

Wohin führen Ortskurven?, GDM Ak Geo 2012

Dörte Haftendorn

Zusammenfassung: Ortskurven können mit den starken Möglichkeiten heutiger Mathematik-Werkzeuge einfach erstellt und erkundet werden. Sie ermöglichen eigenes Handeln der Lernenden. Reflexionen an Geraden und Parabeln bieten schon reichhaltige Erfahrungen und führen zu neuen Begriffsbildungen. Nicht nur Kegelschnitte, auch höhere algebraische und transzendente Kurven und ihre Eigenschaften lassen sich in vielfältigen Zusammenhängen entdecken. Viele mathematisch relevante Handlungsweisen und Begriffe ergeben sich „wie von selbst“. Und das alles unterstützt mathematisch sinnvolle Argumentation. Ortskurven bereichern die Mathematiklehre.

Grundlegendes zu Ortskurven

Ortskurven - auch Ortslinien genannt - werden von den Dynamischen Mathematik-Systemen (GeoGebra, Cinderella u.a.) in einer Lehr- und Lernsituation zunächst langsam punktweise erzeugt. Ein steuernder Punkt steht in geometrischem oder funktionalem Zusammenhang mit einem zweiten Punkt, für dessen „Weg“ - die Ortskurve - man sich interessiert. Bei dieser Bewegung können die Lernenden die Fragestellung durchdringen und auch Vorhersagen über die Form der Ortskurve bestätigen oder widerlegen. Erst dann lässt man das System die ganze Ortskurve anzeigen. Sie wird intern als Spline aus allen im gewählten Fenster möglichen Stellungen berechnet, hat also keine algebraische oder funktionale Repräsentation. Neuerdings gibt es Programme, die dieses leisten (Schumann (2013)), sie möchte ich nicht berücksichtigen.

Für die Lehre ist wichtig, dass diese Ortskurven auf weitere Veränderungen der geometrischen Konstellation mit Formänderungen reagieren. Dadurch entsteht eine gewisse Verallgemeinerung und damit eine zweite Stufe des Verstehens. Meist lässt sich dann in mathematischem Diskurs mit den Lernenden eine Klassifizierung der im gegebenen Kontext möglichen Kurven vornehmen.

Naturgemäß kann in einem Vortrag dieses Vorgehen sinnfällig verdeutlicht werden. Schwieriger ist dies in der hier vorliegenden Verschriftlichung. Die gezeigten Bilder sind also alle „dynamisch“ zu lesen.

Reflexionen regen Strategien und Begriffe an

Das folgende Beispiel ist allgemein bekannt. Es hat verschiedene Einkleidungen, z.B. auch die rein physikalische als Lichtweg. Es dient sowohl der Begründung der Reflexion als auch der Vorbereitung der nächsten Schritte.

Geraden und die Feuerwehr

Die Feuerwehr, die in der Prärie einen Brand löschen soll und dazu vorher Wasser am Fluss holen muss, ist wenig realistisch, bietet aber gerade darum einen Schritt in die abstrahierende Welt der Mathematik.

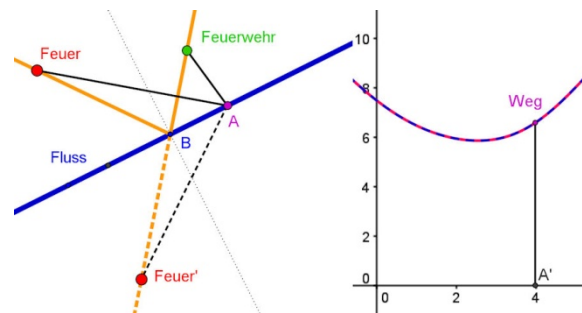


Abb. 1: Feuerwehrexemplar mit Lösung und Ortskurve für die Weglänge

Zuerst sind nur die Feuerwehr und ein Weg zu dem Feuer zu sehen, dessen Länge rechts als Ordinate dargestellt ist. Erst in der experimentell durch Ziehen an A (gekoppelt mit A') gefundenen optimalen Lage kann die Idee, das Feuer zu spiegeln, entstehen. Gerade dieser Schritt, der dann auch den Beweis ergibt, hebt das Beispiel aus den üblichen Extremwertaufgaben heraus und führt im nächsten Beispiel weiter.

Parabelreflexion führt zu einem neuen Begriff

Abb. 2 ist als Schnitt durch eine innen verspiegelte Paraboloidfläche aufzufassen. Parabeltangente werden intuitiv vom DMS übernommen. ein achsenparallel einfallender Strahl wird am Einfallslot gespiegelt und bis zum zweiten Auftreffen auf die Parabel gezeichnet. Die reflektierte Parabelsehne zeichnet ihre Spur, wenn man an P zieht. Dabei erkennt man auf der Parabelachse einen Punkt, durch den alle Strahlen verlaufen, er wird Brennpunkt F genannt. Punkt F entspricht dem Feuer im vorigen Problem. Für alle Feuerwehrexemplare verläuft der reflektierte Strahl durch den Ort der Feuers.

Dort hat das Spiegeln von F zur allgemeinen Lösung und vertieftem Verständnis geführt, daher wird hier nun auch F gespiegelt. Die Rolle des Flusses spielt die Tangente.

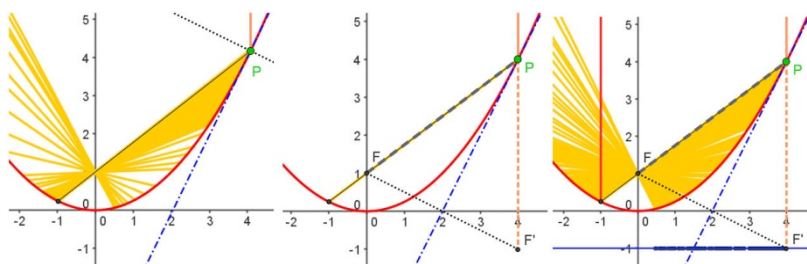


Abb. 2: Parabelreflexion führt zur Leitgeraden der Parabel

Zieht man nun an P, so wandert F' . Die Ortslinie von F' ist eine zur x-Achse parallele Gerade. Nennt man den Abstand, den F von dieser Geraden hat, p , dann gilt für alle Punkte P der Parabel nach dem Höhensatz für das

rechts ganz weiß gebliebene Dreieck $\left(\frac{x}{2}\right)^2 = y \cdot \frac{p}{2}$, also $y = \frac{x^2}{2p}$. Ist man

von einer Parabel $y = a \cdot x^2$ ausgegangen, so ist nun $p = \frac{1}{2a}$ und *Brennpunkt und Leitgerade* sind als neue Begriffe entdeckt.

Apollonius hat umgekehrt die *Parabel als den geometrischen Ort aller Punkte definiert, die von einem festen Punkt denselben Abstand wie von einer Geraden haben*. Eine entsprechende Realisierung im DMS ließe dann die Parabel als Ortskurve von P erscheinen, wenn man $Q = F'$ auf einer Geraden zieht.

Strategien werden an Ellipsen und Hyperbeln fruchtbar

Ellipsen definieren und ihre Tangenten finden

Ellipsen gehören ja schon lange nicht mehr zum schulmathematischen Standard. Damit sich das je wieder ändern kann, haben die Universitäten die Verpflichtung, wenigstens den Lehramtsstudierenden Grundwissen zu Kegelschnitten nahezubringen. Vielleicht sollte man auch Potenzial für Lernen von reichhaltiger Mathematik besser würdigen.

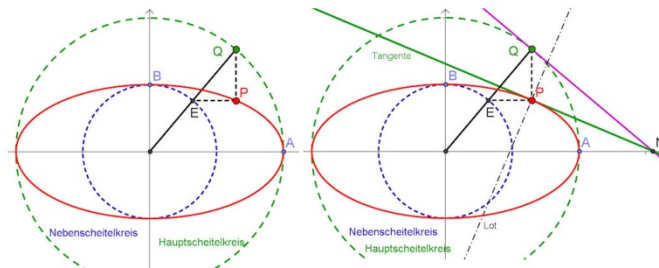


Abb. 3: Ellipse und ihre Tangente aus gestauchtem Kreis gewinnen

Definiert man die Ellipse als affines (hier: achsenparallel gestauchtes) Bild eines Kreises, so ergibt sie sich aus Hauptscheitelkreis und Nebenscheitelkreis als Ortskurve. Auch die Tangente kann man hieraus konstruieren. Ein DMS hat aber auch direkte Befehle dafür.

Erkundung der Reflexion an Ellipsen

Mancher hat von Brennpunkten der Ellipse wohl schon etwas gehört, vielleicht beim Keplerschen Gesetz. Es ist daher naheliegend, Strahlen von einem „Brennpunkt“ starten zu lassen. Sie müssten dann aus Symmetriegründen durch den anderen Brennpunkt verlaufen. Die Lage der Brennpunkte kann man nun im DMS experimentell finden.

Dazu setzt man ein F erstmal irgendwo auf die Hauptachse und sieht sich an, wie die Strahlen reflektiert werden. Das ist nicht übersichtlich (Abb. 4 a). F und der zweite Brennpunkt G liegen sicher symmetrisch zur Nebenachse. Nun zieht man an F so, dass der reflektierte Strahl genau durch G verläuft (Abb. 4 b). Es zeigt sich, dass F und G in dieser Lage zu recht *Brennpunkte* heißen.

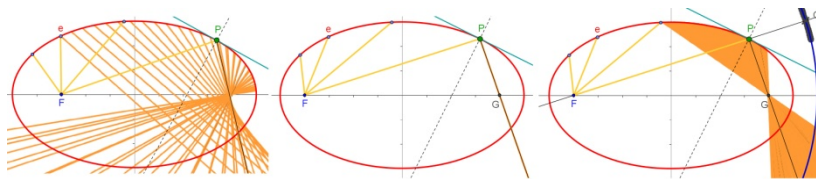


Abb. 4: Ellipsenreflexion führt zum Leitkreis der Ellipse

Weiterführung bei Ellipsen wie bei Parabeln

In Abb. 4 c) ist nun das Vorgehen von der Parabel übertragen. G wird zu G' an der Tangente gespiegelt. Die Ortskurve von G' ist ein Bogen und nicht

eine Gerade wie im vorigen Beispiel. Ist dieser Bogen vielleicht ein Kreisbogen? Bei Ellipsen hat jeder Ellipsenpunkt P zu den Brennpunkten dieselbe Entfernungssumme. Aus der Konstanz der Streckensumme $\overline{FP} + \overline{PG}$ folgt wegen $\overline{PG} = \overline{PG'}$ die Konstanz von $\overline{FP} + \overline{PG'} = r$. Diese Strecke ist also der Radius eines Kreises um F . Die Ortskurve von G' ist also tatsächlich ein Kreis, er heißt *Leitkreis*.

Wieder kann man auch umgekehrt mit einem Punkt Q auf einem Kreis um F und einem Punkt G auf seinem Durchmesser eine Ellipse konstruieren (Abb. 5 a): Die Mittelsenkrechte von Strecke GQ schneidet den Radius FQ in P_s . Die Ortskurve von P_s ist eine Ellipse. Dieses ist die *Leitkreiskonstruktion der Ellipse*.

Bei der Leitkreiskonstruktion erscheinen unvermutet Hyperbeln

Zieht man G auf F , dann ist die Ortskurve von P_s ein Kreis mit dem halbem Radius des Leitkreises. Liegt G auf B , entartet die Ortskurve zu einem einzigen Punkt, nämlich F . Zieht man aber G nach rechts über den Leitkreis hinaus, so liegt P_s auf dem Strahl FQ und als Ortskurven *erscheinen* Hyperbeln. Ersichtlich ist nun die Entfernungsdifferenz von P_s zu den zwei festen Punkten F und G konstant, nämlich der Radius des Leitkreises. (Abb. 6 b).

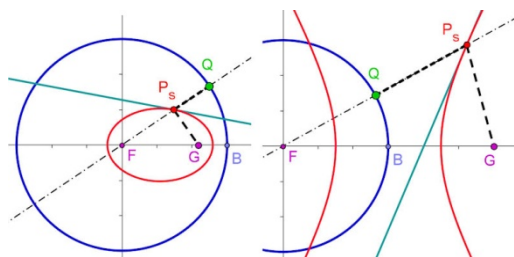


Abb. 5: Leitkreiskonstruktion: Ellipse, Hyperbel

Reflexion an Hyperbeln

Abb. 5 b) zeigt im Grunde schon den Verlauf der Strahlen. Abb. 6 zeigt die Reflexion von Strahlen, die von einem Brennpunkt ausgehen. Sie werden an der Hyperbel so reflektiert, als kämen sie von dem anderen Brennpunkt. Dabei muss man sich bei Abb 6 b) den rechten Hyperbelast wegdenken. Der

andere Brennpunkt wird zum virtuellen Strahlencentrum. Diese Konstellation findet Anwendung in astronomischen Geräten.

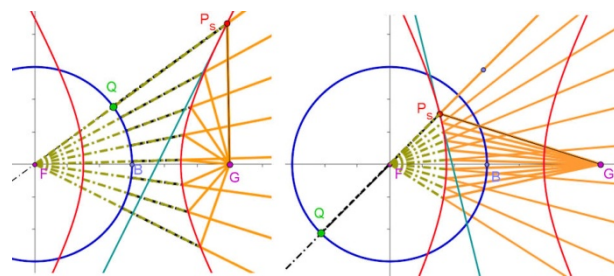


Abb. 6: Reflexion an der Hyperbel

Strahlengang im Röntgen-Teleskop

Durch Kombinationen von Paraboloid- oder Ellipsoidspiegeln und Hyperboloidspiegeln kann man in Teleskopen und Mikroskopen Brennweiten verlängern und verkürzen.

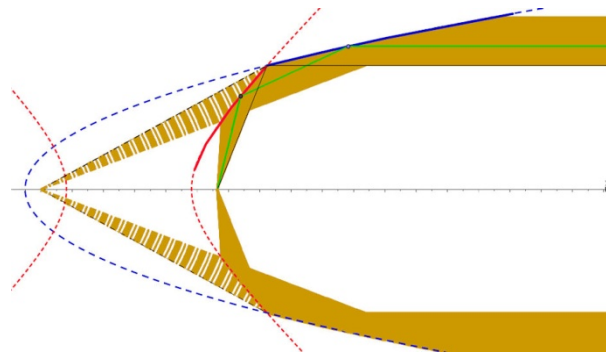


Abb. 7: Röntgen-Teleskop, Wolter-Optik Typ I

In Abb. 7 sind eine Parabel und eine Hyperbel zu sehen, die man sich um die x-Achse rotiert als Körper vorstellen muss. Links haben sie einen gemeinsamen Brennpunkt. Von rechts parallel einfallende Strahlen werden zuerst an dem Parabelspiegel zu diesem Brennpunkt hin reflektiert, dann aber von dem Hyperbelspiegel zu dem anderen Brennpunkt der Hyperbel geleitet. In der technischen Realisierung werden mehrere solche Spiegelpaare ineinander geschachtelt. (Last (2013))

Der Strahlengang ist hier als Spur der entsprechenden Strahlen und Strecken in einfacher Weise verdeutlicht. Die konfokalen Kegelschnitte sind mit ihrer impliziten Gleichung in GeoGebra gezeichnet.

Namensgeheimnis der Kegelschnitte

Dass die Kegelschnitte als Schnittkurven beim Schneiden eines Doppelkegels erscheinen, wundert - zumindest sprachlich - niemanden. Gleichwohl muss dies bewiesen werden. Man kann bekanntlich mathematische Objekte nur in *einem* Kontext definieren, in anderen Kontexten - die mitunter auch für eine Definition gut sind - müssen dann Eigenschaften bewiesen werden. Zum Beispiel ist die Fadenkonstruktion zu beweisen, wenn die Ellipse als Kreisstauchung definiert wird. Diese Beweise sind im Skriptum durchgeführt. (Haftendorn (1996-2013), Bereich Kurven ->Kurvenheft).

Gerade in diesem anschaulichen und dennoch mathematisch strengen Gebiet kann man Lernenden, insbesondere Lehramtsstudierenden, gut eine Einsicht in den Theorieaufbau eines mathematischen Themenfeldes ermöglichen.

Die speziellen Namen *Hyperbel*, *Parabel*, *Ellipse*, haben - wie zu erwarten - auch einen mathematischen Hintergrund (Schupp (1988) S.14). Es geht dabei um den Flächenvergleich von Sperrungsrechteck und Ordinatenquadrat.

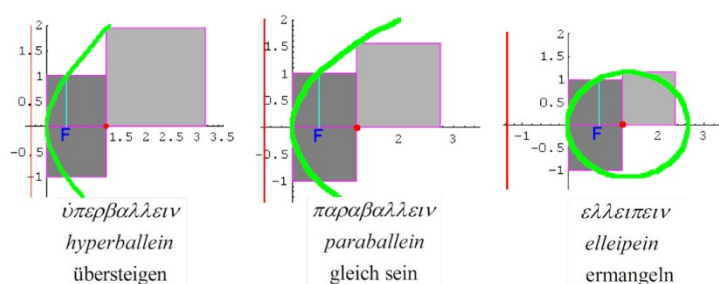


Abb. 8: Namensgeheimnis Hyperbel, Parabel, Ellipse

An einer Stelle der x-Achse wird aus der Ordinate ein *Quadrat* gebildet. Das *Sperrungsrechteck* ergibt sich aus dem Abstand dieser Stelle zum Scheitel und dem Doppelten der Ordinate am Brennpunkt. Ersichtlich „übersteigt“ in Abb. 8 bei der Hyperbel das Ordinatenquadrat das Sperrungsrechteck, bei der Parabel „sind beide gleich groß“ bei der Ellipse

„mangelt es“ dem Ordinatenquadrat an Fläche im Vergleich zum Sperrungsrechteck.

Diese Eigenschaften ergeben sich am Einfachsten aus der gemeinsamen Scheitelgleichung der Kegelschnitte $y^2 = 2 p x - (1 - \varepsilon^2) x^2$. Dabei ist p die Ordinate am Brennpunkt. Der Klammerterm ist bei der Hyperbel negativ, bei der Parabel Null und bei der Ellipse positiv. Diese Gleichung ergibt sich aus der Leitgeradenkonstruktion der Kegelschnitte. (Haftendorn (1996-2013, Bereich Kurven, Kegelschnitte)

In der Literaturwissenschaft ist eine *Parabel* eine gleichnishafte Erzählung. Von einem *elliptischen* Stil spricht man, wenn ein Autor Sätze verkürzt und Worte auslässt. *Hyperbolisch* schreibt er, wenn er im Ausdruck übertreibt.

Wege von Herr und Hund: Konchoiden

Konchoide des Nikomedes oder Hundekurve



Abb. 9: Hundekurve in der 8. Klasse

Der Umgang mit Kurven sollte im Unterricht zunächst möglichst enaktiv erfolgen. Bei der Hundekurve geht „Herrchen“ auf einer geraden Straße und hält seinen „Hund“ an einer Leine fester Länge. Dieser Hund strebt in jedem Moment einem „Baum“ zu, hier repräsentiert durch den Kartenständer. Der Weg des Hundes wird mit einem langen Seil ausgelegt. Die Umsetzung in „Geometrie“ an der Tafel geschieht im Klassengespräch, dann hat jeder Zeit, die Konstruktion punktweise im Heft zu zeichnen. Danach wird die Konstruktion gemeinsam im Klassengespräch mit einem DMS realisiert.

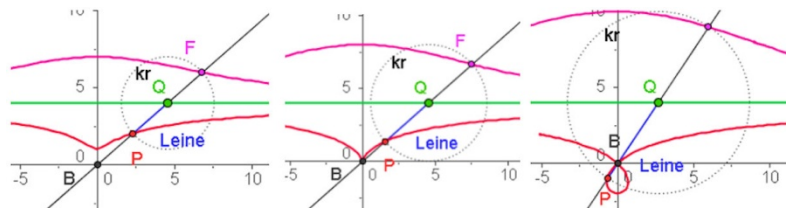


Abb. 10: Hundekurve im DMS

Der zweite Ast wurde von den Lernenden (1998) als der Weg von „Fiffi“, der Angst vor dem Baum hat, interpretiert. Die drei wesentlichen Formen ergeben sich experimentell bei Variation der Leinenlänge. Die Erkenntnis einer solchen mathematischen Systematik ist lehrreich und befriedigt den Forschungsdrang. Mit der Schlaufe haben die Lernenden kein Problem: „mathematische Hunde machen das eben so“. Es ist dazu natürlich wichtig, dass die Lehrperson nicht so tut, als handele es sich um ein „reales“ Problem.

Diese Hundekurve heißt auch *Konchoide des Nikomedes* (um 200 v. Chr.). Dieser kannte nur den oberen Ast und nannte ihn *Muschelkurve*. (Schupp (1995) S. 44) Allgemein erhält man Konchoiden, wenn „Herrchen“ auf einem beliebigen Weg wandert. Die Stellung des Baumes und die Leinenlänge sind dann formbestimmende Parameter. Hier tut sich ein weites Erkundungsfeld auf.

Die Kreisstraße ergibt Pascalsche Schnecken

Wenn „Herrchen“ auf einem Kreis wandert und der Baum auf dem Kreisrand steht, ergeben sich *Pascalsche Schnecken*. Sie sind benannt nach Étienne Pascal (1588-1651), dem Vater von Blaise Pascal. Auch hier (Abb.11) ergeben sich drei Grundformen, aber kein weiterer Ast.

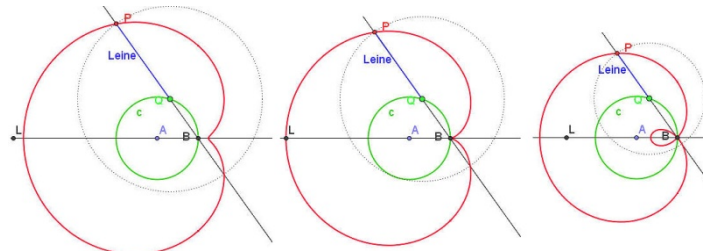


Abb. 11: Pascalsche Schnecken, Kardioiden in der Mitte

Bemerkenswert ist, dass die Konchoiden eine ganz einfache Gleichung haben, wenn man die Polarkoordinaten des Weges $R = R(\varphi)$ kennt und der Baum im Ursprung steht: $r = r(\varphi) = R(\varphi) \pm k$ mit dem Parameter k als Leinenlänge.

Das reichhaltige Gebiet der algebraischen Kurven lässt sich in einem Aufsatz bei Weitem nicht ausloten (Haftendorn (1996-2013)).

Reflexionen an Kreisen

Die Nephroide und die Kaffeetasse

Reflexionen und Brechungen an Kreisen lassen sich besonders leicht geometrisch realisieren, da das Einfallslot stets eine Radiusgerade ist. Wenn sich dabei Strahlen so überlagern, dass eine helle Hüllkurve entsteht, so heißt diese *Kaustik* (Brennkurve). *Diakaustiken* entstehen bei optischen Linsen. Die bei Reflexionen entstehenden Kurven heißen *Katakaustiken*.

Variationen zum Thema „Reflexion“ führen somit zu weiteren Begriffsbildungen.

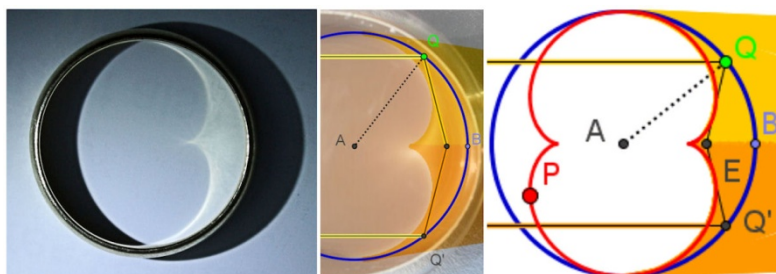


Abb. 12: Paralleles Licht ergibt als Katakaustik die Nephroide

Die Kardiode als Katakaustik

Ist nun eine punktförmige Lichtquelle auf dem Rand des Kreises, so hüllen die reflektierten Strahlen eine apfelförmige (herzförmige) Kurve ein. Handwerklich erhält man sie im DMS als *Spur* der reflektierten Strahlen.

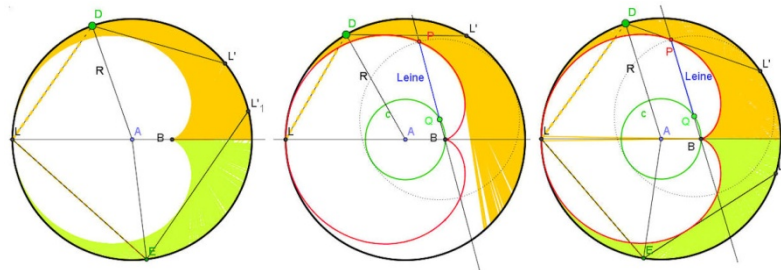


Abb. 13: Eine punktförmige Lichtquelle ergibt als Katakaustik die Kardioid

Wenn nun die Idee ist, es könnte sich um eine Kardioid handeln, ist klar, dass dann der Radius des „Wanderkreises“ aus Abb. 11 Mitte dreimal in den Abstand Lichtquelle-Mittelpunkt passen muss. Trägt man so einen Kreis und die zugehörige Konstruktion eines Punktes P einer Pascalschen Schnecke ein (Abb. 13 Mitte), so liegt nahe, P auf den Berührungspunkt des reflektierten Strahles zu ziehen. In Abb. 13 rechts sieht man, dass nun das Einfallslot und die Verbindungsstrecke von P zum Baum B parallel sind. Dieses lässt sich tatsächlich mit geometrischer Argumentation für jede Stellung beweisen (ausführlich in Haftendorn (1996-2013)) und die Hüllkurve stimmt mit der Ortskurve von P überein.

Es zeigt sich hier, dass ein reichhaltiger mathematischer Werkzeugkasten den Blick auf Mathematik weiten kann. Trivial wird es dadurch nicht.

Weitere Phänomene, in denen Ortskurven helfen

Im Folgenden werden nur noch als Ausblick Themen genannt, bei denen Ortskurven wesentlich werden.

Gelenkkonstruktionen

Der *Inversor von Peaucellier* (Abb.14 links) ist ein Gestänge aus zwei Schenkeln der Länge b , die gegenüberliegende Punkte einer Raute mit der Seitenlänge a (mit $a < b$) fassen. Wenn der innere freie Punkt Q der Raute auf einem Kreis läuft, dann bewegt sich der äußere freie Punkt P auf einer Ge-

raden. Damit wird die Kreisbewegung von Q in eine exakt geradlinige Bewegung von P übersetzt. Dieses hat in der technischen Mechanik eine große Bedeutung. Der Beweis erfolgt dadurch, dass mit geometrischen Mitteln $\overline{OQ} \cdot \overline{OP} = b^2 - a^2$ nachgewiesen wird. Dieses konstante Produkt beschreibt gerade die Inversion am Kreis. (Haftendorn (1996-2013) Bereich Geometrie/Höhere Geometrie/Inversion)

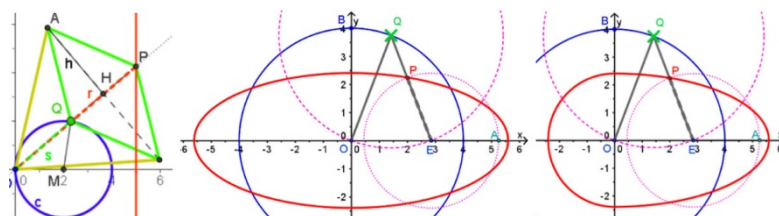


Abb. 14: Gelenkkonstruktionen: Inversor und Ellipsenzirkel

Der *Ellipsenzirkel* (Abb. 14 Mitte) ist eine Gelenkkonstruktion, bei der $\overline{OQ} = \overline{QE} = c$ und $\overline{PE} = b$ ist, wobei Q auf einem Kreis und B auf einer Geraden durch dessen Mittelpunkt verläuft.

In Abb. 14 rechts ist das *Punktsprung-Phänomen* demonstriert. In GeoGebra kann man in den erweiterten Einstellungen die „Kontinuität“ AN oder AUS schalten. Wenn man nicht für Kontinuität sorgt, wird an die halbe Ellipse ein Halbkreis angesetzt, denn dann tauschen in den Berechnungen des Systems O und E ihre Rollen. Der Kreis um E, der P erzeugt, wird zum Kreis um O. Da sich O nicht bewegt, entsteht links der Halbkreis. Bei „Kontinuität“ bleibt E Kreismittelpunkt. Die Diskontinuität ist auch in den Dynamischen Geometriesystemen (DGS) ZuL und Dynageo zu beobachten. Das DGS Cinderella (Kortenkamp (1999)) ist mathematisch aufwendiger definiert und vermeidet grundsätzlich dadurch das Punktsprung-Phänomen.

Extremwertaufgaben

Als entscheidendes Werkzeug bieten sich Ortskurven bei Extremwertaufgaben an. Dies sind Aufgaben, bei denen eine in geometrischem oder analytischem Zusammenhang definierte „Zielgröße“ optimiert werden soll. Die Ortskurve, die diese Größe in einem passenden Koordinatensystem darstellt, kann erzeugt werden *bevor* eine Funktionsgleichung im Sinne der Analysis vorliegt. Mit ihr kann zunächst interaktiv das Problem erkundet und verstanden werden. Die Nebenbedingungen müssen in dem Moment auch noch

nicht termmäßig erfasst sein, sie ergeben sich zunächst durch Abgreifen von Streckenlängen o.ä. aus dem DGS. Der nachfolgende Unterricht kann dann eine fundierte rechnerische Behandlung initiieren.

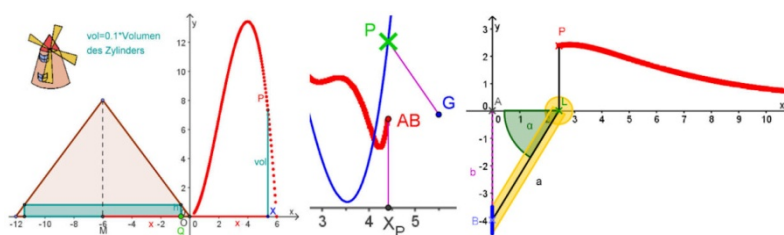


Abb. 15: Wasser im Mühlendach, Abstand von einer Funktion, Ausleuchtung eines Bildes

Die in Abb. 15 gezeigten Beispiele stehen prototypisch für diesen Aufgabentyp. Diese und viele weitere Beispiele mit GeoGebra und TI Nspire sind auf der Website zu finden. (Haftendorn (1996-2013) Bereich Analysis/Ortslinien und Analysis/Extremwertaufgaben).

Polarkoordinaten

Alle grafikfähigen (und CAS-) Taschenrechner ermöglichen einen einfachen Zugriff auf Polarkoordinaten. Das gilt auch für die DMS wie GeoGebra, Cinderella und andere.

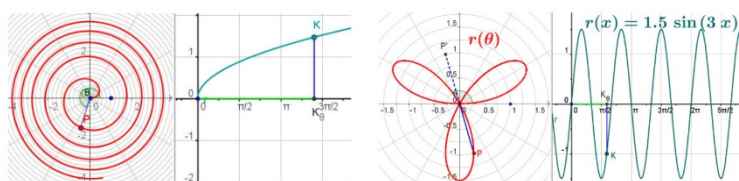


Abb. 16: Wurzelspirale und Rosette

GeoGebra (u.a.) ermöglicht zwei gekoppelte Grafikfenster nebeneinander. Hier wird damit die simultane Sicht auf die eigentliche Polardarstellung und eine zugehörige kartesische Darstellung vorgeschlagen. Die Polarkurve ist darin die Ortskurve eines Punktes $P = (r(\theta), \theta)$, der sich interaktiv synchron mit dem Punkt $K = (\theta, r(\theta))$ bewegt. K läuft dabei im kartesischen Koordinatensystem mit den Achsen x und $r(x)$ auf dem Graphen der Funktion $x \mapsto r(x)$. (Haftendorn (1996-2013) Bereich Analysis/Polarkoordinaten). Eine entsprechende Veröffentlichung ist in Vorbereitung.

Fazit: Wohin führen Ortskurven?

Zusammenfassend kann man wohl sagen:

1. Ortskurven helfen dem Verstehen.
2. Sie entschleunigen durch die langsame interaktive Entstehung.
3. Sie regen das mathematische Argumentieren an.
4. Sie führen zu neuen Begriffsbildungen.
5. Sie regen rechnerische Methoden an.
6. Sie erlauben Prüfung der Rechnungen.
7. Sie regen Variieren und Erkunden an.
8. Sie sind von der Sek.I bis in die Hochschullehre einsetzbar.
9. Sie ermöglichen eine reichhaltige Mathematiklehre.
10. *Ortskurven führen in die wunderbare Welt der Mathematik.*

Literatur

- Haftendorn, Dörte. (2010). *Mathematik sehen und Verstehen*, Heidelberg, Springer Spektrum Verlag
- Haftendorn, Dörte. (1996-2013) <http://www.mathematik-verstehen.de> Bereiche Algebraische Kurven, Analysis und andere
- Kortenkamp, U. (1999) *Foundations of Dynamic Geometry*, Dissertation ETH Zürich N° 13403
- Last, Arndt. (2013). www.x-ray-optics.de Bereich Optiktypen, Reflexionsoptiken, Gekrümmte Spiegel
- Schumann, H., Vortrag GDM-Tagung Münster 2013, noch unveröffentlicht.
- Schupp, Hans. (1988). Kegelschnitte. In: Knoche, N. und Scheid, H.: *Lehrbücher und Monographien zur Didaktik der Mathematik* Bd. 12, Mannheim, BI Wissenschaftsverlag
- Schupp, H., Darbrock, H. (1995). Höhere Kurven. In: Knoche, N. und Scheid, H.: *Lehrbücher und Monographien zur Didaktik der Mathematik* Bd. 28, Mannheim, BI Wissenschaftsverlag

Adresse der Autorin:

Prof. Dr. Dörte Haftendorn
Institut für Mathematik und ihre Didaktik
Leuphana Universität Lüneburg
Scharnhorststr. 1
21335 Lüneburg

Haftendorn@uni.leuphana.de

