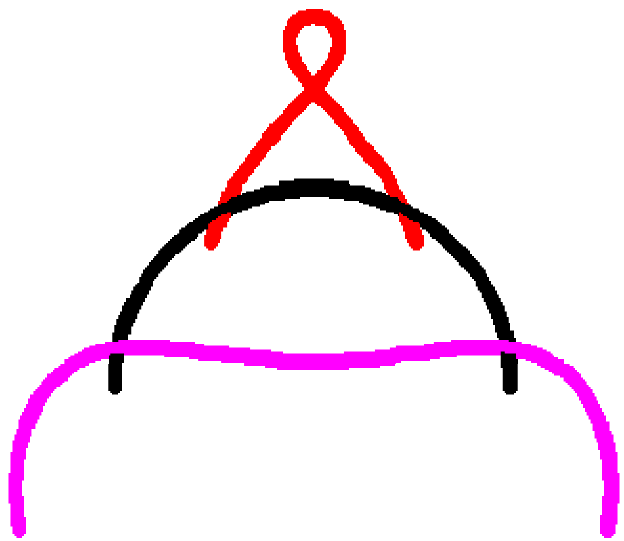
Terme und Gleichungen mit Leben füllen

Algebraische Kurven
und andere bewegliche Objekte



$$(x^2 + y^2)(y - a)^2 = k^2 y^2$$

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Universität Lüneburg, www.mathematik-verstehen.de

Gliederung

1) Gleichungen mit zwei Variablen haben ein Bild im 2D-Koordinatensystem

2) Funktionen mit zwei Variablen haben ein Bild im 3D-Koordinatensystem

3) Terme mit zwei oder mehr Variablen werden zu Funktionstermen für Variable und Parameter

…und alles steht im Internet in den

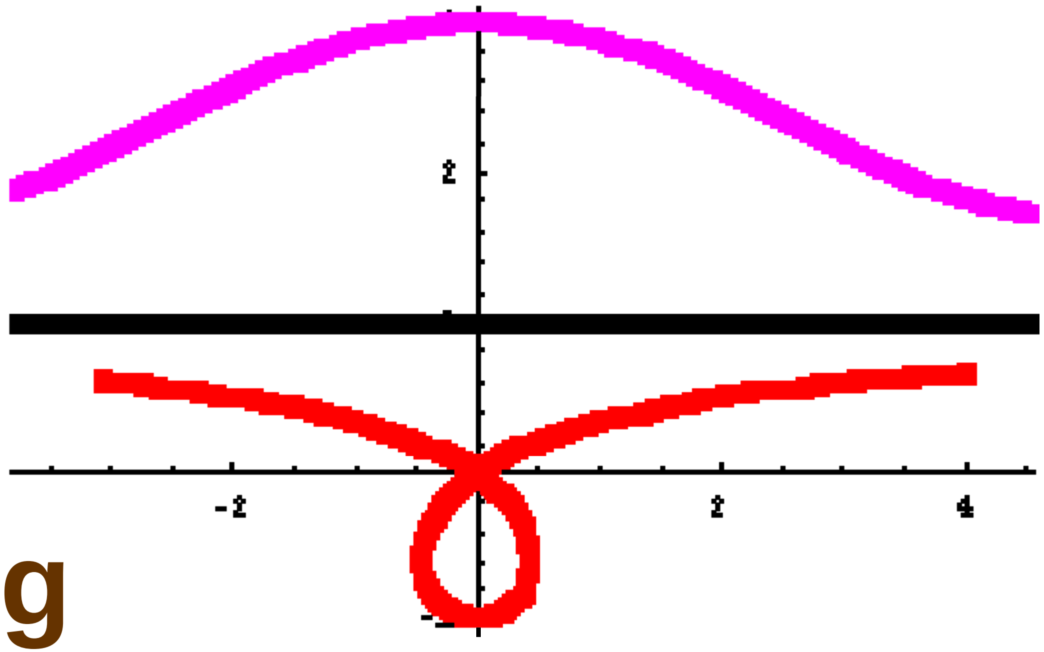
Bereichen Kurven, Graphen, Gleichungen...

www.mathematik-verstehen.de oder (identisch)

http://haftendorn.uni-lueneburg.de

1) Gleichungen mit zwei Variablen haben ein Bild im 2D-Koordinatensystem

Sinn ? $(x^2+y^2)(y-a)^2=k^2y^2$?



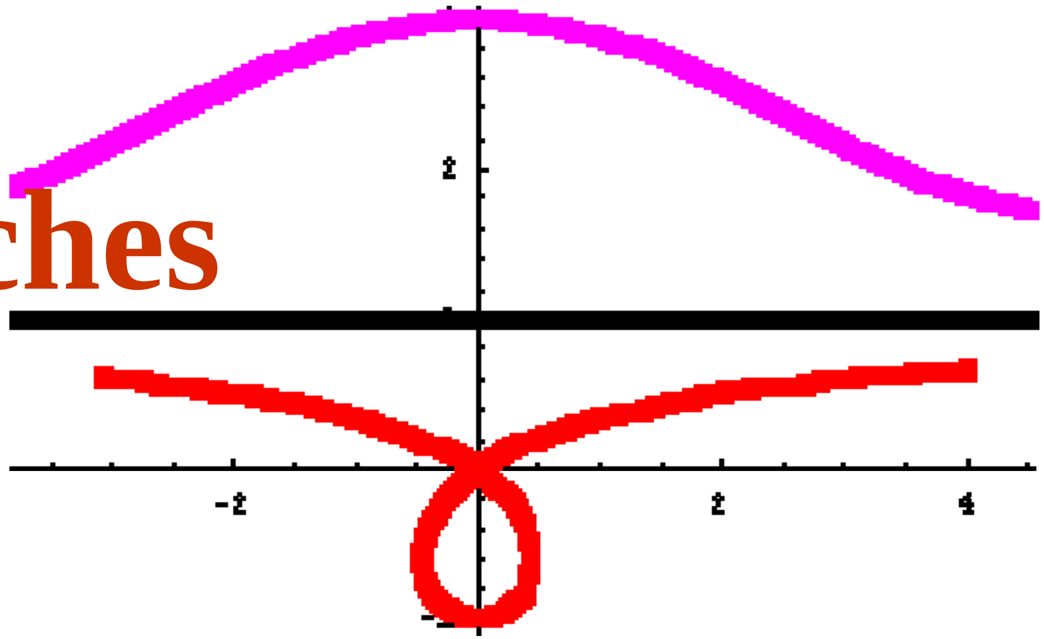
Sinngebung

! $(x^2+y^2)(y-1)^2=2^2y^2$!

$$?\quad (x^2+y^2)(y-a)^2 = k^2y^2 \quad ?$$

Weg:

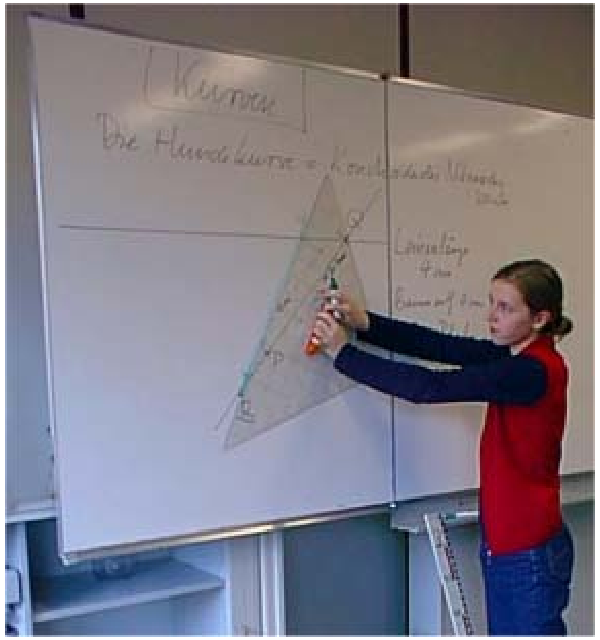
geometrisches Handeln



$$!\quad (x^2+y^2)(y-1)^2 = 2^2y^2 \quad !$$

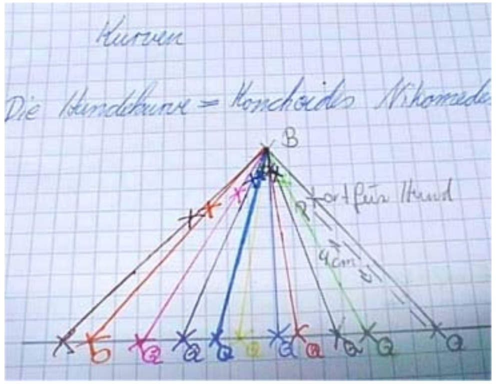
Handeln

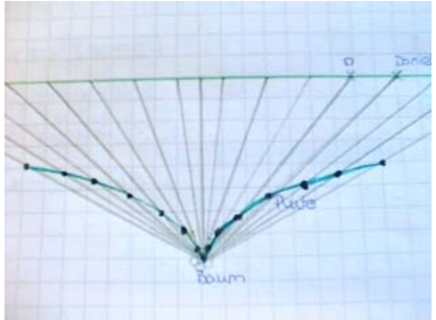
Beobachten



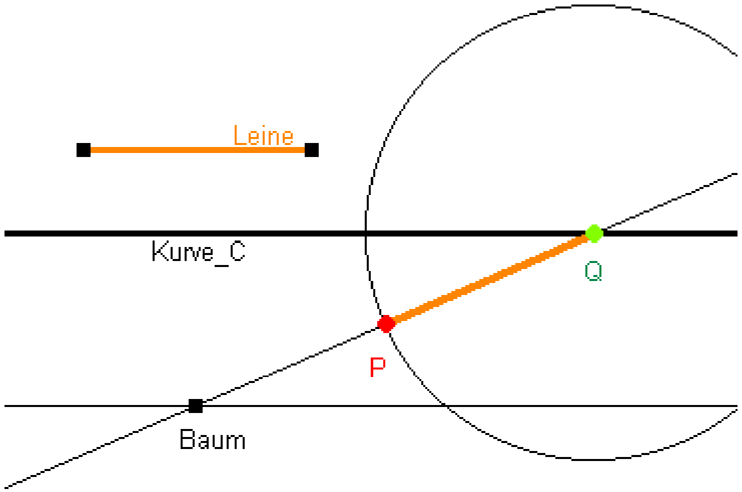
Geometrisch erfassen

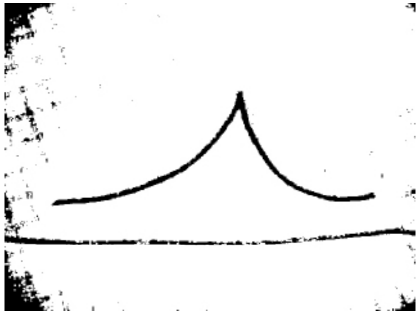
Einführungsbeispiel: Die Hundekurve, Konchoide des Nikomedes





Zeichnen





GeoGebra pur

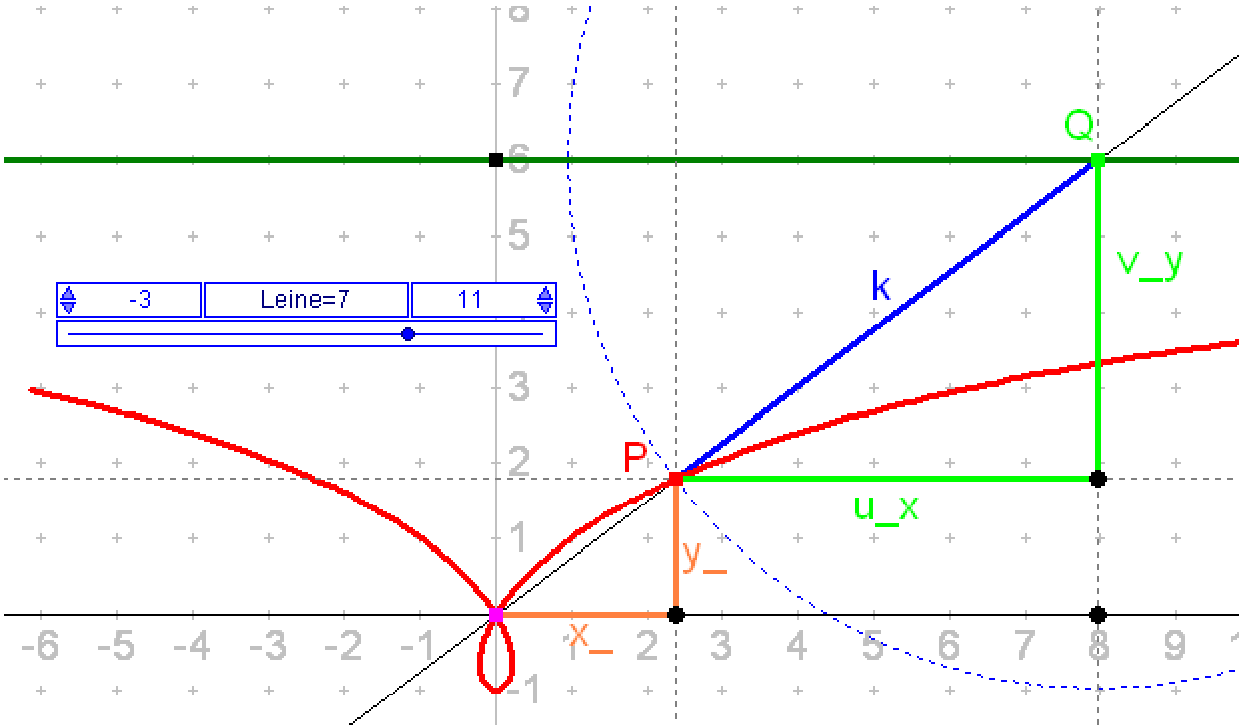
Realisieren im DGS

Ortskurve erzeugen

Handeln, sehen, systematisieren

Dynageo Hundekurve

Hinterlegung eine Koordinatensystems



- **Aus Strahlensatz**
- **und Pythagoras-Satz**
- **folgt in zwei Schritten**
- **die Gleichung der Hundekurve**

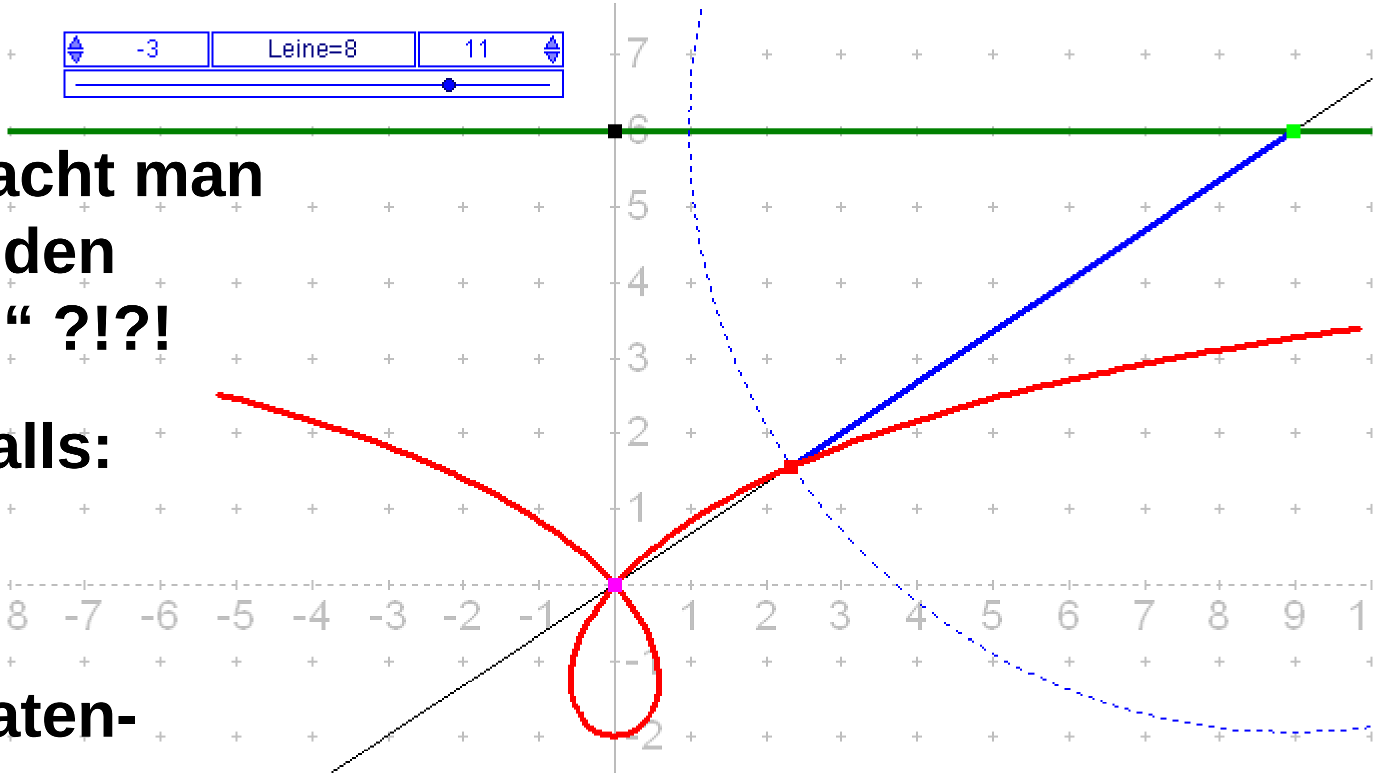
$$(x^2+y^2)(y-a)^2=k^2y^2$$

Wie kommen Jüngere zu den Gleichungen?

- **Was macht man aber bei den „Kleinen“ ?!?!**

- **Jedenfalls:**

•Einbau eines Koordinaten-Systems



- **Beschaffung der Gleichung „irgendwoher“**

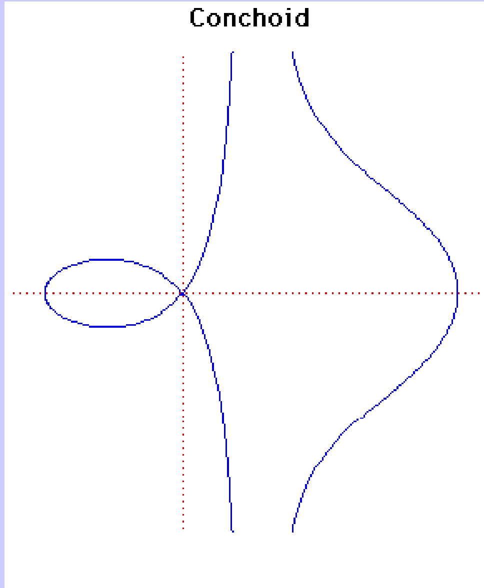
$$(x^2+y^2)(y-a)^2=k^2y^2$$

Algebraische Kurven, St. Andrews, t.w. erforschtes Land

Famous Curves Index

Click on the name of a curve below to see its history and some of its associated curves.

Conchoid



Cartesian equation: $(x - b)^2(x^2 + y^2) - a^2x^2 = 0$

Polar equation: $r = a + b\sec(\theta)$

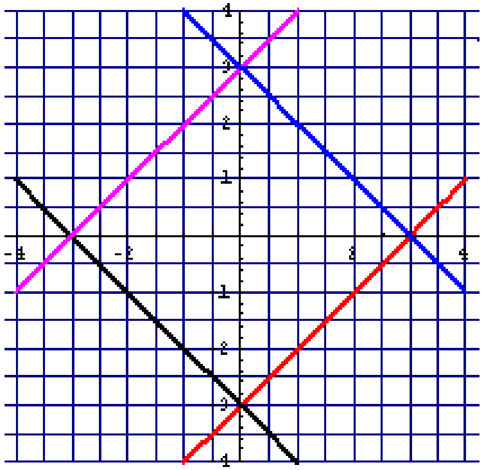
- **Beschaffung der Gleichung aus „Internet u.a.“**

$$(x^2 + y^2)(y - a)^2 = k^2 y^2$$

Zusammenhang: Koordinaten, Gleichungen, Kurven

Algebraische Kurven   Zusammenhang: Kurven, Koordinaten, Gleichungen

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Arbeitsblatt, T^3-Tagung Wetzlar 2002

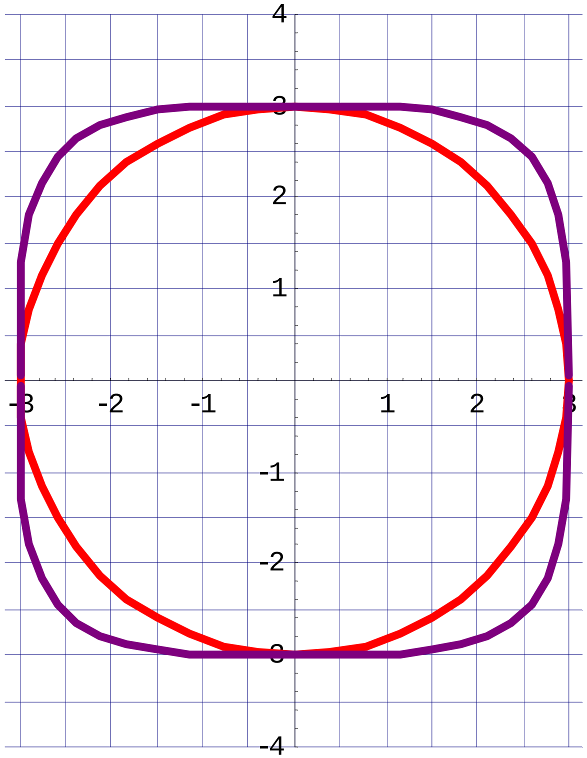


Hier siehst du ein Geradenkaro.
Auf der Geraden rechts oben liegen z.B. die Punkte (-1/4), (0,3); (1,2), (2,1), (3,0), (4,-1),
die Summe aus x-Koordinate und y-Koordinate ist immer 3. !
Dafür schreibt man $\boxed{x+y=3}$ und nennt diese Gleichung die **Gleichung der Geraden** rechts oben.
Stelle die anderen Geradengleichungen auf.
Lösung:
lo: $\boxed{x-y=-3}$ lu: $\boxed{x+y=-3}$ ru: $\boxed{x-y=3}$ ro: $\boxed{x+y=3}$

Welche der folgenden Gleichungen sind auch richtig? Welche sind falsch?
a: $\boxed{y=x-3}$ b: $\boxed{y-x=3}$ c: $\boxed{y=x+3}$ d: $\boxed{y=3-x}$ e: $\boxed{y=-3x}$ f: $\boxed{x+y+3=0}$

Rechnerische Prüfung: Liegt der Punkt P(16/-13) auf der Geraden ro?
Antwort ja, denn $16+(-13)=3 \Leftrightarrow 16-13=3 \Leftrightarrow 3=3$ ist wahr.
Liegt der Punkt P(10/-13) auf der Geraden ro? Antwort nein, denn $10-13=3 \Leftrightarrow -3=3$ ist falsch.
Liegt der Punkt P(-3,7/6,7) auf der Geraden ro? Antwort ja, denn $-3,7+6,7=3 \Leftrightarrow 3=3$ ist wahr.

Zusammenhang: Koordinaten, Gleichungen, Kurven



$$x^4 + y^4 = 3^4 \qquad x^2 + y^2 = 3^2$$

$$2{,}5^4 + 2{,}5^4 = 3^4$$

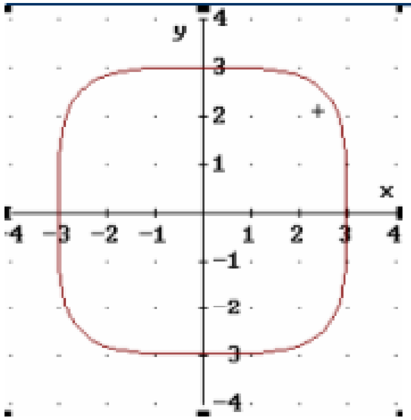
$$78{,}125 = 81$$

$$\textit{falsche Aussage}?!?!?$$

Merke:

- **Alle Punkte, deren Koordinaten aus der Kurvengleichung eine wahre Aussage machen, liegen auf der Kurve.**
- **Eine Gleichung, mit der ein sicher auf der Kurve liegender Punkt eine falsche Aussage erzeugt, ist sicher nicht die Kurvengleichung.**

Term- und Gleichungs-Umformungen prüfen



Dieses „Rund-Ecken-Quadrat“ hat die Gleichung

REQ: $\boxed{x^4 + y^4 = 3^4}$ Prüfe, ob die folgenden Gleichungen richtige, erlaubte Umformungen dieser Gleichung sind. Stelle dazu die zu prüfende Gleichung zusammen mit dem Rund-Ecken-Quadrat REQ dar.

a: $\boxed{(x+y)^4 = 3^4}$ b: $\boxed{x^4 y^4 = 3^4}$ c: $\boxed{(x^2+y^2)^2 = 3^4}$

d: $\boxed{y^4 = 3^4 - x^4}$ e: $\boxed{y^4 = (3^2 - x^2)^2}$ f: $\boxed{x^4 + x^2 y^2 + y^4 = 3^4}$

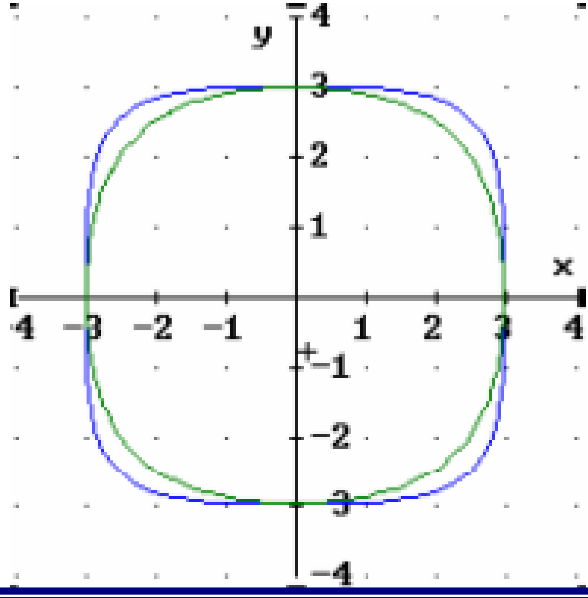
g: $\boxed{x^4 + 2x^2 y^2 + y^4 = 3^{2^2}}$

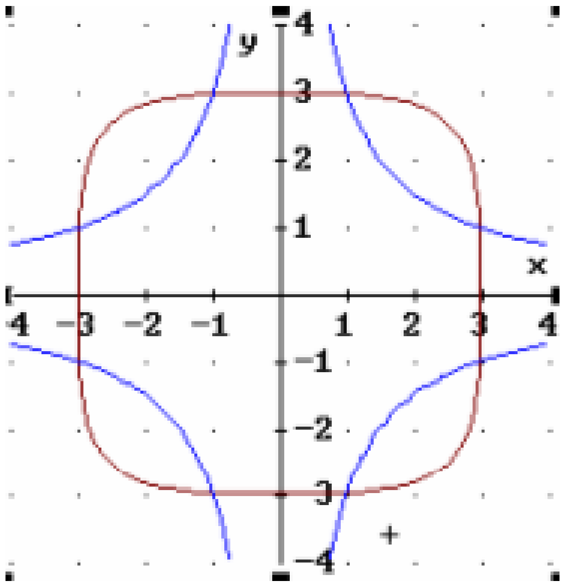
Stelle dar……

Wie soll das gehen?????

Term- und Gleichungs-Umformungen prüfen

Stelle dar……





Merke: Wenn zu der umgeformten Gleichung eine **andere Kurve** erscheint, war die **Umformung sicher falsch**.

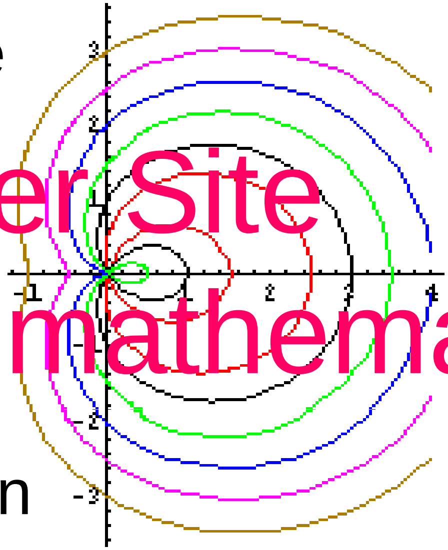
Erscheint dieselbe Kurve, **kann** die Umformung richtig sein. Es kann aber auch sein, dass der Fehler so klein oder so geartet ist, dass man ihn am Computer nicht sieht.

Terme und Gleichungen mit Leben füllen

Das war:

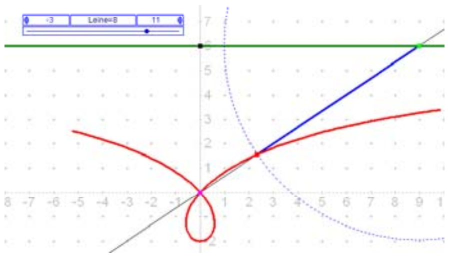
1) Gleichungen mit zwei Variablen haben ein Bild im 2D-Koordinatensystem

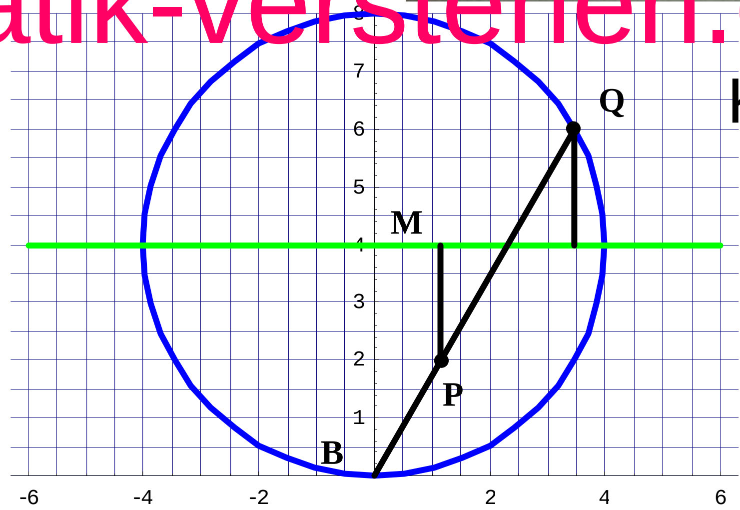
Pascalsche Schnecken



Gärtner-Ellipse

Weitere Konchoiden



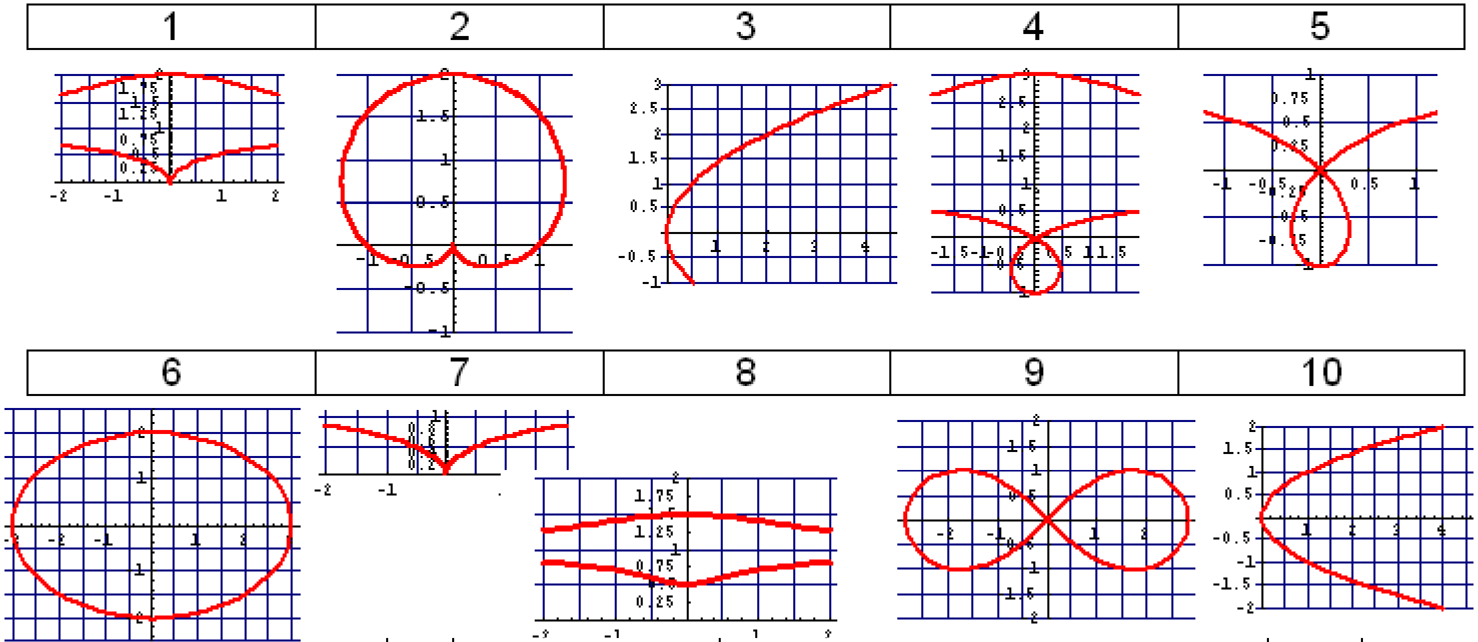


Kissoide

Erkundungen, Parametervariation, „Termsensibilisierung“

Algebraische Kurven — Bildergalerie - Erkundungsaufgabe

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Arbeitsblatt, T³-Tagung Wetzlar 2002



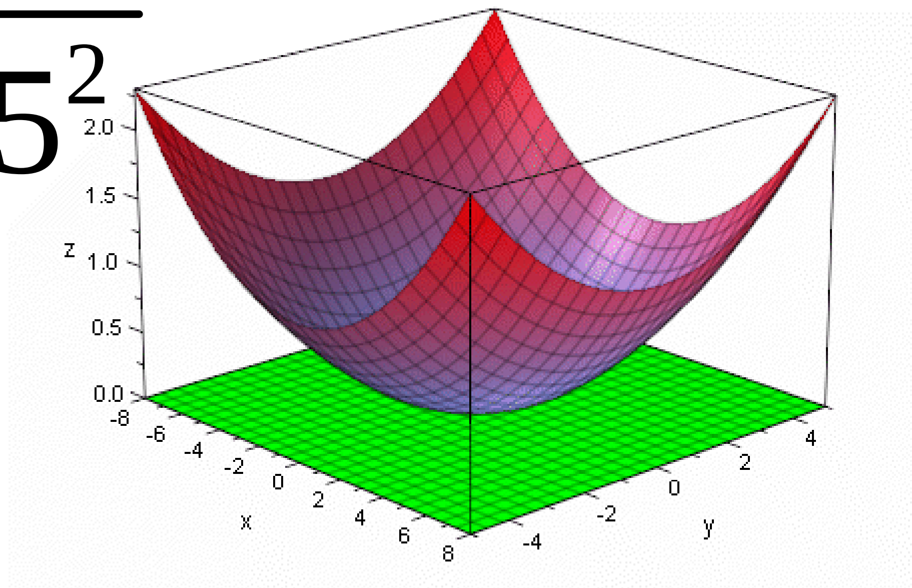
KB	Kartesisches Blatt	$x^3+y^3=3\,k\,x\,y$		
Ro	Rosenkurve Rosette	$(x^2+y^2)^3=c^2\,x^2y^2$		
Bo	Boothsche Lemniskaten	$(x^2+y^2)^2=k^4\left(\dfrac{x^2}{a^2}\pm\dfrac{y^2}{b^2}\right)$ 3 Nr.		a=1, k=2, a=1, k=2, a=1, k=2,
BL	Bernoullische Lemniskate	$(x^2+y^2)^2=c\,(x^2-y^2)$		
Ki	Alg. Kissoiden	$x^2(c-y)=y^2(c(k-1)+y)$	Keine od. 3	Für welche k ergeben sich Ef, St, Tr ?

Terme und Gleichungen mit Leben füllen

2) Funktionen mit zwei Variablen haben ein Bild im 3D-Koordinatensystem

$$z(x,y)=\frac{x^2}{7^2}+\frac{y^2}{5^2}$$

$$\frac{x^2}{7^2}+\frac{y^2}{5^2}=1$$

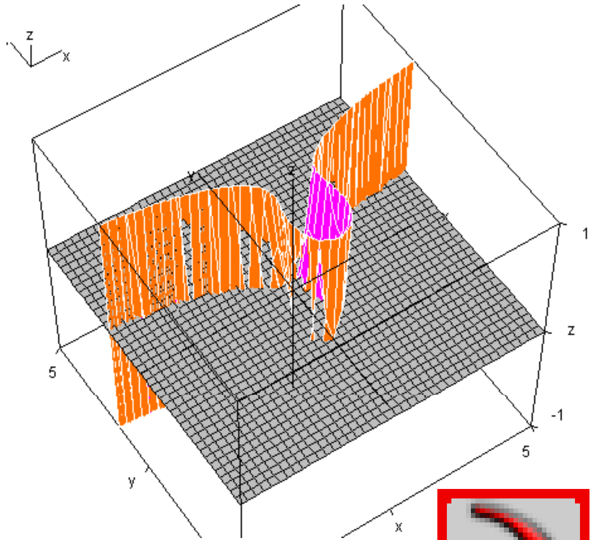


Funktionen mit zwei Variablen haben ein Bild im 3D-Koordinatensystem

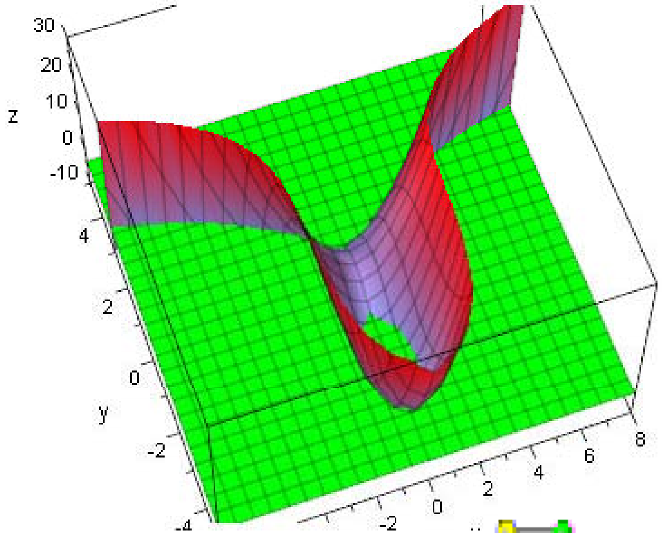
Und mit welchen Werkzeugen kann man das untersuchen?

$$F(x,y) = x^2(c-y) - y^2(c+y)$$

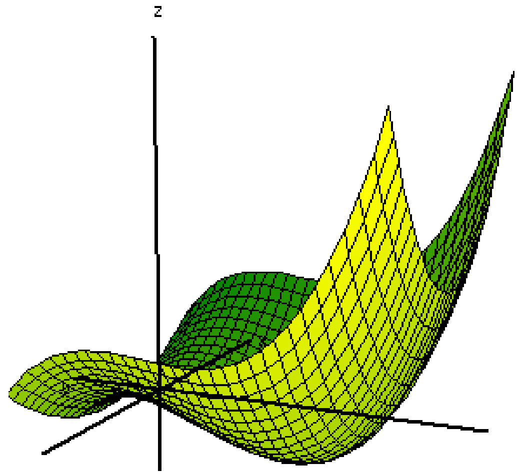
Derive 6



MuPAD 3



Graphenzeichner



Terme und Gleichungen mit Leben füllen

Das war:

2) Funktionen mit zwei Variablen haben ein Bild im 3D-Koordinatensystem

Jetzt kommt:

3) Terme mit zwei oder mehr Variablen werden zu Funktionstermen für Variable und Parameter

Terme mit zwei oder mehr Variablen werden zu Funktionstermen für Variable und Parameter

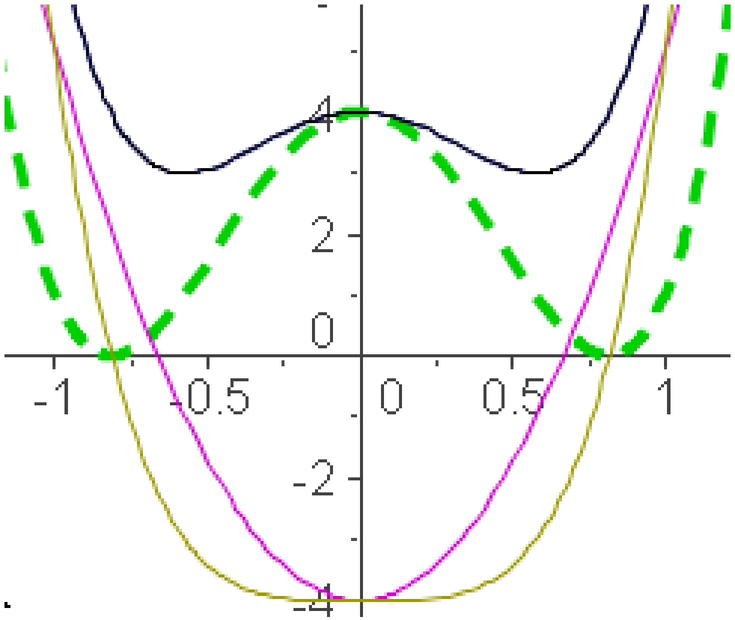
GeoGebra

$$\left(3a^2 - 2b\right)^2$$

Terme mit zwei oder mehr Variablen werden zu Funktionstermen für Variable und Parameter

GeoGebra

$$\left(3a^2 - 2b\right)^2$$



$9x^2 - 4b^2$

$9x^4 - 4b^2$

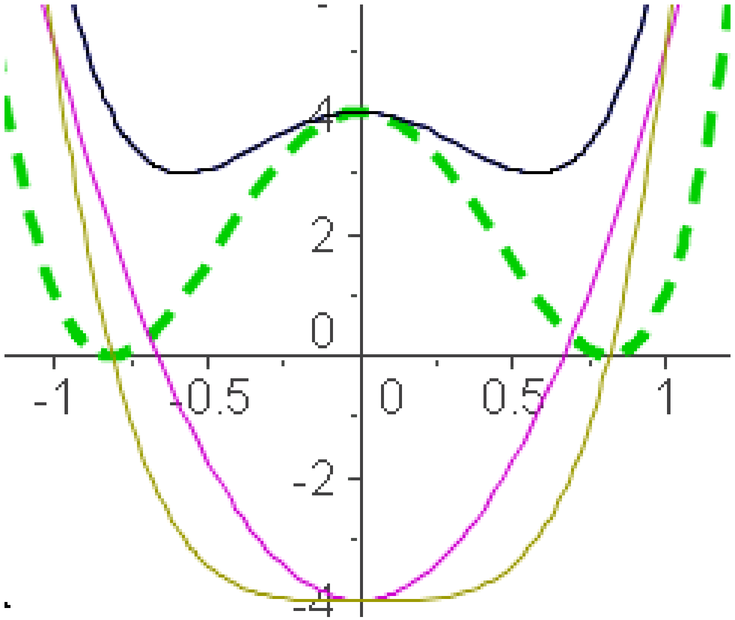
$9x^4 - 6x^2 b + 4b^2$

Leider ist die richtige Umformung noch nicht dabei.

Terme mit zwei oder mehr Variablen werden zu Funktionstermen für Variable und Parameter

GeoGebra

$$\left(3a^2-2b\right)^2$$



$9x^2-4b^2$

$9x^4-4b^2$

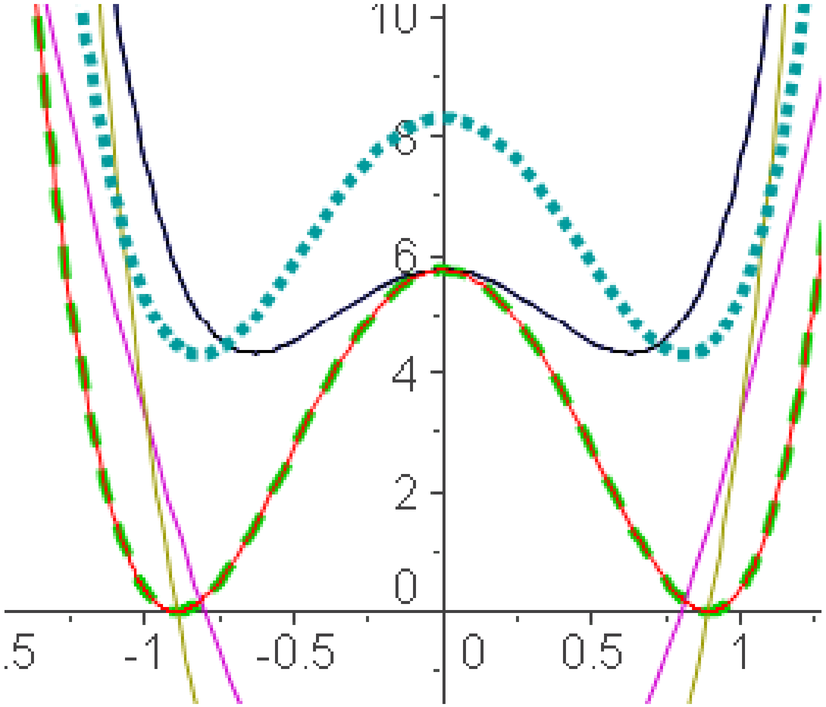
$9x^4-6x^2b+4b^2$

Leider ist die richtige Umformung noch nicht dabei.

Terme mit zwei oder mehr Variablen werden zu Funktionstermen für Variable und Parameter

GeoGebra

$$\left(3a^2 - 2b\right)^2$$



$9x^4-12x^2+4b^4$

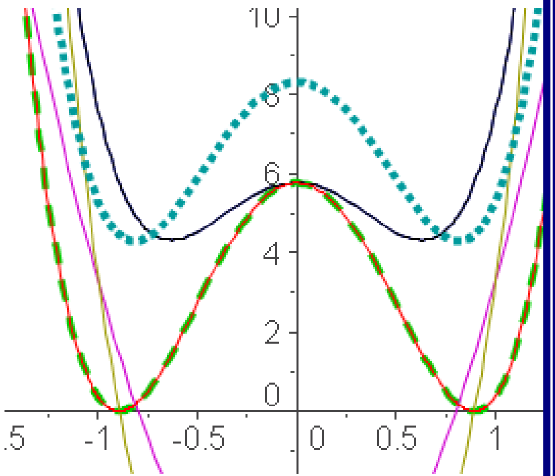
Variere dann b

Pech und Panne

Aber jetzt

$9x^4-12bx^2+4b^2$

Terme mit zwei oder mehr Variablen werden zu Funktionstermen für Variable und Parameter



Merke: Wenn zu dem umgeformten Term eine **andere Kurve** erscheint, war die **Umformung sicher falsch**.

Erscheint dieselbe Kurve, **kann** die Umformung richtig sein. Bleibt es beim Variieren der anderen Parameter dieselbe Kurve, so hast du gute Chancen, dass du richtig umgeformt hast.

Es kann aber immernoch sein, dass der Fehler so klein oder so geartet ist, dass man ihn am Computer nicht sieht.

- Bemerkungen eines Schülers Klasse 8:

Als wir dann am Ende der 8. Klasse doch noch zu den Geraden kamen, war es sehr einfach, denn eine Gerade ist ja der simpelste Fall einer Kurve.

....Mathematikunterricht noch nie solch einen Spaß gemacht. Wir hätten auch gern noch weitergemacht, doch sind Schuljahre oft kürzer als man denkt..

4 Jahre später:
Für mich waren das, was sonst so in Mathe kam, in den folgenden Jahren nicht nur Formeln und irgendwelche Punkte auf dem Papier.

Johannes Härke [Abi 2003]

.....ganz anderer Blick auf Mathe

Evaluation aus Sicht der Studierenden (anonym)

Sicht auf Mathematik ?

Seit langer Zeit mal wieder ein „großes" Erlebnis gehabt. → Mathematik besteht nicht nur aus vorgegebenen fixen Formeln, sondern kann aus selbst gestaltet werden

↳ einer meiner größten Eindrücke

Der Umgang mit Computern und Programmen wie z.B. Derive ist bei diesem Thema sehr sinnvoll, da schnell das "Aussehen" von Gleichungen dargestellt werden kann.

Transportierbarkeit in die Schule

ich denke das meiste was wir in der Vorlesung gemacht haben kann man auch in der Schule verwenden (z.B. ~~Herz~~ Hundekurve), sowie wenn vorhanden das Zeichnen mit dem TI

Evaluation aus Sicht der Studierenden (anonym)

Aller Art von Computern stand ich bisher sehr negativ gegenüber, weil ich fand, sie behindern mich beim denken. Durch die Anwendung jetzt hat man aber nun das Gefühl, man kann sein Wissen jetzt besser verbinden und es sich auch gut bildlich vorstellen.

In der Schule könnte ich mir vorstellen die Kegelschnitte zu behandeln. Insbesonde, wo sie auch in der Lebenswelt der Schüler vorkommen z. B. Lichtkegel.
Die Fadenkonstruktionen finde ich ebenfalls sehr anschaulich für die Schule.

. Auch die Übergänge der einzelnen Kegelschnitte ineinander werden sehr gut deutlich.

Evaluation aus Sicht der Studierenden (anonym)

Mir hat die Vorlesung gezeigt, wie eng die mathematischen Themen zusammen hängen. Sie hat mir ebenfalls gezeigt, mit welchen einfachen Mitteln (SS, Pythagoras, ...) teilweise Formeln hergeleitet werden können.

- Veränderung der Sicht der Mathematik

Ja, mir machen Termumformungen Spaß, ~~d~~ aber dass in den Themen, die wir bearbeitet haben so viel Mathematik abläuft, hätte ich nicht gedacht.
Außerdem bin ich immer wieder baff, wie die "einzelnen" Themen, Gebiete der Mathematik ineinander greifen.

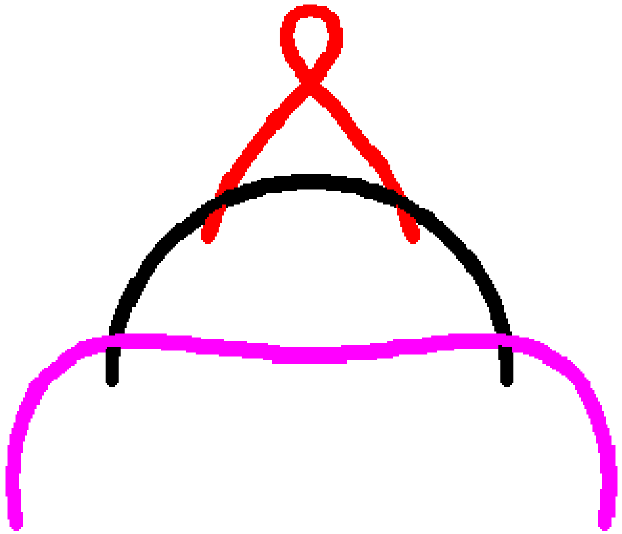
Die Ästhetik in der Mathematik wird von uns sträflich vernachlässigt!

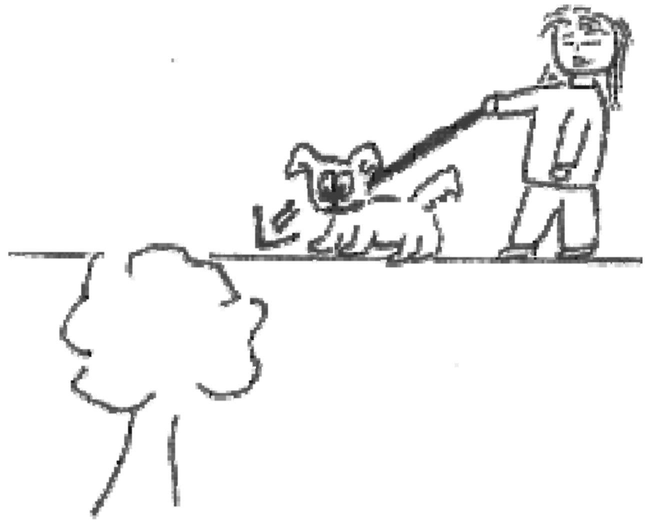
Was ist das Termgeturne denn wert, wenn es weder beherrscht noch verstanden wird?

Die Mathematik-Lehrerschaft stellt die Brille her, durch die die Gesellschaft die Mathematik sieht

Engagieren wir uns für eine reichhaltige und nachhaltige Mathematik im Lehramtsstudium, in der Lehrerfortbildung und in der Schule!

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit





$$(x^2 + y^2)(y - a)^2 = k^2 y^2$$