Grenzwert.

4. Extremwertaufgaben



Ein unterrichtlich sehr dankares Feld sind Extremwertaufgaben. Sie geben reichlich Anlass zum Modellieren und Argumentieren. Ortlsinien eignen sich dabei sowohl bei geometrisch fundierten Aufgaben als auch bei solchen aus dem Analysiszusammenhang. Entscheidend ist, dass die zu optimierende Zielgröße, rechts im Bild ist es der Abstand eines Punktes G von einem Graphen f, zunächst als Ordinate an einer geeigneten Stelle realisiert wird. Extremale Konstellationen werden zunächst interaktiv erkundet. Durch die Ortslinie wird die Zielfunktion begriffen, bevor sie rechnerisch existiert. Auch die Nebenbedingungen, z.B. Strahlensatzzusammenhänge, müssen noch nicht in eine formale Darstellung gebracht sein. Nun sind die Lernenden in der Lage, eigenständig Lösungen zu erarbeiten, die dann in eine analytische Behandlung münden. Viele weitere Beispiele findet man auf der Site www.mathematik-verstehen.de im Bereich Analysis -> Extremwertaufgaben.

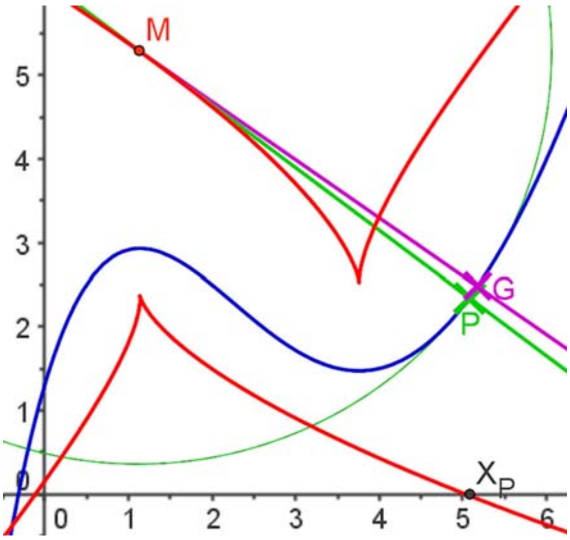
5. Exponentialfunktion



Wie in Absatz 2 gezeigt kann zu einer Exponentialfunktion f mit $f(x)=k^x$ (rechts mit Punkt P) die Ableitungsfunktion als Ortslinie (rechts gestrichelt) erzeugt werden. Der Idee der Lernenden, diese wäre evt. nur eine Stauchung, kann man interaktiv durch eine langsame Stauchung nachgehen (im Bild ist es Faktor 0,5), bis die gestauchte Funktion auf der Ableitungsfunktion liegt. Der Stauchfaktor stimmt nun mit der Steigung der Tangente in D=(0;1) überein. Dann müsste es eine Basis geben, bei der diese Steigung genau 1 ist. Also wird interaktiv k erhöht, bis die Tangente Steigung 1 hat, nun liegt die gestrichelte Ortsline der Ableitung auf der Exponentialfunktion. Diese besondere Basis wird (eulersches) e genannt, die Interaktion hat etwa $e=2,718...$ ergeben. Nun ist die Zeit reif für die Betrachtung des Differenzenquotienten und den üblichen Weg zum Differenzialquotienten. Diese erste Erfahrung mit e verankert unmittelbar auch die für viele Wissenschaften zentrale Eigenschaft der e- Funktion.

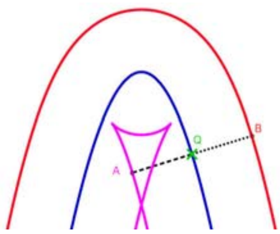
6. Krümmung und Evolute

Der Krümmungsbegriff hat seit der Existenz der CAS-Werkzeuge verstärkt Einzug in den Schulunterricht gehalten. Eine der Methoden, den Mittelpunkt des Krümmungskreises für Punkt P zu bestimmen, ist es, die Normale in P und einem Nachbarpunkt G zum Schnitt zu bringen und dann G an P in einem Grenzprozess heranzurücken. Dieses Vorgehen ist hier nachgebildet. Im Rahmen der Zeichengenauigkeit ist M gut genug gefunden, denn die Krümmungskreise durch G und P unterscheiden sich im Bild nicht, obwohl G und P noch getrennt liegen. Die von GeoGebra für M erzeugte Ortskurve ist also in hinreichender Näherung die Evolute der gegebenen Kurve. In einfachen Fällen kann eine ausgerechnete Evolute mit dieser Evoluten-Ortslinie verglichen werden. Der mathematischen Betrachtung erschließen sich aber sehr viel mehr Fälle als rechnerisch zu bewältigen wären.



7. Ausblick, Parallelkurven u.a.

Im Vortrag wurden noch Parallelkurven vorgestellt. Sie geben reichhaltige Anlässe für eigene Erkundungen der Lernenden. Auch physikalische Fragestellungen lassen sich untersuchen, z.B. „Wie muss das Vorderrad eines Fahrrades fahren, wenn das Hinterrad eine Parabel beschreiben soll?“.



8. Fazit

Visualisierungen mit Ortslinien sind alles andere als trivial. Sie bieten den Lernenden die Chance, sich durch das so erzeugte Verstehen sicher zu fühlen. Wenn dann der übliche formale Gang folgen soll, können sie mitgestalten, mindestens aber müssen sie nicht durch Unverstandenes gezerrt werden, bevor Begreifen für sie möglich wird. Danach kann die verallgemeinernde Kraft mathematisch formaler Darstellung besser gewürdigt werden.

Literatur

Haftendorn, D., (2010): Mathematik sehen und verstehen. Heidelberg: Spektrum-Verlag

Haftendorn, D. (1996-2013) Website www.mathematik-verstehen.de Bereich Analysis