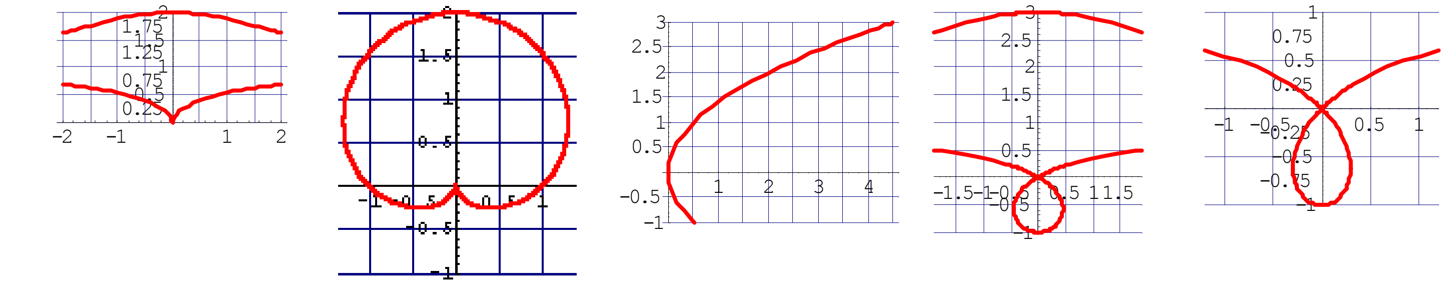
Kurvenheft 2010 -1-

Algebraische Kurven

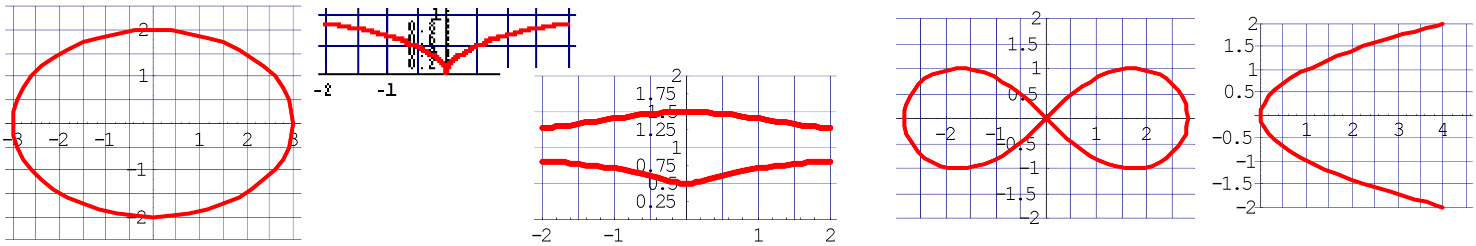
Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Arbeitsblatt, T³-Tagung Wetzlar 2002

Bildergalerie - Erkundungsaufgabe

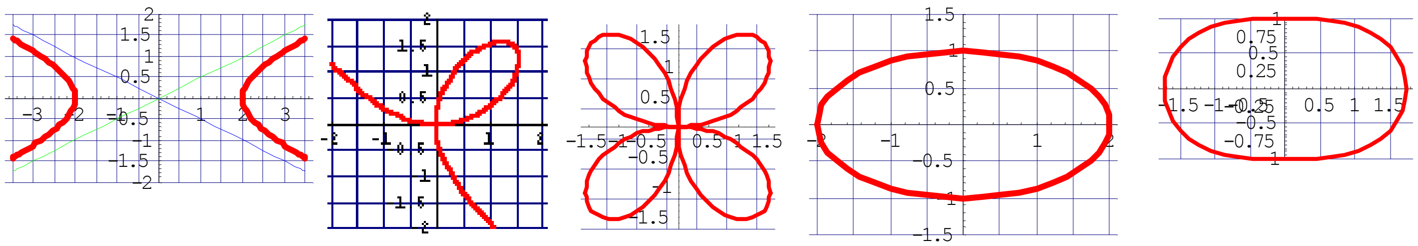
1	2	3	4	5



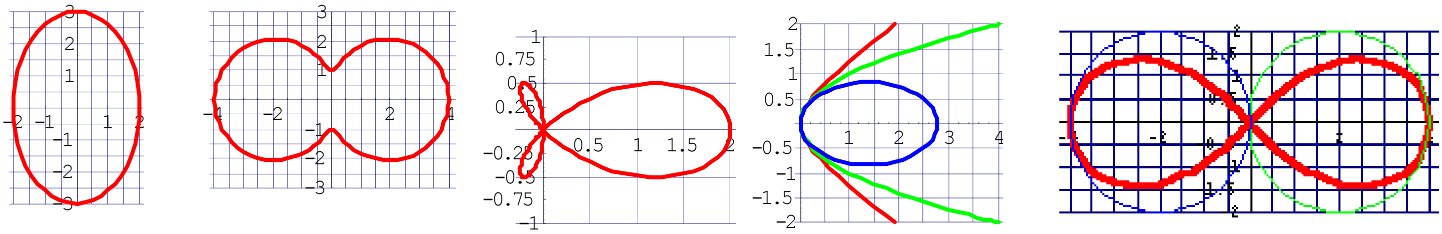
6	7	8	9	10



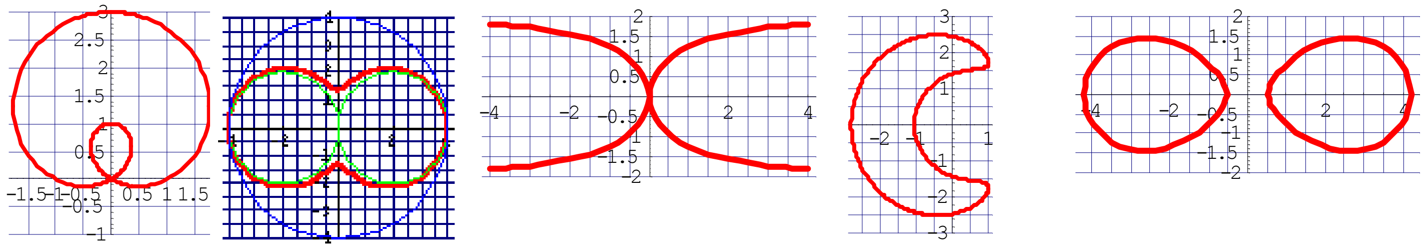
11	12	13	14	15



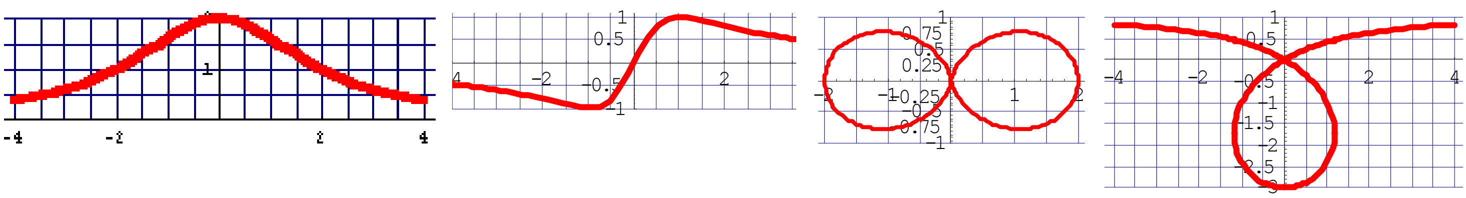
16	17	18	19	20



21	22	23	24	25



26	27	28		29

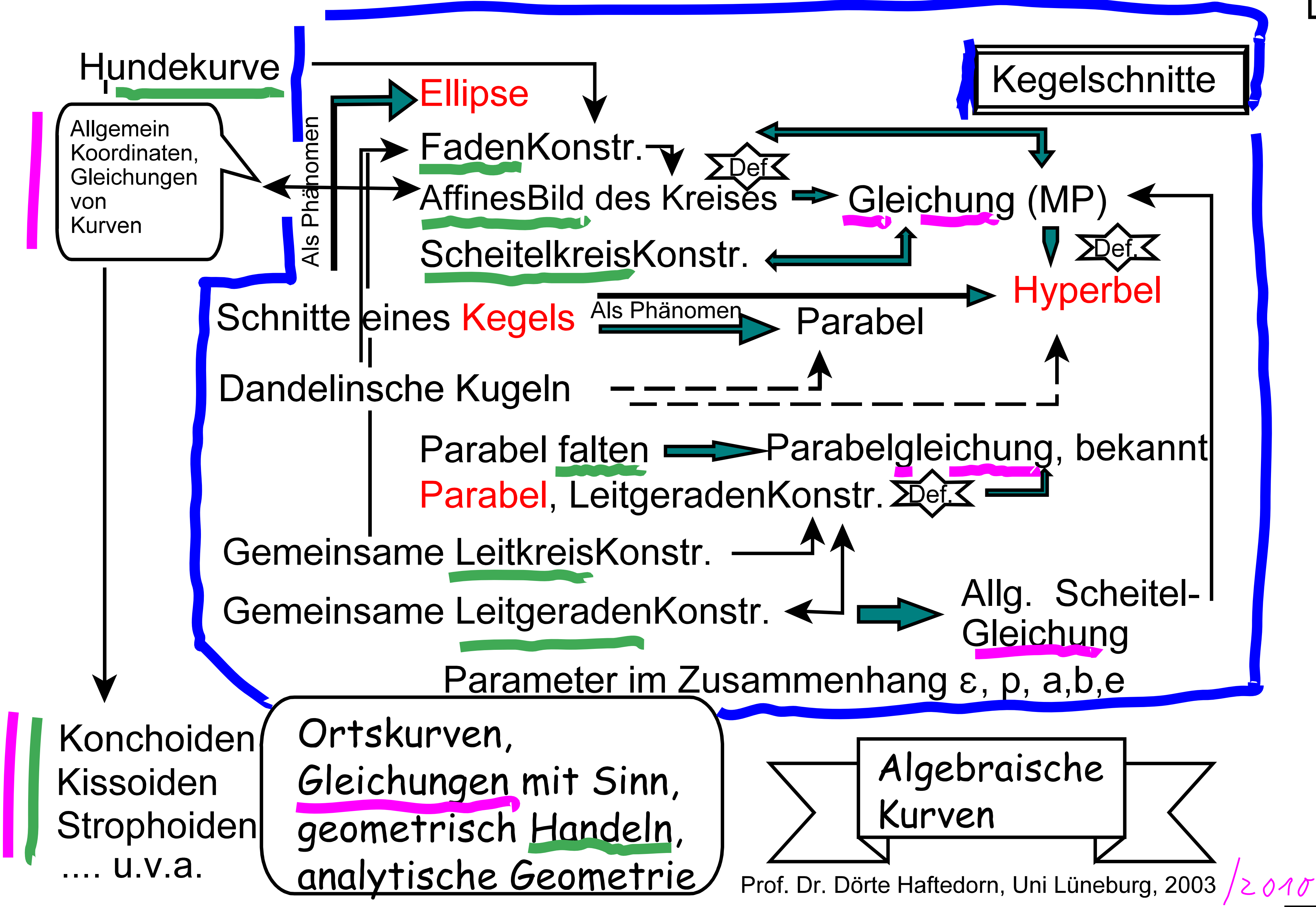


Gleichungen zur Bildergalerie-Erkundungsaufgabe

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Arbeitsblatt, T³-Tagung Wetzlar 2002

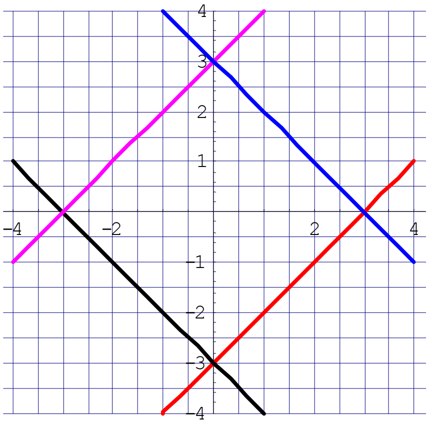
	Kurven	Gleichungen	Nr.	Werte a,b,p,k,....
El	**Ellipse**	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ **3 Nummern**		
Hy	**Hyperbel**	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$		
Pa	**Parabel**	$y^2=2px$		
Ke	**Kegelschnitte**	$y^2=2px-(1-k^2)x^2$ **Allg. Scheitelgleichung** **1 Nummer** **3 Kurven**		**p=1/2** **p=1/2** **p=1/2**
Ko	**Konchoiden**	$(x^2+y^2)(y-a)^2=k^2y^2$ **3 Nummern**		**a=1** **a=1** **a=1**
PS	**Pascalsche Schnecken**	$(x^2+y^2-a\ y)^2=k^2(x^2+y^2)$		
Ka	**Kardioide**	$(x^2+y^2-a\ y)^2=a^2(x^2+y^2)$		
KB	**Kartesisches Blatt**	$x^3+y^3=3kxy$		
Ro	**Rosenkurve Rosette**	$(x^2+y^2)^3=c^2x^2y^2$		
Bo	**Boothsche Lemniskaten**	$(x^2+y^2)^2=k^4\left(\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}\right)$ **3 Nr.**		**a=1, k=2,** **a=1, k=2,** **a=1, k=2,**
BL	**Bernoullische Lemniskate**	$(x^2+y^2)^2=c(x^2-y^2)$		
Ki	**Alg. Kissoiden**	$x^2(c-y)=y^2(c(k-1)+y)$	**Keine od. 3**	**Für welche k ergeben sich Ef, St, Tr ?**
Ef	**Kissoide**	$x^2(c-y)=y^3$ **Efeukurve**		
St	**Strophoide**	$x^2(c-y)=y^2(c+y)$		
Tr	**Trisektrix**	$x^2(c-y)=y^2(3c+y)$		
Ca	**Cassinische Kurven**	$(x^2+y^2)^2-2k^2(x^2-y^2)=4a^2-k^2$		**a=1** **a=1** **Wie entsteht hier BL?**
Dr	**Dreiblatt**	$(x^2+y^2)^2=cx(x^2-y^2)$		
Ka	**Kappakurve**	$y^4=x^2(a^2-y^2)$		
Se	**Serpentinen**	$y(a^2+x^2)=2arx$		**r=1**
Ve	**Versiera der Maria Agnesi**	$y(a^2+x^2)=a^3$		
Ov	**Kartesische Ovale**	$(x^2+y^2-k^2)^2=(c-x)\cdot a$		**c=1**
Ei	**Doppel-Ei-Linie**	$(x^2+y^2)^3=a^2x^4$		

In der Galerie kommen folgende Werte der noch nicht genannten Parameter vor, streiche aus wie beim Silbenrätsel. [a=1], [a=1],[a=2], [a=2], [a=2], [a=4], [b=1], [b=3], [b=4], [c=1], [c=1],[c=1], [c=2], [c=4], [c=8], [k=1/2], [k=0,8], [k=1], [k=1], [k=1], [k=1], [k=1,25], [k=2], [k=2], [k=3], [p=1/2], [p=1], [a=1, b=2], [a=2, b=1], [a=2, b=1], [a=3, b=2], [a=2, k=1], [a=4, k=2]



Hundekurve
Kegelschnitte
Ellipse
FadenKonstr.
Def
Allgemein Koordinaten, Gleichungen von Kurven
Als Phänomen
AffinesBild des Kreises
Gleichung (MP)
ScheitelkreisKonstr.
Def.
Hyperbel
Schnitte eines Kegels
Als Phänomen
Parabel
Dandelinsche Kugeln
Parabel falten
Parabelgleichung, bekannt
Parabel, LeitgeradenKonstr.
Def.
Gemeinsame LeitkreisKonstr.
Gemeinsame LeitgeradenKonstr.
Allg. Scheitel-Gleichung
Parameter im Zusammenhang ε, p, a,b,e
Konchoiden
Kissoiden
Strophoiden
.... u.v.a.
Ortskurven,
Gleichungen mit Sinn,
geometrisch Handeln,
analytische Geometrie
Algebraische Kurven
Prof. Dr. Dörte Haftedorn, Uni Lüneburg, 2003 /2010

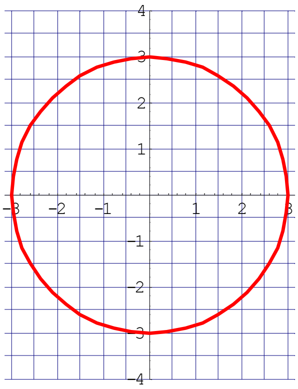
Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Arbeitsblatt, T^3-Tagung Wetzlar 2002



Hier siehst du ein Geradenkaro.
Auf der Geraden rechts oben liegen z.B. die Punkte (-1/4), (0,3); (1,2), (2,1), (3,0), (4,-1),
die Summe aus x-Koordinate und y-Koordinate ist immer 3. Dafür schreibt man $\boxed{x+y=3}$ und nennt diese Gleichung die **Gleichung der Geraden** rechts oben.
Stelle die anderen Geradengleichungen auf.
Lösung:
lo: $\boxed{x-y=-3}$ lu: $\boxed{x+y=-3}$ ru: $\boxed{x-y=3}$ ro: $\boxed{x+y=3}$

Welche der folgenden Gleichungen sind auch richtig? Welche sind falsch?
a: $\boxed{y=x-3}$ b: $\boxed{y-x=3}$ c: $\boxed{y=x+3}$ d: $\boxed{y=3-x}$ e: $\boxed{y=-3x}$ f: $\boxed{x+y+3=0}$

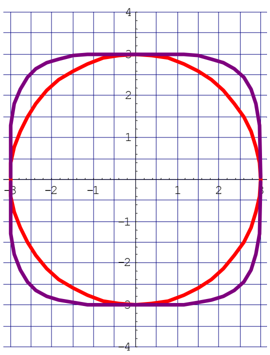
Rechnerische Prüfung: Liegt der Punkt P(-10/-13) auf der Geraden ru ¿
Antwort ja, denn $-10-(-13)=3 \Leftrightarrow -10+13=3 \Leftrightarrow 3=3$ ist wahr.
Liegt der Punkt P(10/13) auf der Geraden ro? Antwort nein, denn $10+13=3 \Leftrightarrow 23=3$ ist falsch.
Liegt der Punkt P(-3,7/6,7) auf der Geraden ro? Antwort ja, denn $-3,7+6,7=3 \Leftrightarrow 3=3$ ist wahr.



Mathusalem hat einen Kreis um den Ursprung mit dem Radius 3. Eine der folgenden Gleichungen soll die Gleichung dieses Kreises sein: a: $\boxed{x^2+y^2=3}$, b: $\boxed{x^2+y^2=3^2}$ oder c: $\boxed{x^2-y^2=9}$
Ganz sicher liegen die Punkte O(0/3), L(-3/0), U(0,-3), R(3/0) auf dem Kreis. Daher prüft Mathusalem mit diesen Punkten:
Prüfe O auf a? $0^2+3^2=3 \Leftrightarrow 9=3$,falsch, also ist a nicht die Kreisgleichung.
Prüfe O auf b? $0^2+3^2=9 \Leftrightarrow 9=9$,richtig, also kann b die Kreisgleichung sein. Prüfe R auf b? $3^2+0^2=3^2 \Leftrightarrow 3^2=3^2$,richtig, also ist kann b immer noch Kreisgleichung sein. Man sagt auch: **R erfüllt Gleichung b**. Prüfe selbst L und U.
Mathix prüft R auf c? $3^2-0^2=3^2 \Leftrightarrow 3^2=3^2$, wahr, also könnte auch c die Kreisgleichung sein.
Mathilde prüft O auf c? $0^2-3^2=9 \Leftrightarrow -9=9$, falsch, also kann c doch nicht die Kreisgleichung sein. Da Mathusalem aber wusste, dass eine der Gleichungen a,b,c richtig ist, muss es b sein.

Man sagt: $\boxed{x^2+y^2=3^2}$ ist die Gleichung des Kreises um den Ursprung mit Radius 3 und der Kreis ist der Graph der Gleichung oder die Kurve zu der Kurvengleichung.

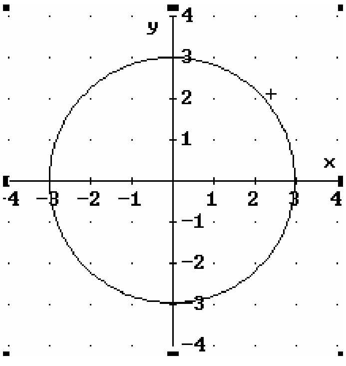
★ Gleichungen mit x und y und Kurven im x-y-Koordinatensystem entsprechen sich. ★



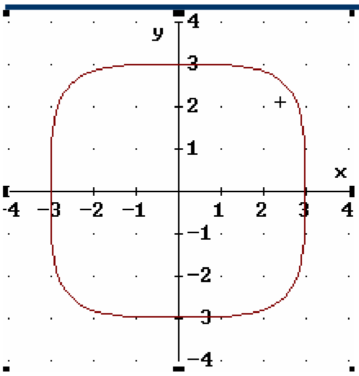
d: $\boxed{x^4+y^4=3^4}$ ist die Gleichung des „Rund-Ecken-Quadrats".
Prüfe, dass auch hier die Punkte O,L,U,R wahre Aussagen erzeugen.
Prüfe P(2,5/3,5) auf d? $2,5^4+2,5^4=3^4 \Leftrightarrow 39,0625+39,0625=81 \Leftrightarrow 78,125=81$, streng genommen falsch, aber P ist nur ungefähr abgelesen, also kann man auch nur „ungefähr gleich" erwarten. Aber sicher ist: P erfüllt nicht b.

Merke: **Alle Punkte, deren Koordinaten aus der Kurvengleichung eine wahre Aussage machen, liegen auf der Kurve.**
Eine Gleichung, mit der ein sicher auf der Kurve liegender Punkt eine falsche Aussage erzeugt, ist sicher nicht die Kurvengleichung.

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Arbeitsblatt, T[3]-Tagung Wetzlar 2002



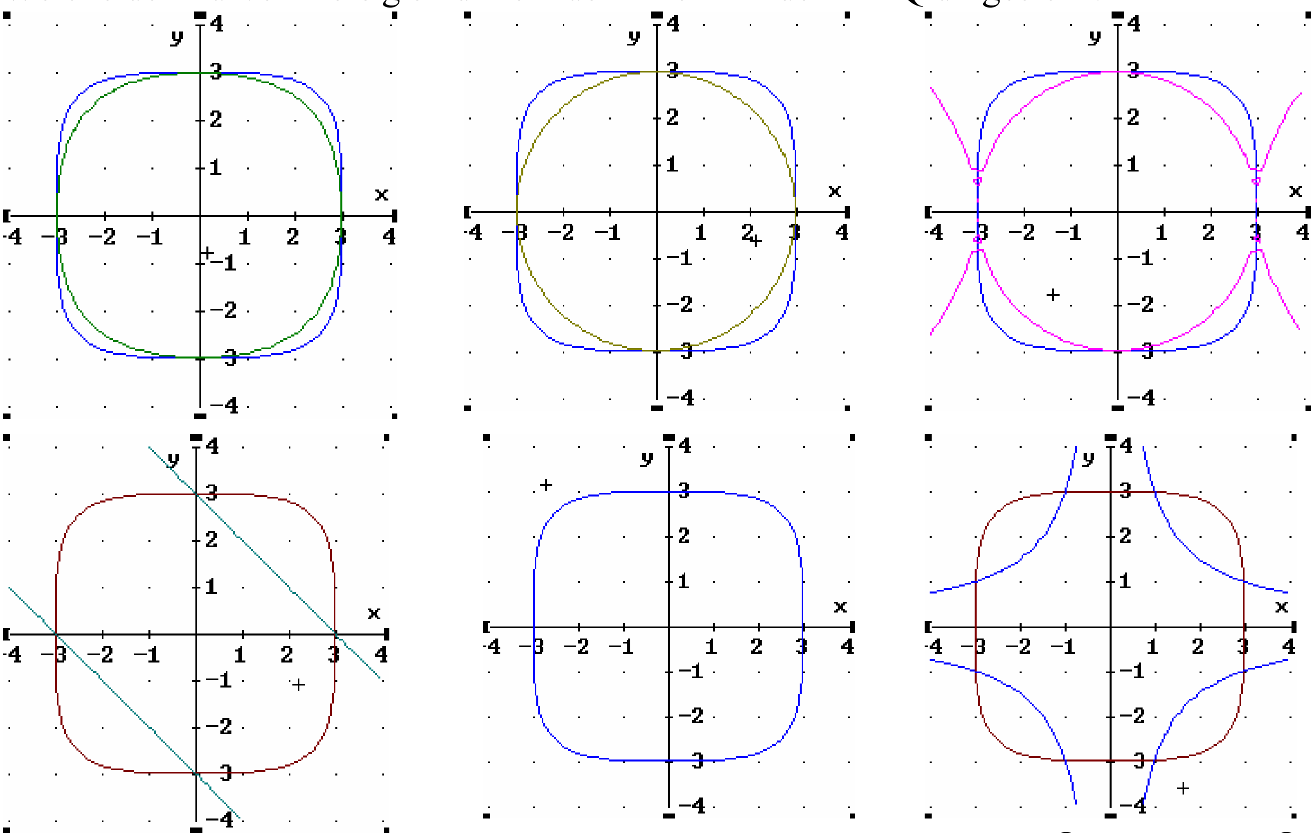
Gib in Derive in der Eingabezeile ein: x^2 + y^2 = 9 und zeichne dazu den Graph. 2D-Graphikfenster, dort
Es ist der Kreis um den Ursprung mit dem Radius 3.
Er hat die Gleichung $\boxed{x^2 + y^2 = 3^2}$, wie aus dem „Zusammenhang-Blatt“ deutlich wurde.
Mit Derive kannst du zu allen dort angegebenen Gleichungen sofort die zugehören Kurven sehen. Probiere das aus.



Dieses „Rund-Ecken-Quadrat“ hat die Gleichung
REQ: $\boxed{x^4 + y^4 = 3^4}$ Prüfe, ob die folgenden Gleichungen richtige, erlaubte Umformungen dieser Gleichung sind. Stelle dazu die zu prüfende Gleichung zusammen mit dem Rund-Ecken-Quadrat REQ dar.

a: $\boxed{(x+y)^4 = 3^4}$ b: $\boxed{x^4 y^4 = 3^4}$ c: $\boxed{(x^2+y^2)^2 = 3^4}$
d: $\boxed{y^4 = 3^4 - x^4}$ e: $\boxed{y^4 = (3^2 - x^2)^2}$ f: $\boxed{x^4 + x^2 y^2 + y^4 = 3^4}$
g: $\boxed{x^4 + 2x^2 y^2 + y^4 = 3^{2^2}}$

Welche der Kurven a bis g sind hier zusammen mit dem REQ dargestellt?



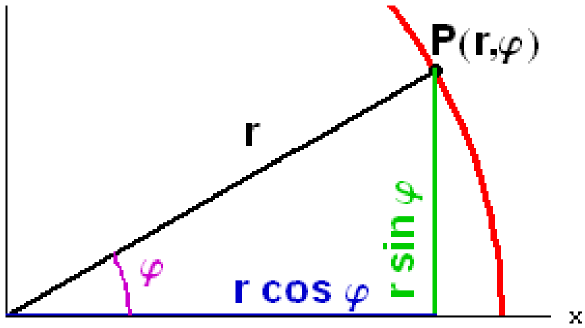
Was ist beim Umformen falsch gemacht?

Lösungen // f //c wie g // e // a // d // b //

Merke: Wenn zu der umgeformten Gleichung eine **andere Kurve** erscheint, war die **Umformung sicher falsch**.
Erscheint dieselbe Kurve, **kann** die Umformung richtig sein. Es kann aber auch sein, dass der Fehler so klein oder so geartet ist, dass man ihn am Computer nicht sieht.

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Uni Lüneburg, 17. Dezember 2003

Ein Punkt P der x-y-Koordinatenebene wird statt mit x und y duch seinen Abstand r vom Ursprung und den Winkel φ charakterisiert, den r mit der "Polarachse", der positiven x-Achse, bildet. r und φ heißen "Polarkoordinaten". x und y heißen "kartesische" oder "rechtwinklige" Koordinaten (nach Descartes=Kartesuis).



Umrechnung gemäß Bild: $x = r\ \cos\varphi, \quad y = r\ \ \sin\ \varphi$

und damit auch $x^2 + y^2 = r^2$

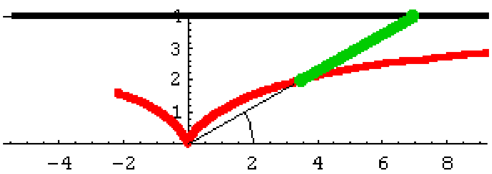
Kurven, die allgemein durch $F(x,y)=0$ beschrieben werden, gehen dann in solche über, die mit $G(r,\varphi)=0$ beschrieben werden. So wie man die erste Gleichung gern nach y auflöst, löst man die Polargleichung gern nach r auf.

Wenn das geht, entsteht $r = g(\varphi)$, meist geschrieben als $r = r(\varphi)$.

In dieser Darstellung kann die Kurve von Computern leicht gezeichnet werden: TI Mode Graph polar, im y=Fenster kann man dann $r(\theta)$ als Term eingeben. θ spielt die Rolle von φ und ist als Taste vorhanden.

Die Hundekurve und alle anderen Konchoiden haben die leicht zu begründende Polargleichung

$r(\varphi) = r_{Straße}(\varphi) \pm k$. Herrchen wandert auf der Straße , bei der Hundekurve oder Konchoide des Nikomedes eine waagerechte Gerade mit der Polargleichung



$r_{geradeStraße}(\varphi) = \dfrac{a}{\sin\ \varphi}$, er hat seinen Hund an der Leine mit der Länge k , der Hund strebt (für -k) stets zum Baum, der im Ursprung platziert wird. Die Hundekurve ist der Weg des Hundes.

Für "+k" entsteht der obere Ast der Konchoide durch den Hund, der von dem Baum wegstrebt.
Nimmt man eine Kreisstraße, entstehen die Pascalschen Schnecken, darunter die Kardioide mit dem Baum auf dem Kreis.

Dann ist die Kreisgleichung für den verschobenen Kreis $r_{KreisStraße}(\varphi) = 2c\ \sin\ \varphi$

und die Gleichung der Pascalschen Schnecken:

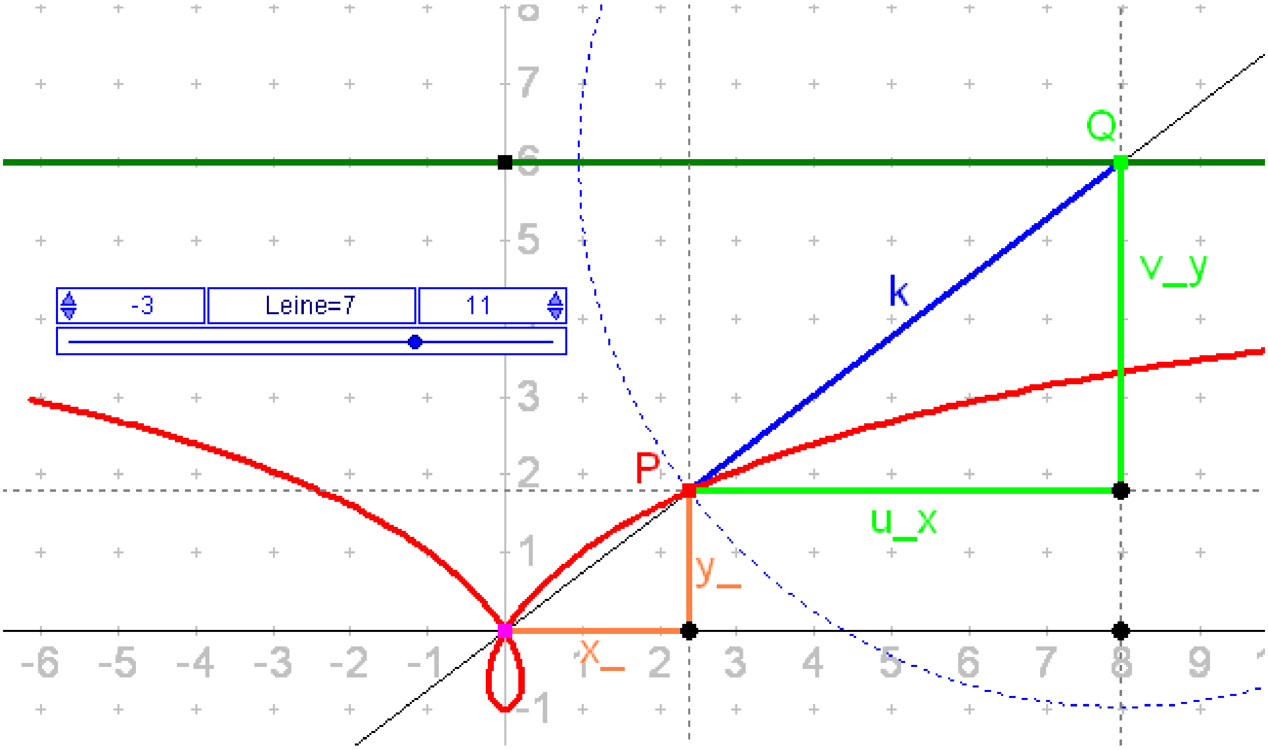
$r(\varphi) = r_{KreisStraße}(\varphi) \pm k = 2c\ \sin\ \varphi + k$. Dies folgt auch aus der algebraischen Gleichung der Pascalschnecken: $(x^2+y^2-2c\,y)^2 = k^2(x^2+y^2)$

Etliche algebraische Kurven, aber auch Spiralen und "Blüten" eignen sich besonders für die Darstellung in Polarkoordinaten.
Im 3D-Raum gibt es entsprechend Kugelkoordinaten und Zylinderkoordinaten.

Kurven Hundekurve: Konchoide des Nikomedes

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Uni Lüneburg, Feb. 2004

Gegeben ist eine “Straße”, hier die Gerade $y = a$, auf der der Punkt Q wandert. Auf der Geraden OQ liegt P in konstantem Abstand k von Q. P kann man als “Hund” auffassen, dessen Herrchen auf der Straße wandert. Der Hund strebt dem Baum “O” zu, hängt aber an der Leine mit Länge k. Die “Hundekurve” ist die Bahn des Hundes, der geometrische Ort von P. Bei allgemeinen Konchoiden kann die Straße irgendeine Kurve sein. *Beim Erkunden merkt man, dass die Konchoide einen zweiten Ast hat.*



Kreis um Q(u,v): $(x-u)^2+(y-v)^2=k^2$ (Pythagoras oder Kreisgleichung)

Ähnlichkeit oder Strahlensatz $\frac{x}{y}=\frac{u}{v}$, Straße in Abstand a: $v=a$.

Zusammen ergibt sich: $(x-\frac{x\,a}{y})^2+(y-a)^2=k^2$

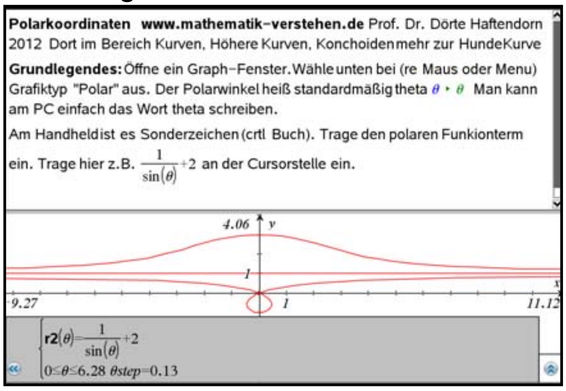
$$x^2(y-a)^2+y^2(y-a)^2=k^2y^2$$

Gleichung der Hundekurve: $$\boxed{(x^2+y^2)(y-a)^2=k^2y^2}$$

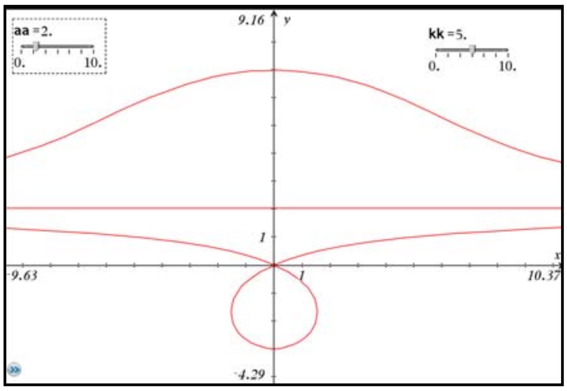
Polardarstellung der Straße im Abstand a: $r_{Straße}=\frac{a}{\sin(\varphi)}$

Polardarstellung der Hundekurve: $r=\frac{a}{\sin(\varphi)}\pm k$.

Grundlage Polarkoordinaten



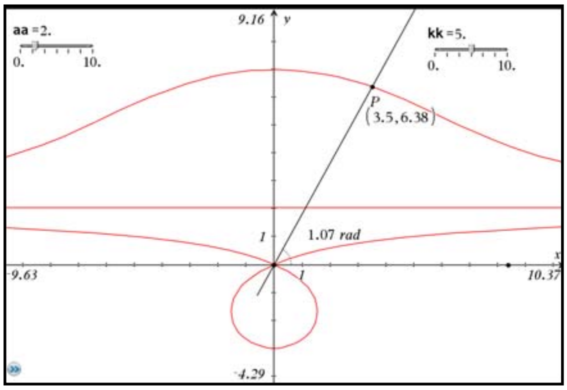
1.1



1.2

Im nächsten Graphfenster
ist wieder die Hundekurve gezeigt, diesmal mit einem Schieberegler für die Leinenlänge k und die Entfernung der Straße vom Baum a.
Übrigens sollte man sich angewöhnen, die Schieberegler stets mit Doppelbuchstaben zu bezeichnen. Anderenfalls wäre es nämlich unmöglich, die Formel mit den allgemeinen Parametern zu notieren:
$r(\theta)=\frac{a}{\sin(\theta)}\pm k$ Es würden dann hier die momentan am Schieberegler eingestellten Werte erscheinen und das Allgemeine würde gar nicht deutlich.

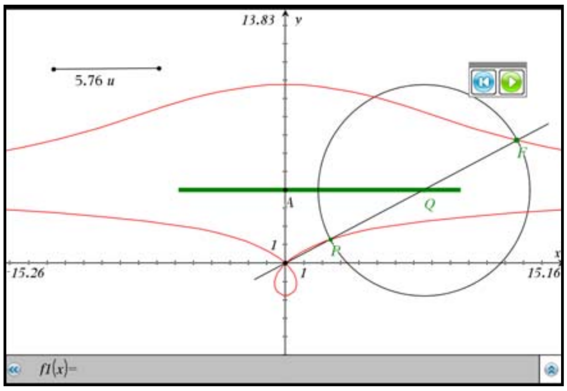
1.3



1.4

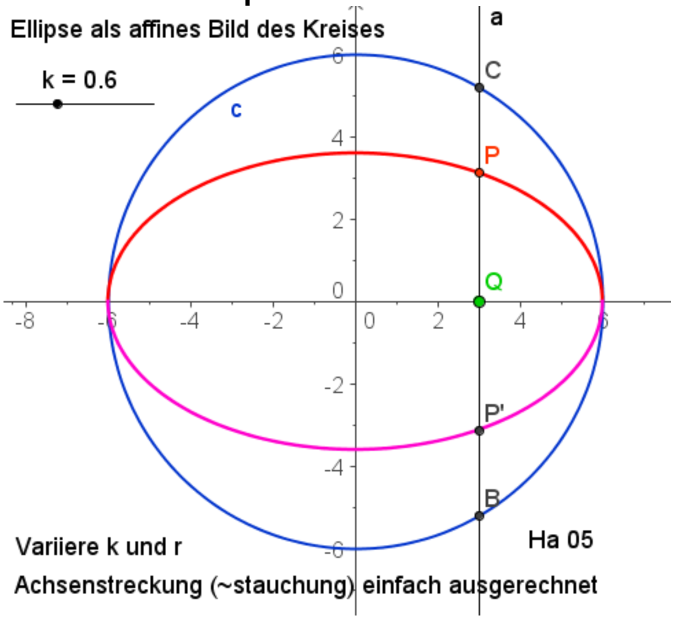
Das nächste Graph-Fenster ist ein Geometrie-Fenster.
Letzteres ist aber auch nichts anderes, es ist nur vorgesehen für jüngere Schulkinder z.B., wenn die Achsen gar nicht sinnvoll sind.
Bei den Algebraischen Kurven und in der Analysis sind aber die Achsen sinnvoll.
Daher ist es besser ein Graph-Fenster zu wählen.
Die **Hundekurve ist nun rein geometrisch erzeugt**, wie man es in GeoGebra auch machen könnte.
Die Geometriewerkzeuge bekommt man am PC im Graph-Fenster mit dem Symbol "Werkzeug" (Hammer und Schraubenschlüssel), am Handheld mit Taste menu.
Die Übertragung der Leinenlänge auf den Kreis um q geleingt mit dem Werkzeug "Zirkel"
Q ist auf der "Straße" frei beweglich, daher kann ma Q animieren.
Das geht mit am PC mit re-Maus Attribute, unterer Eintrag, jetzt eine Zahl eintippen, z.B. 2 (es erscheint dafür ein Kasten). Da geht nach Enter die Animation schon los. Es erscheint zum Steuern ein "Player".

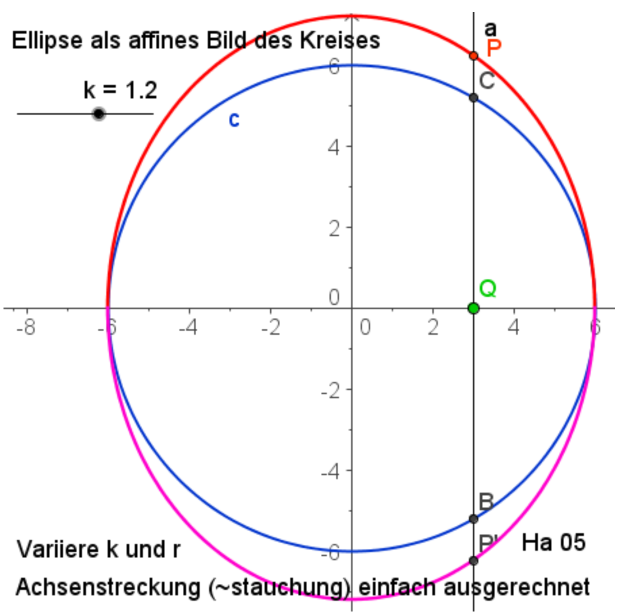
1.5

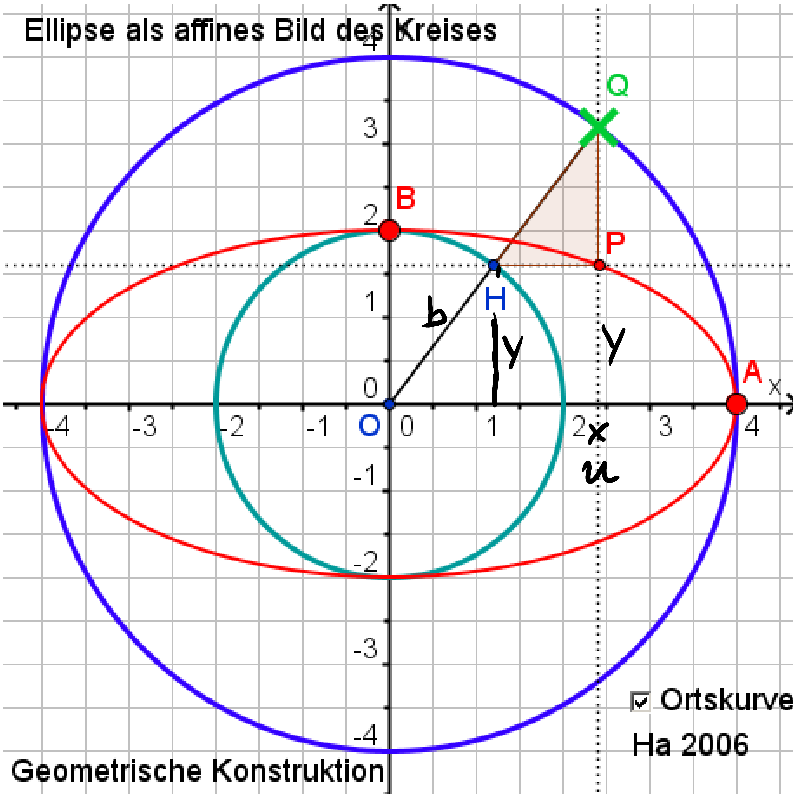


1.6

Kurven: Ellipse als affines Bild des Kreises







Das affine Bild des Kreises definieren wir als Ellipse.

Abbildungen, die parallelentreu sind, heißen affine Abbildungen. Dazu gehören die Kongruenzabbildungen, die Ähnlichkeitsabbildungen, die Scherungen, die Parallelprojektionen (also auch parallelentreue Abbildungen des Raumes 3D in die Ebene 2D). Affine Abbildungen werden in der Linearen Algebra mit einer Gleichung vom Typ

$$\vec{p}\,' = A\,\vec{p} + \vec{t}$$

beschrieben.

Herleitung einer Gleichung für das affine Bild des Kreises.

$Q=(u,v)$, $P=(x,y)$ Weg von Q $u^2+v^2=a^2$

Strahlensatz: $\frac{v}{y}=\frac{a}{b}$; es ist $u=x$

Also $x^2+\left(\frac{a}{b}y\right)^2=a^2$

$$x^2+\frac{a^2y^2}{b^2}=a^2$$

Ellipsengleichung in Mittelpunktslage

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

Ellipse aus gestauchtem Kreis

Algebraische Kurven, **Ellipse als affines Bild der Kreises**

www.mathematik−verstehen.de Prof. Dr. Dörte Haftendorn

Bereich Kurven −> Kegelschnitte −> Ellipse

Scheitelkreiskonstruktion (als Definition der Ellipse

Der violette Kreis heißt Hauptkreis oder Hauptscheitelkreis.

Sein Radius heißt "große Halbachse", meist mit a bezeichnet.

Der blaue Kreis heißt Nebenkreis oder Nebenscheitelkreis.

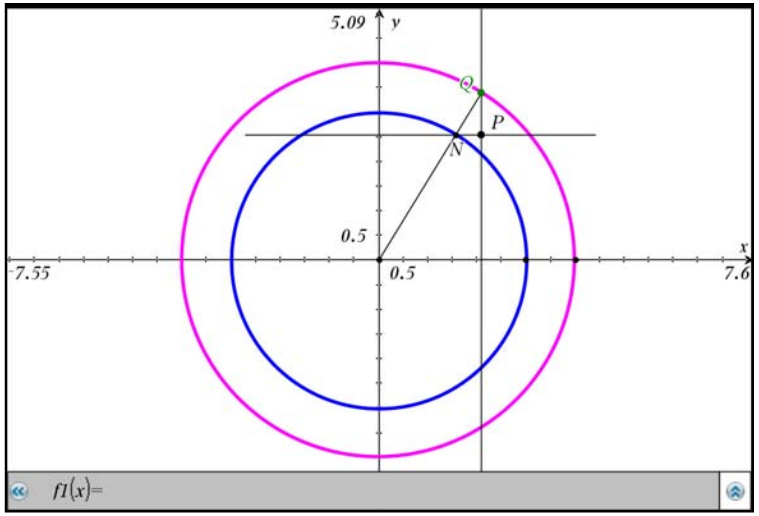
Sein Radius heißt "kleine Halbachse", meist mit b bezeichnet.

Der Hauptkreis wird senkrecht gestaucht und zwar mit dem Faktor

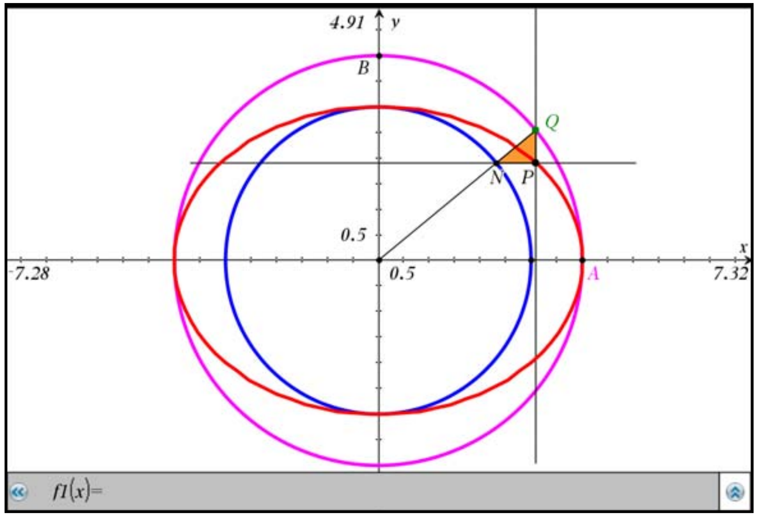
$k=\frac{b}{a}$ Hauptkreis: $u^2+v^2=a^2$ und nun $\frac{v}{y}=\frac{a}{b}$. Dieses folgt aus dem Stahlensatz, wenn man sich durch N eine Senkrechte denkt. Es ist $u=x$.

Also gilt $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ Dies ist die **Ellipsengleichung** in Mittelpunktslage.

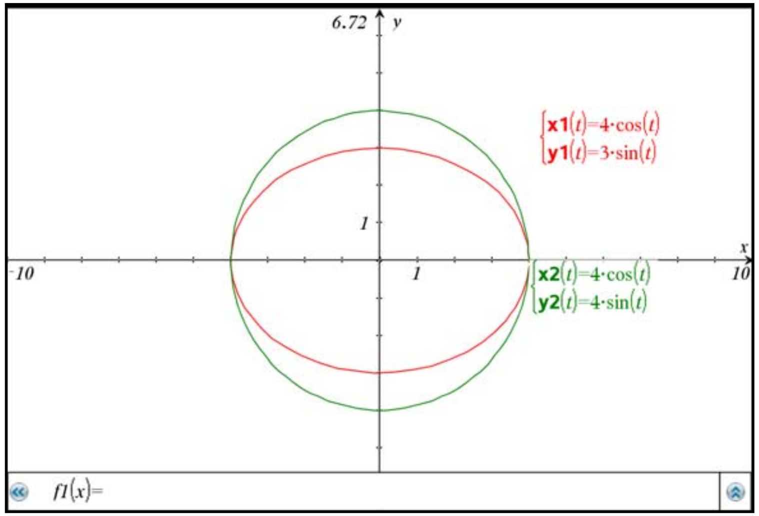
1.1



1.2

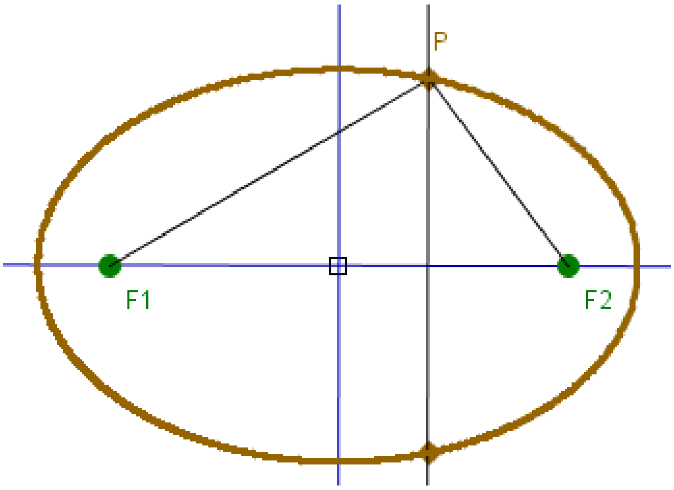


1.3



1.4

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Uni Lüneburg, 6. November 2002



P ist der geometrische Ort aller Punkte, die von zwei festen Punkten eine konstante Abstandssumme haben.

Behauptung:
Die Ortskurve ist eine Ellipse

Beweis:
Bekannt sei: Die Mittelpunktsgleichung einer Ellipse ist $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ mit der großen Halbachse a und der kleiner Halbachse b. Diese Gleichung ist herzuleiten.
Legt man p auf die x-Achse, so sieht man $Faden = 2a$.

Dann gilt also nach Konstruktion $L_1 + L_2 = 2a \quad \langle 1 \rangle$.

Pythagoras liefert $\quad L_1^2 = y^2 + (x+e)^2 \quad \langle 2 \rangle$ mit $e = \overline{OF}_2$.

Ebenso $\quad L_2^2 = y^2 + (x-e)^2 \quad \langle 3 \rangle$

Subtraktion $\quad L_1^2 - L_2^2 = 4xe \quad \langle 4 \rangle = \langle 2 \rangle - \langle 3 \rangle$

3. Binom.F. $\quad (L_1 - L_2)(L_1 + L_2) = 4xe \quad \langle 4 \rangle$

Division und $\langle 1 \rangle \Rightarrow \quad (L_1 - L_2) = \frac{2xe}{a} \quad \langle 5 \rangle$

Addition zu $\langle 1 \rangle \Rightarrow \quad 2L_1 = 2a + \frac{2xe}{a} \quad \langle 6 \rangle$

Quadriert $\frac{\langle 6 \rangle^2}{4} \Rightarrow \quad L_1^2 = a^2 + 2xe + \frac{x^2 e^2}{a^2} \quad \langle 6' \rangle$

In $\langle 2 \rangle \Rightarrow \quad a^2 + 2xe + \frac{x^2 e^2}{a^2} = y^2 + (x+e)^2 \quad \langle 7 \rangle$

Sortieren $\quad x^2 (1 - \frac{e^2}{a^2}) + y^2 = a^2 - e^2 \quad \langle 7' \rangle$

Mit $\quad b^2 := a^2 - e^2 \quad \langle 8 \rangle$ folgt $\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \langle 7'' \rangle$

Gleichung $\langle 8 \rangle$ ist auch unmittelbar einsichtig. q.e.d.

Also ergibt sich aus der Gärtnerkonstruktion die Ellipsengleichung, damit ist die Bezeichnung “Gärtnerellipse” oder “Fadenkonstruktion der Ellipse” gerechtfertigt.

f sei eine zweimal differenzierbare Funktion. Dann gilt für die

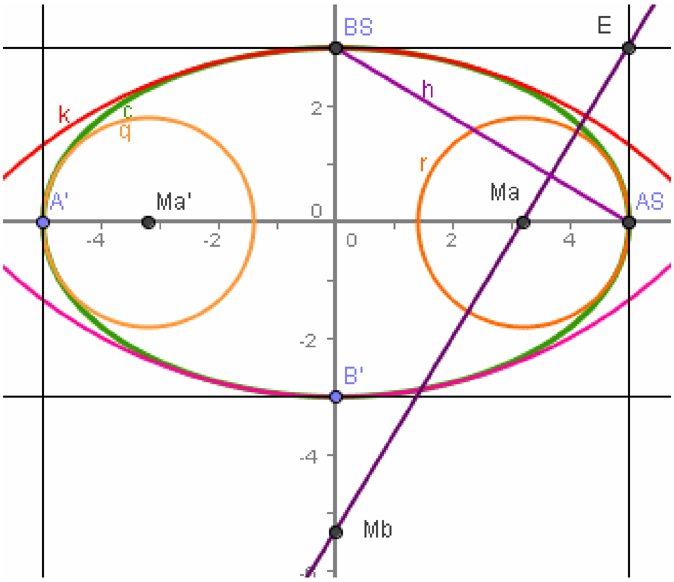
Krümmung $\kappa(x)=\dfrac{f''(x)}{\sqrt{\left(1+f'(x)^2\right)^3}}$ und den Krümmungsradius $r(x)=\dfrac{1}{\kappa(x)}$

Im Nebenscheitel der Ellipse (hier BS) ist $x=0$ und $f'(0)=0$.

Daher gilt dort $\kappa(0)=f''(0)$ und $r(0)=\dfrac{1}{f''(0)}$.

Implizite Ableitungen

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$
$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}y'=0$$
$$\frac{2}{a^2}+\frac{2y'}{b^2}y'+\frac{2y}{b^2}y''=0$$



Nun ist im Nebenscheitel *y'* =0.

$$\frac{2}{a^2}+\frac{2b}{b^2}y''=0$$
$$\frac{2}{a^2}+\frac{2}{b}y''=0$$

Daher gilt:

$$y''=\frac{-b}{a^2}$$
$$r=\frac{-a^2}{b}$$

Aus Symmetriegründen gilt für den Radius des Hauptscheitel-Krümmungskreises $R=\dfrac{b^2}{a}$

Man kann die Mittelpunkte der Krümmungskreise auf die gezeichnete Art auch geometrisch finden.
Man verbinde dazu die Punkte (0/b) und (a/0) und fälle auf diese Strecke von E= (a/b) das Lot.
Es schneidet die x- und die y-Achse in den gesuchten Punkten.
Weisen Sie nach, dass diese Konstruktion richtig ist.

Beweis: g =MbE hat die Steigung $m=\dfrac{a}{b}$, also gilt $\dfrac{b}{R}=\dfrac{a}{b}$, es folgt $R=\dfrac{b^2}{a}$. Weiter gilt

$\dfrac{r}{a}=\dfrac{a}{b}$, und damit $r=\dfrac{a^2}{b}$, r als Strecke Mb BS.

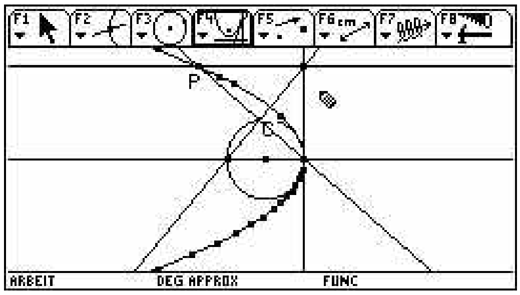
Lehrerfortbildung
Helke Giesemann, Dr. Dörte Haftendorn, Richard Hansen, Reinhard Kind, Susanne Schläger, Manfred Schneider

Konstruktion:

C wandert auf einem Thaleskreis auf dessen Durchmesser rechts eine Tangente errichtet ist. Die eine verlängerte Thalesdreiecksseite schneidet die Tangente rechts in einem Hilfspunkt B, in dem eine Parallele zum Durchmesser gezeichnet wird. Sie schneidet die Verlängerung der anderen Dreiecksseite in P. Gesucht ist die Ortskurve von P.

Hilfen

Beginne mit der Waagerechten und dem Kreis. Setze C auf den Kreis. Sorge für die anderen Linien.
Spurverfolgung: Trace (Spur) P mit F7 2 Trace on.
Animation von C Enter, Hand halten Zwille ziehen
Ortskurve im Ganzen: F4 A Locus , Gehe zu P This Point Enter, dann zu dem Hilfspunkt B ..Enter , abwarten.
Wenn die Ortskurve zu eckig ist: ✦F # of Locus Points 50 oder mehr.



Beobachtung:

Die Ortskurve ist eine Parabel.

Beweis: Dreieck CPB ist ähnlich dem Dreieck, das C mit dem Durchmesser bildet. O sei der Scheitel. BO=x, BP = y dann gilt

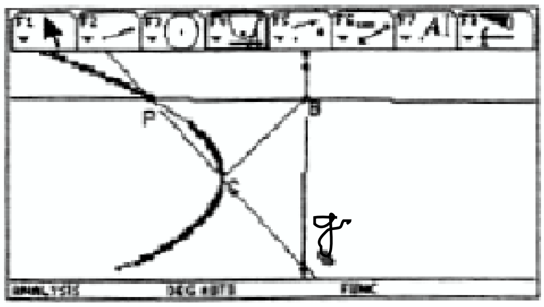
$$\frac{y}{x} = \frac{x}{2r}$$

Konstruktion:

B wandert auf einer Geraden g . C liegt fest. Die Senkrechte auf der Strecke CB in C schneitet die Senkrechte in B auf g in P. Gesucht ist die Ortskurve von P.

Hilfen

Beginne mit der Senkrechte, nimm aber besser eine Strecke (F2 5 Segment) . Sorge für die anderen Linien.
Spurverfolgung: Trace (Spur) P mit F7 2 Trace on.
Animation von B enter, Hand halten Zwille ziehen
Ortskurve im Ganzen: F4 A Locus , Gehe zu P This Point Enter, dann zu dem Hilfspunkt B ..Enter , abwarten.
Wenn die Ortskurve zu eckig ist: ✦F # of Locus Points 50 oder mehr.



Beobachtung:

Die Ortskurve ist eine Parabel.

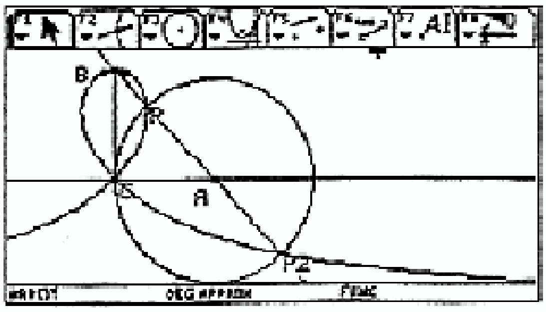
Beweis: Ursprung in C. Im Dreieck CPB ist x die Höhe, Ist q der Abstand von C zur Geraden G, dann ist y + q die Strecke PB. Damit gilt nach dem

Höhensatz $x^2 = y \cdot q$

Es besteht ein erheblicher Unterschied in der Hantierung mit Ti92 und Euklid. Der TC ist wohl in Schülerhand zu aufwendig in der Bedienung. Bei Euklid bestehen keine Bedenken.

Konstruktion:

Auf BC ist in C die Senkrechte g (Hier waagerecht.) errichtet. Der Kreis um A auf g mit dem Radius AC schneidet BA in P und P2. Gesucht ist der geometrische Ort von P und P2, wenn A auf g wandert. Bei dieser Konstruktion wird der Punkt B nie ganz erreicht.



Beobachtung:

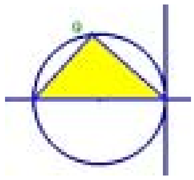
Es entsteht eine Kurve mit Schlaufe, die man Strophoide (Seilkurve) nennt.

Resumee:

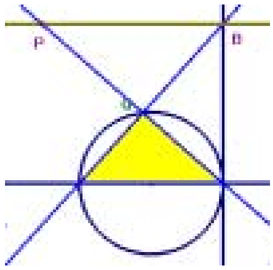
Sehr lohnende Aufgaben mit einfachen Konstruktionen, die auf die Parabel führen und sich mit Methoden von Kl. 9 begründen lassen. Sie verlangen allerdings nach einer Abrundung durch Fälle, die nicht auf Parabeln führen.

In dieser Richtung eignen sich viele andere algebraische Kurven.

Konstruktion: Ort_1



Q wandert auf einem Thaleskreis auf dessen Durchmesser rechts eine Tangente errichtet ist.
Das Thalesdreieck ist eingezeichnet, Welche Eigenschaft hat es?

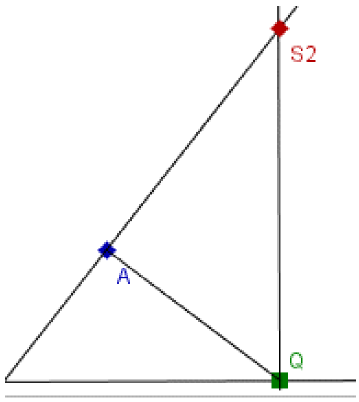


Die eine verlängerte Thalesdreiecksseite schneidet die Tangente rechts in einem Hilfspunkt B, in dem eine Parallele zum Durchmesser gezeichnet wird. Sie schneidet die Verlängerung der anderen Dreiecksseite in P.
Gesucht ist die Ortskurve von P.

Hilfen für TI

Beginne mit der Waagerechten und dem Kreis.
Setze Q auf den Kreis. Sorge für die anderen Linien.
Spurverfolgung: Trace (Spur) P mit F7 2 Trace on.
Animation von Q, Enter, Hand halten Zwille ziehen
Ortskurve im Ganzen:
F4 A Locus , Gehe zu P This Point Enter, dann zu dem Hilfspunkt B ..Enter , abwarten.
Wenn die Ortskurve zu eckig ist: Format, Number of Locus Points 50 oder mehr.

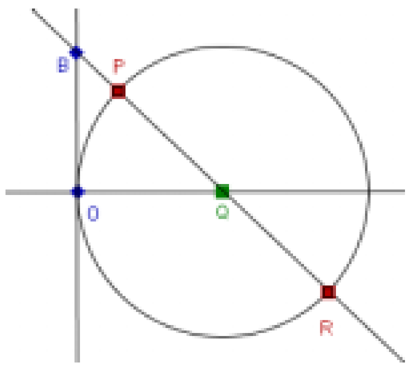
Konstruktion: Ort_2



Q wandert auf einer Geraden g (waagerecht).
A liegt fest, außerhalb von g.
Die Senkrechte auf der Strecke QA in A schneidet die Senkrechte auf g in Q im Punkt P. (S2=P)
Gesucht ist die Ortskurve von P.

Hilfen
Beginne mit der Waagerechten mit Q, A frei setzen. Strecke AQ.
Senkrechten bei Q und bei A.

Konstruktion: Ort_3



Auf der Geraden g ist in O die Senkrechte errichtet.
Auf dieser liegt B.
Der Kreis um Q auf g mit dem Radius QO schneidet AB in P und R.

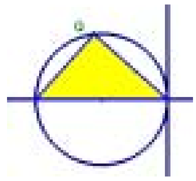
Gesucht ist der geometrische Ort von P und R, wenn Q auf g wandert.

Bei dieser Konstruktion wird der Punkt B nie ganz erreicht.

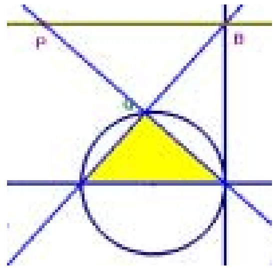
Beobachtung:

Es entsteht eine Kurve mit Schlaufe, die man **Strophoide (Seilkurve)** nennt.

Konstruktion: Ort_1

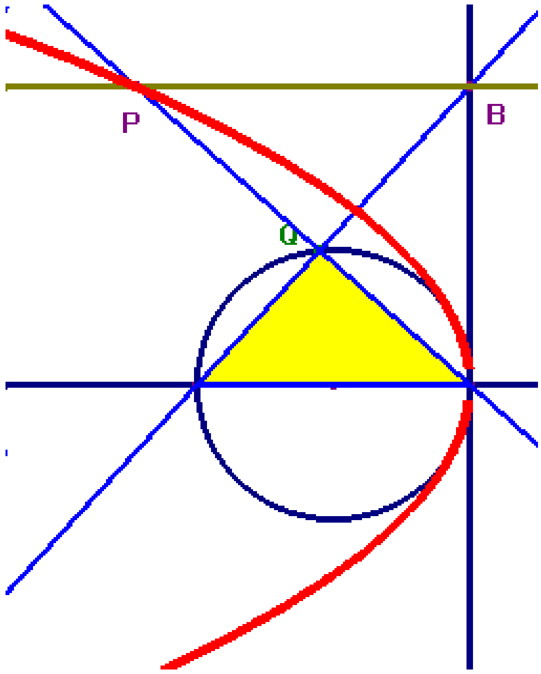


Q wandert auf einem Thaleskreis auf dessen Durchmesser rechts eine Tangente errichtet ist.
Das Thalesdreieck ist eingezeichnet, Welche Eigenschaft hat es?

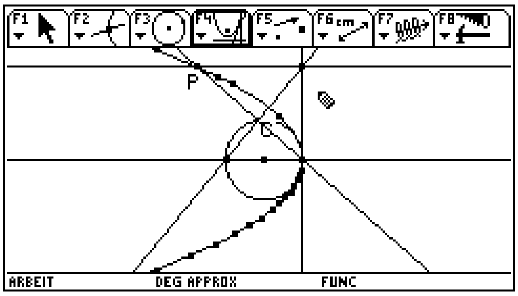


Die eine verlängerte Thalesdreiecksseite schneidet die Tangente rechts in einem Hilfspunkt B, in dem eine Parallele zum Durchmesser gezeichnet wird. Sie schneidet die Verlängerung der anderen Dreiecksseite in P.
Gesucht ist die Ortskurve von P.

Interaktiv mit Z.u.L.



Beobachtung: Die Ortskurve sieht aus wie eine Parabel.



Behauptung: Die Ortskurve ist wirklich eine Parabel

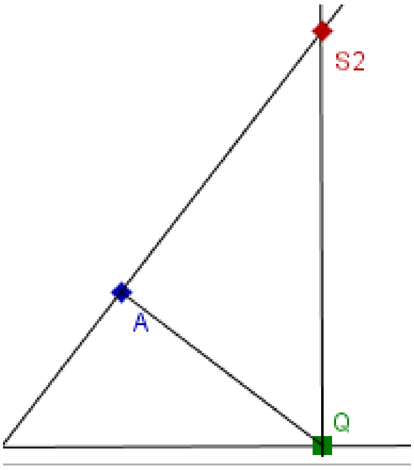
Beweis:
Das Dreieck QPB ist rechtwinklig und dem Thalesdreieck ähnlich. Ebenso Dreieck BPO und BOT.
Man betrachte dazu Wechselwinkel an Parallelen.

Mit $x = \overline{BO}$ und $y = \overline{BP}$ gilt $\frac{y}{x} = \frac{x}{2r}$.

Dabei ist r der Radius.

Also gilt $y = \frac{1}{2r} x^2$. (y-Achse nach links, x-Achse nach oben) q.e.d.

Konstruktion: Ort_2

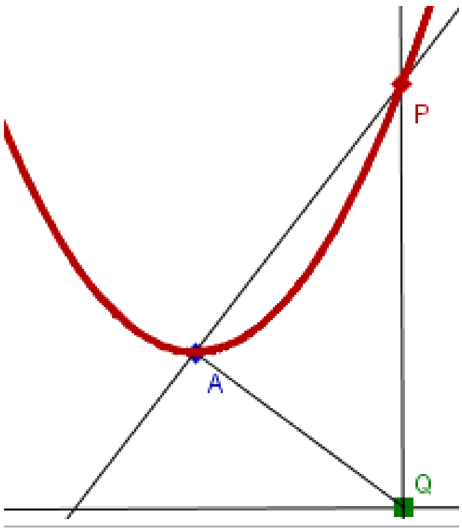


Q wandert auf einer Geraden g . A liegt fest.
Die Senkrechte auf der Strecke QA in Q schneidet die Senkrechte in A auf g in P.
Gesucht ist die Ortskurve von P.

Hilfen
Beginne mit der Waagerechten mit Q, A frei setzen. Strecke AQ.
Senkrechten bei Q und bei A.

Beobachtung:

Die Ortskurve sieht aus wie eine Parabel.

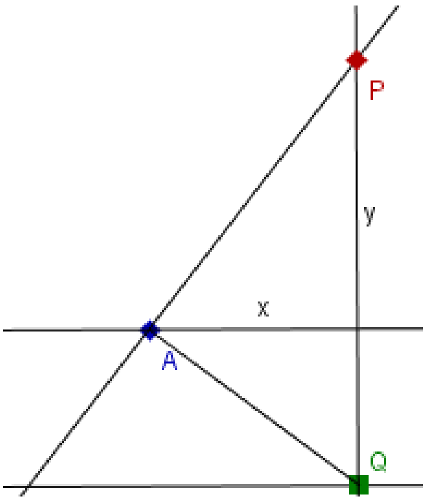


Behauptung:

Es ist wirklich eine Parabel.

Beweis:

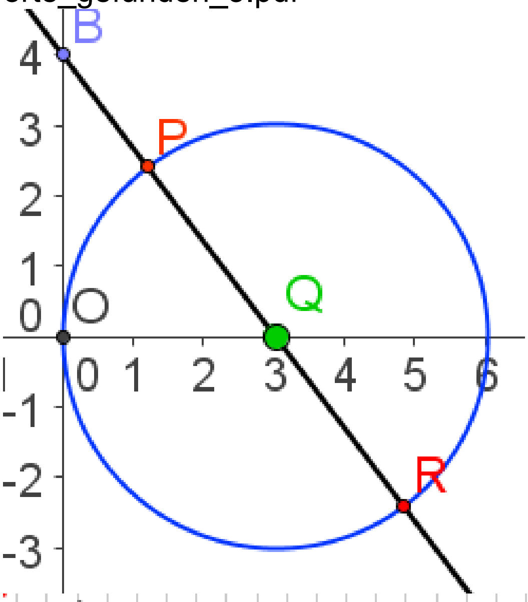
Wahl der Koordinatensystems
mit Ursprung in A in üblicher Art.
Da das Dreieck QAP rechtwinklig ist,
gilt der Höhensatz

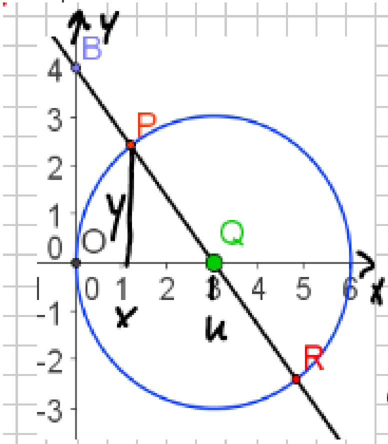


$x^2 = y \cdot a$ wobei a der Abstand von A zur Ausgangsgeraden ist.

Orte erkunden 3 Orte gefunden

Prof. Dr. Dörte Haftendorn 2002, 16.5.08   MuPAD 4 Update vom 16. Mai 08
http:haftendorn.uni-lueneburg.de   **www.mathematik-verstehen.de**
++
orte_gefunden_3.pdf





$Q=(u,0)$ ① Strahlensatz

$B=(0,b)$ $\frac{u}{b}=\frac{u-x}{y}$ $\Leftrightarrow uy = ub - bx$

$P=(x,y)$ $ub - uy = bx$

$u = \frac{bx}{b-y}$

② P auf Kreis

$(x-u)^2 + y^2 = u^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 2xu + y^2 = 0$

① in ② $x^2 - 2x\frac{bx}{b-y} + y^2 = 0 \quad |\cdot(b-y)$

$x^2(b-y) - 2bx^2 + y^2(b-y) = 0$

$-x^2y - bx^2 + y^2(b-y) = 0$

$y^2(b-y) = x^2(b+y)$

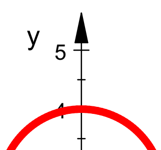
oder

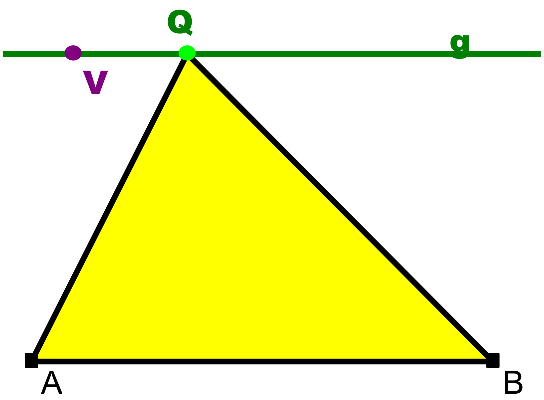
$b(y^2-x^2) = y(y^2+x^2)$

Strophoide

```
plot(plot::Implicit2d(y^2*(b-y)=x^2*(b+y)|b=4,
         x=-6..6,y=-4..5), LineColor=[1,0,0],
LineWidth=1);
```

Weiteres im Internet,
Kurven, Bereich: Erkunden

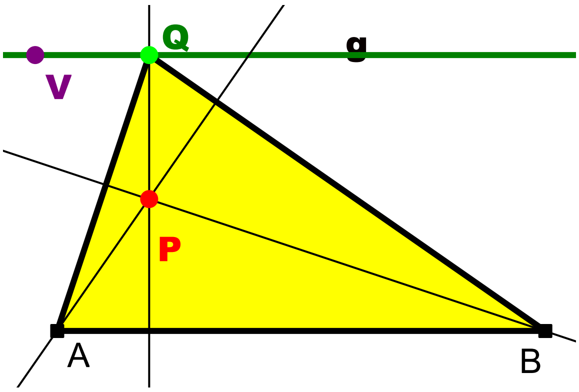




1) Konstruiere zur Strecke AB durch V eine Parallele g.
Setze den Punkt Q zugfest auf g
und färbe das Dreieck ABQ.

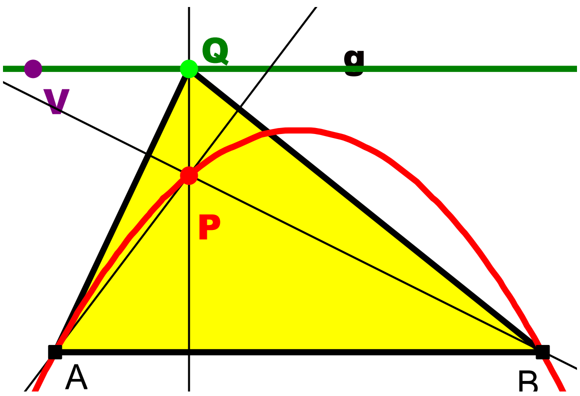
Speichere dieses Dreieck, denn es ist die Grundlage einer ganzen Aufgabenfamilie.

Probe: Wenn man an Q zieht wird das Dreieck nur geschert, g muss fest bleiben. Wenn man V bewegt, darf g nur parallel verschoben werden, hier also nur auf und ab parallel zu AB bewegt werden.



2) Konstruiere den Höhenschnittpunkt.
Prüfe, ob der Höhenschnittpunkt zugfest ist.
Wähle einen neuen Namen für diese Zeichnung und speichere sie.
Lasse Q auf der Straße g wandern und erzeuge die Ortslinie von P
Handwerk: Wähle das Icon „Ortslinie“ und folge den Hinweisen in der Statuszeile.
Bei Dynageo(Euklid) erst P anklicken, dann Q ziehen.

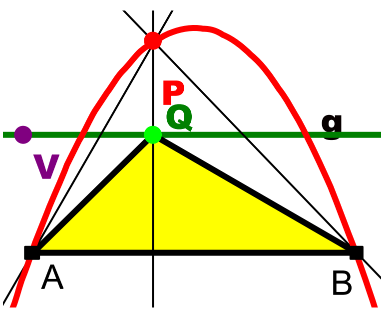
Experimentieren, Beobachten und Nachdenken soll die Fragen klären helfen.	➢ Frage A) Welche Ortslinienformen kommen vor? ➢ Frage B) Welche besonderen Punkte liegen auf der Ortslinie? ➢ Frage C) Welche Lage kann Q in Bezug auf die Ortslinie haben? ➢ Frage D) Was ist Besonderes an dem Dreieck zu sehen, wenn die Ortslinie die Gerade g schneidet?
Lösungen	Halt, nicht vor dem Ausprobieren ansehen!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

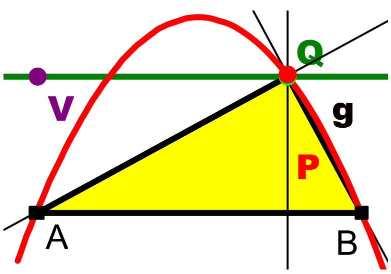


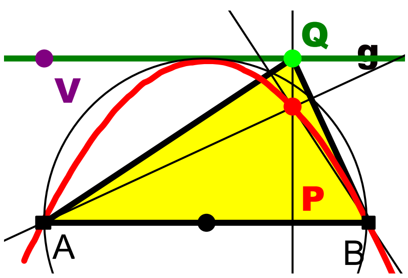
A)
- Die Ortslinie ist ein Bogen.
- Der Bogen könnte ein Parabelbogen sein.
- Der Bogen kann unten nicht wieder zusammenlaufen, weil ja P immer auf der Höhe hc unter oder über Q liegt und Q auf der Geraden g ins Unendliche laufen kann. Also ist die Ortslinie kein Ellipsenbogen.
- Der Bogen hat seinen Scheitel über der Mitte von AB.

B) A und B müssen auf der Ortslinie liegen, denn wenn das Dreieck bei A bzw. B rechtwinklig ist, ist A bzw. B selbst der Höhenschnittpunkt P.

Datei parallldreieckhoehoe.doc

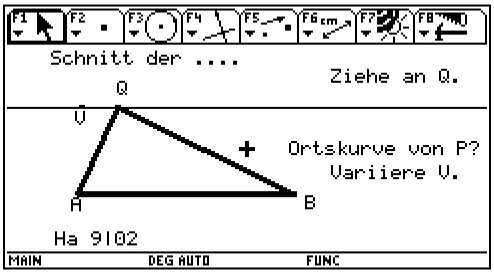






Algebraische Kurven Der Höhenschnittpunkt wandert auf paralleler Straße, TI-Cabri

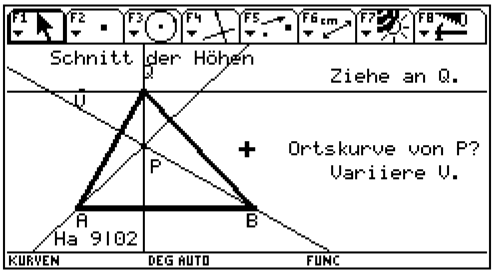
Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Arbeitsblatt, T^3-Tagung Wetzlar 2002,



1) Konstruiere zur Strecke AB durch V eine Parallele g.
Setze den Punkt Q zugfest auf g
und hebe das Dreieck ABQ durch fette Linien hervor.

Speichere dieses Dreieck, denn es ist die Grundlage einer ganzen Aufgabenfamilie.

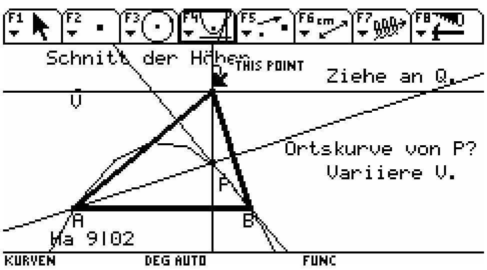
Probe: Wenn man an Q zieht wird das Dreieck nur geschert, g muss fest bleiben. Wenn man V bewegt, darf g nur parallel verschoben werden, hier also nur auf und ab parallel zu AB bewegt werden.



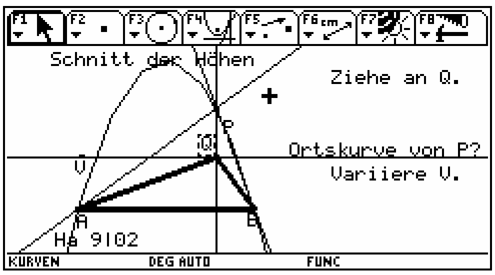
2) Konstruiere den Höhenschnittpunkt.
Prüfe, ob der Höhenschnittpunkt zugfest ist.
Wähle einen neuen Namen für diese Zeichnung und speichere sie.
Lasse Q auf der Straße g wandern und erzeuge die Ortslinie von P

Handwerk: Setze Spur für P bei F7 (Trace), F1 oder ESC, dann zu Q laufen (This Point) Hand drücken, gedrückt halten und Q mit den Cursortasten ziehen. Besonders für die neueren TI ist das die beste Art.
Alternativ: Setze Spur für P bei F7 (Trace), dann F7 **Animation**, Q anklicken, Hand drücken, gedrückt halten und Q mit den Cursortasten ziehen. Dabei bewegt sich Q nicht. Man kann sich vorstellen, dass man wie bei einer Zwille Energie in Q pumpt, lässt man nun los, wandert Q auf seiner Straße und P malt seine Kurve. Das geht solange, bis man enter drückt.
Alternativ: Ortskurve vom TI rechnen lassen. F4 Locus, P anklicken, Q anklicken, Abwarten, bis in der Statuszeile BUSY verschwindet. Die Ortskurve erscheint als Objekt. Wenn sie zu sehr wie ein Streckenzug aussieht, muss man bei F8 Format, # of Locus Points, eine höhere Zahl wählen.
Bemerkung: Im Gegensatz zu anderen DGS kann man bei Cabri auf die Ortslinie sogar zugfest Punkte setzen.

Experimentieren, Beobachten und Nachdenken soll die Fragen klären helfen.	➢ Frage A) Welche Ortslinienformen kommen vor? ➢ Frage B) Welche besonderen Punkte liegen auf der Ortslinie? ➢ Frage C) Welche Lage kann Q in Bezug auf die Ortslinie haben? ➢ Frage D) Was ist Besonderes an dem Dreieck zu sehen, wenn die Ortslinie die Gerade g schneidet?
Lösungen	Halt, nicht vor dem Ausprobieren ansehen!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!



A)
- Die Ortslinie ist ein Bogen.
- Der Bogen könnte ein Parabelbogen sein.
- Der Bogen kann unten nicht wieder zusammenlaufen, weil ja P immer auf der Höhe hc unter oder über Q liegt und Q auf der Geraden g ins Unendliche laufen kann. Also ist die Ortslinie kein Ellipsenbogen.
- Der Bogen hat seinen Scheitel über der Mitte von AB.



B) A und B müssen auf der Ortslinie liegen, denn wenn das Dreieck bei A bzw. B rechtwinklig ist, ist A bzw. B selbst der Höhenschnittpunkt P

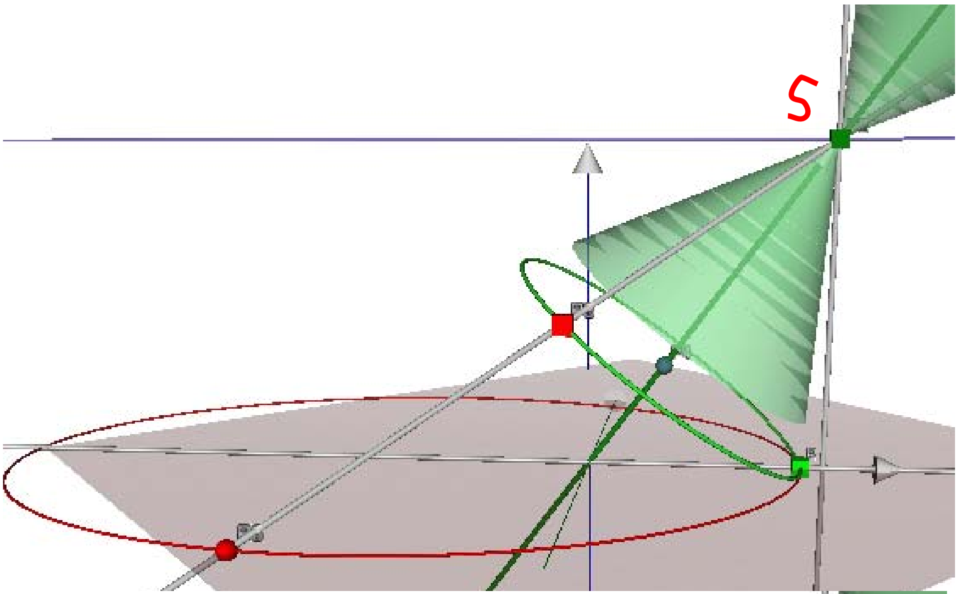
Varianten: Statt zweier Höhen kann man beliebige Kombinationen aus Dreiecksgeraden probieren, z.B. wh mit sh... (siehe Weth)

Datei parall3eckhoehoevoy.doc

Kegelschnitte bei schrägem Kegel

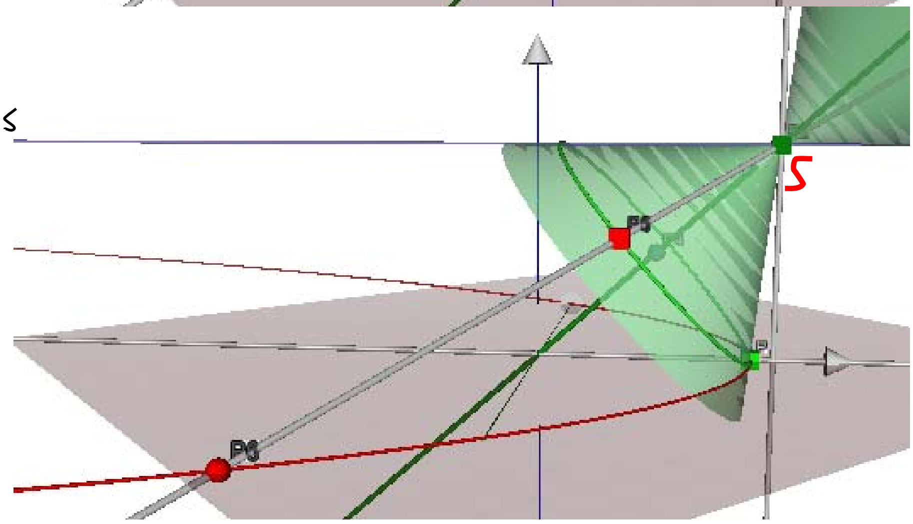
Erstellt mit Archimedes

nach einer Idee, die ich 1977 entwickelt habe, um Vektorrechnung und Kegelschnitte auf Schulniveau zu verbinden.



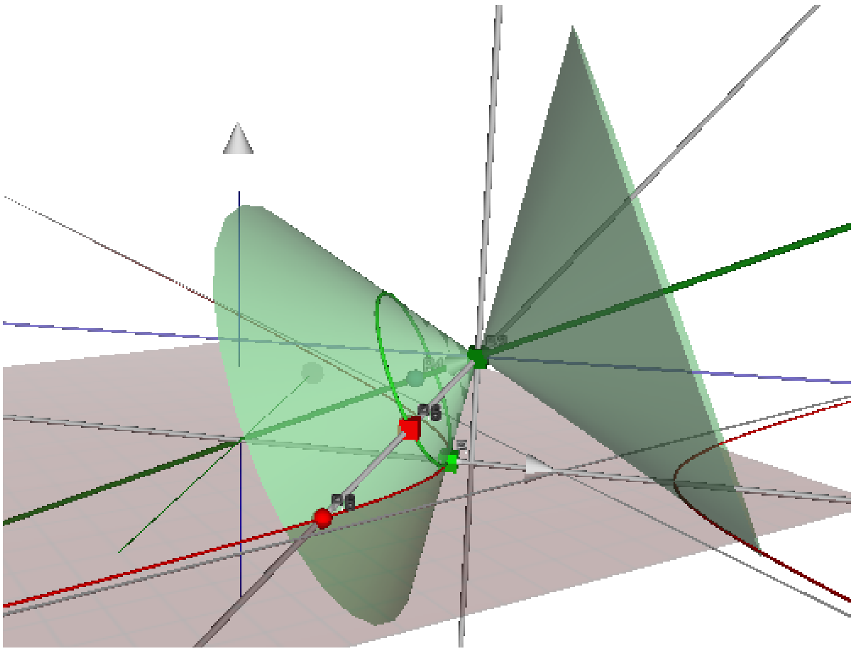
Die Kegelachse geht durch den Ursprung und liegt in der xz-Ebene.

Die Spitze des Doppelkegels kann auf einer Geraden parallel zur z-Achse bewegt werden.
Der auf dem grünen Kreis laufende Punkt definiert mit S eine Gerade, die den Kegel erzeugt.
Der Schnitt dieser Geraden mit der xy-Ebene ist auch der Schnitt des Kegels mit der xy-Ebene.



Fall 1
Die erzeugende Gerade bildet mit der Kegelachse einen kleineren Winkel als die Kegelachse mit der xy-Ebene.
Der Kegelschnitt ist eine Ellipse.

Fall 2
Die erzeugende Gerade bildet mit der Kegelachse denselben Winkel wie die Kegelachse mit der xy-Ebene.
Der Kegelschnitt ist eine Parabel.



Fall 3
Die erzeugende Gerade bildet mit der Kegelachse einen größeren Winkel als die Kegelachse mit der xy-Ebene.
Der Kegelschnitt ist eine Hyperbel.

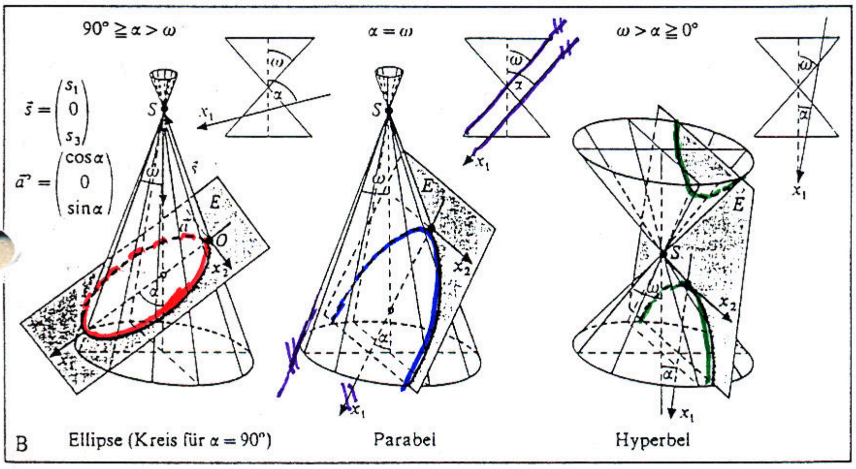
Eine herausragende Rolle unter den Kurven der Ebene spielen die **Kegelschnitte.** Man vesteht darunter die Randkurven der Schnittflächen, die beim Schnitt eines Doppelkegels mit einer Ebene entstehen.
Es läßt sich zeigen, daß **alle** Kurven zweiten Grades Kegelschnitte sind und umgekehrt.
Allgemeine Gleichung 2.Grades:

$$\boxed{a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{12}xy+2a_1x+2a_2y+t = 0}$$

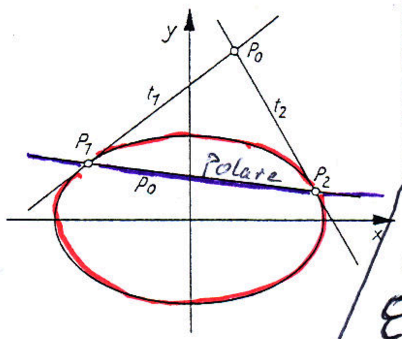
Gleichung eines Kegelschnitts und der Polaren p_0 zum Pol $P_0(x_0, y_0)$

Ellipse	Kreis	Hyperbel
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$x^2+y^2=r^2$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$	$xx_0+yy_0=r^2$	$\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1$

Parabel
$y^2=2px$
$yy_0=p(x+x_0)$



Schnitt von Doppelkegel und Ebene

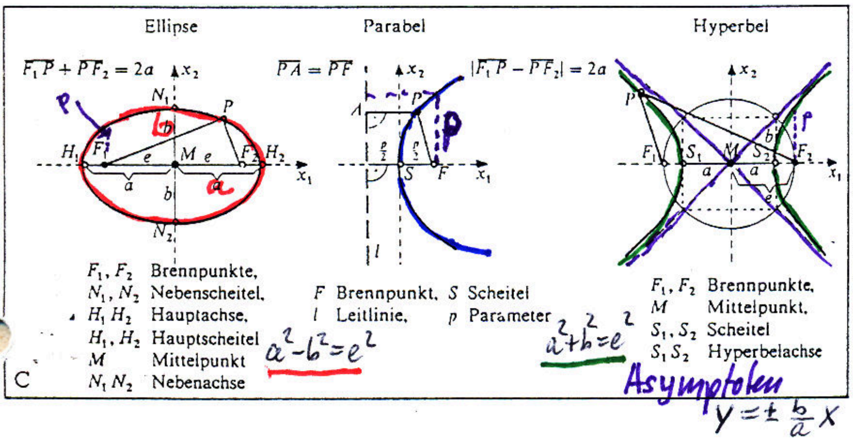


13.5-17 Tangenten von einem Punkt P_0 außerhalb einer Ellipse; Polare p_0

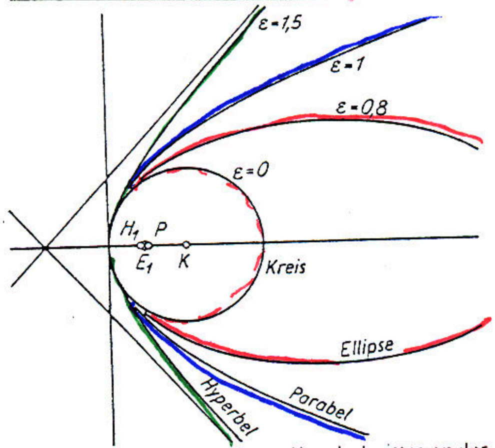
numerische Exzentrizität

$$\varepsilon = \frac{\cos(\alpha)}{\cos(\omega)} = \boxed{\frac{e}{a}}$$

$p = \frac{b^2}{a}$ = Ordinate am Brennpunkt



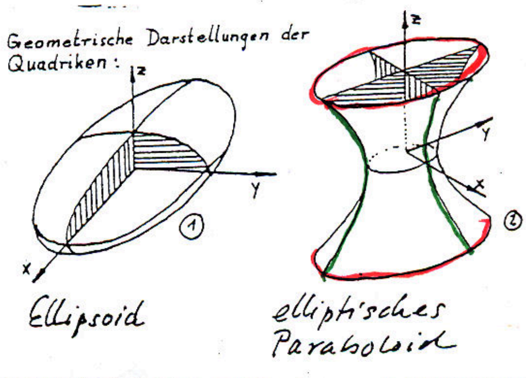
Gemeinsame Scheitelgleichung der Kegelschnitte
$y^2=2px-(1-\varepsilon^2)x^2$

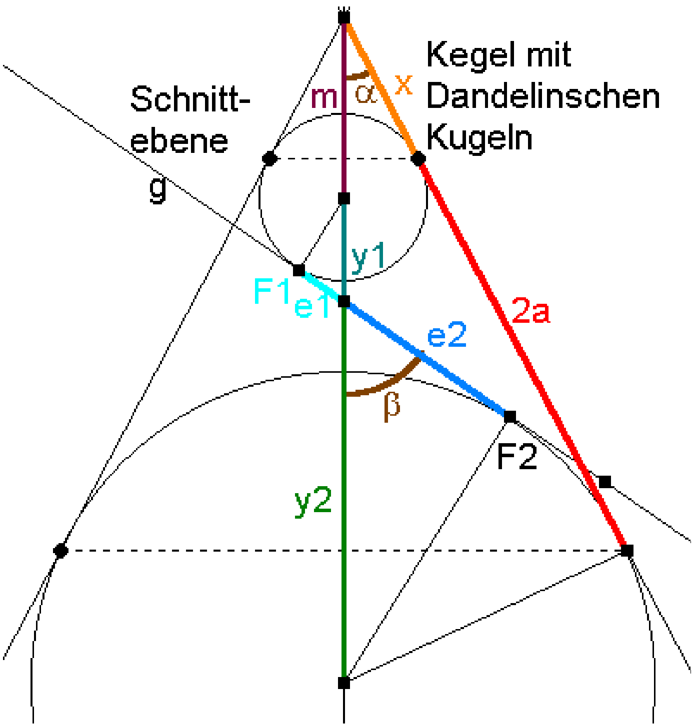


13.5-23 Abhängigkeit eines Kegelschnitts von der numerischen Exzentrizität

Diskussion der Kegelschnittgleichung $Ax^2+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$			
$AC \neq 0$	$N = D^2/A + E^2/C - F$		
	$N > 0$	$A>0, C>0$	Ellipse
		$A<0, C<0$	keine reelle Kurve
		$AC<0$	Hyperbel
	$N = 0$	$AC>0$	Punkt
		$AC<0$	Paar sich schneidender Geraden
	$N < 0$	$A>0, C>0$	keine reelle Kurve
		$A<0, C<0$	Ellipse
		$AC<0$	Hyperbel
$AC = 0$	$A=0, C\neq 0$	$D \neq 0$	Parabel
		$D = 0$	Paar paralleler Geraden, die zusammenfallen, wenn $E^2-FC=0$
	$A\neq 0, C=0$	$E\neq 0$	Parabel
		$E = 0$	Paar paralleler Geraden, die zusammenfallen, wenn $D^2-FA=0$
	$A=0, C=0$	nicht $D=E=0$	Gerade
		$D=E=0$	(trivial)

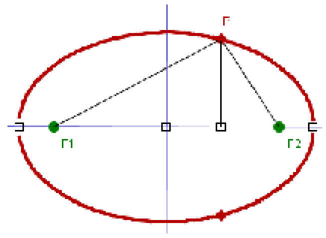
Geometrische Darstellungen der Quadriken:



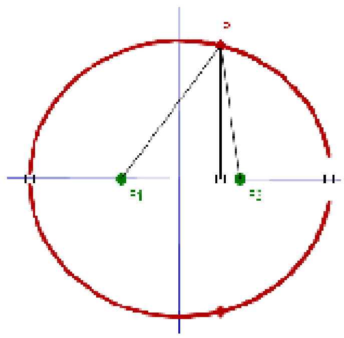


Wird der Kegel mit dem halben Öffnungswinkel α von einer Ebene geschnitten, die mit der Kegelachse den Winkel β bildet, so entsteht als Randkurve dieses Schnittes ein "Kegelschnitt".
Gezeichnet ist die Situation für $\alpha < \beta$
Dann ist der Schnitt eine Ellipse mit der großen Halbachse a, ihr großer Durchmesser ist also $2a$, und dem Brennpunktabstand $2e$.

Das Verhältnis $\frac{e}{a}$ gibt an, wie stark die Ellipsenform von der Kreisform abweicht, es wird "numerische Exzentrizität ε" genannt. $\varepsilon := \frac{e}{a}$



In der Zeichnung ist $2e = e_1 + e_2$ und man sieht, dass für Ellipsen $\varepsilon < 1$ ist. Für $\beta = 90°$ ist fallen F1 und F2 zusammen und $e = 0 = \varepsilon$, es entsteht einKreis.
Sei nun $\alpha < \beta < 90°$ wie in der Zeichnung.



(1) $e_1 = y_1 \cos\beta,\quad e_2 = y_2 \cos\beta$

(2) $x = m\cos\alpha$ (3) $2a + x = (y_1 + y_2 + m)\cos\alpha$,
dahinein (2) einsetzen

(4) $2a + m\cos\alpha = (y_1 + y_2)\cos\alpha + m\cos\alpha$, also

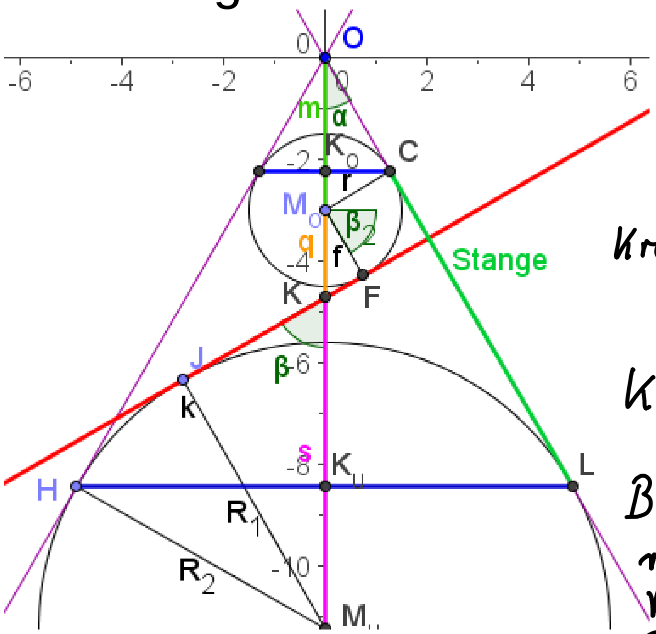
(4') $2a = (y_1 + y_2)\cos\alpha$

Zusammen folgt

$$2e = e_1 + e_2 = (y_1 + y_2)\cos\beta = \frac{2a}{\cos\alpha}\cos\beta = 2a\,\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$$

Also gilt $\boxed{\varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}}$. Diese Gleichung gilt auch für $0° \le \beta < \alpha < 90°$, also für Hyperbeln, mit $\varepsilon > 1$. Für $\alpha = \beta$ entstehen Parabeln. Da gibt es kein e und kein a, aber die Definition $\varepsilon := 1$ für Parabeln passt zu dieser Gleichung.

Dandelinsche Kugeln im Kegel, Berechnungen für die Zeichnung



$d := q + s \qquad r = m \sin\alpha$

$R = (m+d)\sin\alpha$

Kugel oben $M_o = (0, 0, -m)$

unten $M_u = (0, 0, -m-d)$

Kreis oben $\overline{OC} = m\cos\alpha$

$\overline{OK_o} = \overline{OC}\cdot\cos\alpha = m\cos^2\alpha$

$K_oC = \overline{OC}\cdot\sin\alpha = m\sin\alpha\cos\alpha$

Kreis unten $\overline{OK_u} = (m+d)\cos^2\alpha$

$K_uL = (m+d)\sin\alpha\cos\alpha$

Bestimmung von d:

$\left.\begin{array}{l} r = q\sin\beta \\ r = m\sin\alpha \end{array}\right\} \; q = m\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$

$\left.\begin{array}{l} R = s\sin\beta \\ R = (m+d)\sin\alpha \end{array}\right\} \; s = (m+d)\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$

$d = q + s = 2m\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} + d\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$

$d\sin\beta - d\sin\alpha = 2m\sin\alpha$

$\Rightarrow d = \dfrac{2m\sin\alpha}{\sin\beta - \sin\alpha}$

Brennpunkte $F_1 = (u_1, v_1)$ $\quad v_1 = -m - r\sin\beta = -m - m\sin\alpha\sin\beta$

$u_1 = r\cos\beta = m\sin\alpha\cos\beta$

$F_2 = (u_2, v_2)$ $\quad v_2 = -(m+d) - (m+d)\sin\alpha\sin\beta$

$u_2 = (m+d)\sin\alpha\sin\beta$

Stange <u>oberer</u> Pkt $\quad x = m\sin\alpha\cos\alpha\cos t$

$y = m\sin\alpha\cos\alpha\sin t$

$z = -m\cos^2\alpha$

<u>unterer</u> Pkt ebenso $m+d$ statt m

Ebene Normalenvektor durch $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -m-q \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -u_1 \\ 0 \\ -v_1 - m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m\sin\alpha\cos\beta \\ 0 \\ m\sin\alpha\sin\beta \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} -\cos\beta \\ 0 \\ \sin\beta \end{pmatrix} =: \vec{n}$

$-\cos\beta\, x + \sin\beta\, z = -m(\sin\alpha + \sin\beta)$

Ein Punkt P auf Stange, Tiefe $-h$

$x = r(h)\cos t \qquad y = r(h)\sin t \qquad z = -h$

$* \| \; x = h\tan\alpha\cos t \qquad y = h\tan\alpha\sin t \qquad z = -h \; \|$

liegt auf Ebene: $-\cos\beta\, h\tan\alpha\cos t + \sin\beta(-h) = -m(\sin\alpha + \sin\beta)$

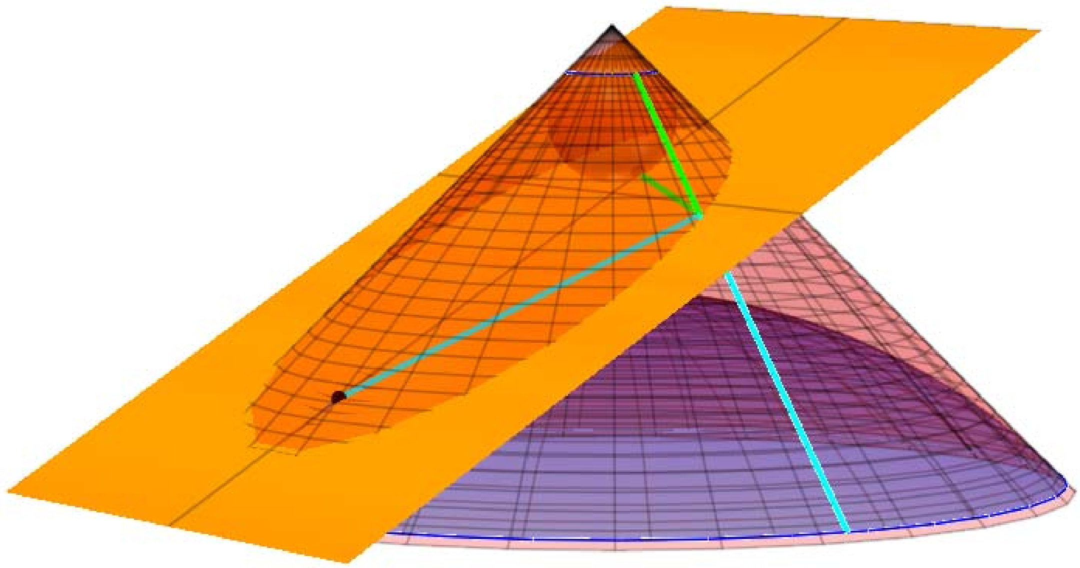
$\Rightarrow h = h(t) = (\cos\beta\tan\alpha\cos t + \sin\beta)^{-1}\cdot m(\sin\alpha + \sin\beta)$

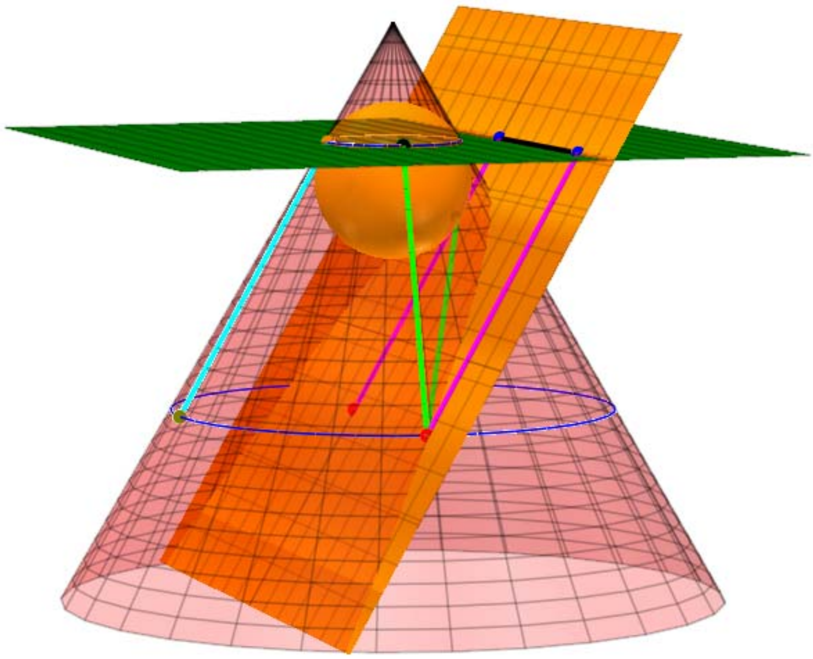
$*$ ist mit ↑ Parameterdarst. von P auf der Ellipse.

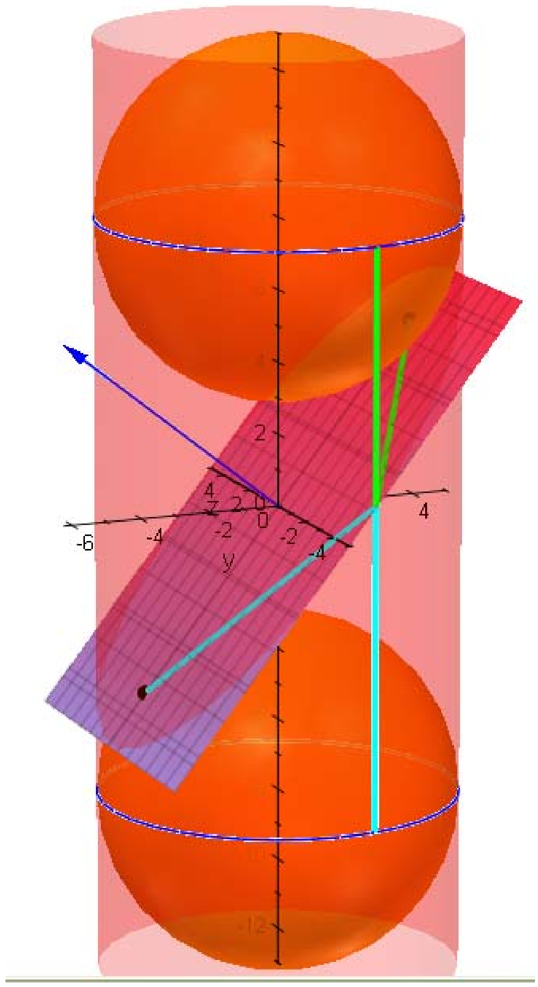
Nach Wahl von α, β und m kann man nun die Zeichnung herstellen, die mit den Dandelinschen Kugeln zeigt:

Satz: Kegelschnitte mit $\alpha < \beta$ sind Ellipsen

Kegelschnitte und Dandelinsche Kugeln







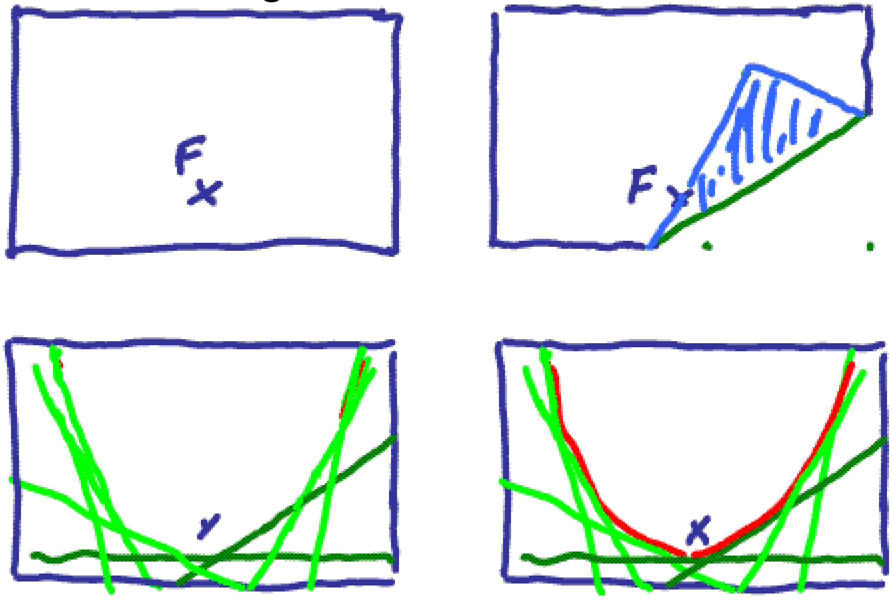
Ellipse: Der Abstand der Berührkeise ist konstant, er ist gleich der Gesamtfadenlänge auf der Schnittfläche, also ist der Rand der Schnittfläche eine Ellipse.

Parabel: Der Abstand der Berührkeise ist konstant, in der hellblauen Lage sieht man ihn auf der Mantellinie, zu der die Schnittebene parallel ist. Auf der Schnittebene kann man die violette Strecke noch verschieben. Dann sieht man, dass jeder Punkt der Schnittkurve von dem Berührpunkt dieselbe Entfernung hat wie von der Leitgeraden. Sie ist nämlich die Schnittgerade zwischen Schnittebene und der Ebene durch den oberen Berührkreis.

Zylinder: Die Begründung ist dieselbe wie beim Kegel mit Ellipse. Der Rand der Salami kann durch die Fadenkonstruktion als Ellipse nachgewiesen werden.

Hyperbel: Hier nicht dargestellt. Man hat nimmt den Doppelkegel mit einer Kugel oben und einer unten. Dann ist die Entfernungs**differenz** zu den Brennpunkten konstant.

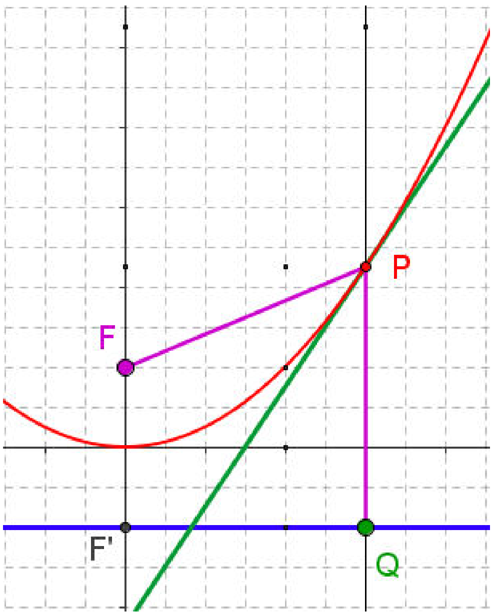
Parabel Leitgeradenkonstruktion



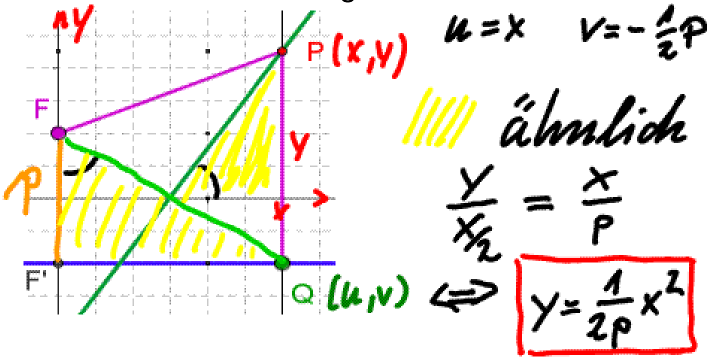
Faltkonstruktion

Markiere auf einem Blatt untern einen Punkt F.
Falte die Unterkante hoch, so dass sie f genau trifft.
Wiederhole das oft.
Die vielen Faltknicke lassen eine Platz frei, der von einer Kurve begrenzt wird.

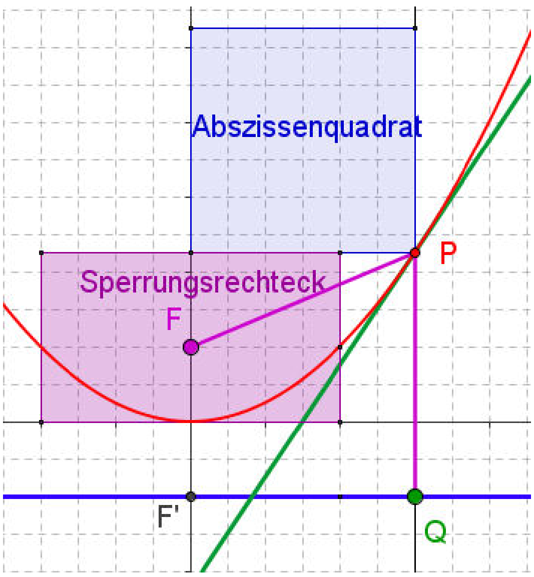
Diese Kurve sieht wie eine Parabel aus.
Es wird sich zeigen, dass es auch eine Parabel ist.



Geometrisch sind die Knicke Spiegelachsen, mit denen stets ein Punkt Q der Unterkante auf P abgebildet wird.
Links ist die Realisierung in GeoGebra zu sehen.



Also ist die Ortskurve von P eine **Parabel.**



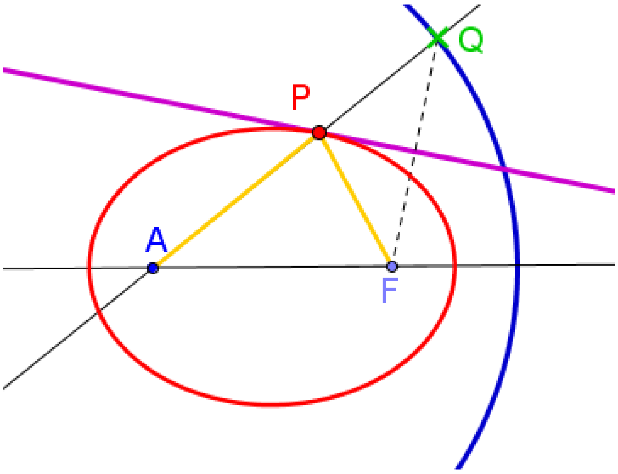
παραβάλλειν
paraballein=
gleichkommen, entsprechen

An der Umformung $x^2 = 2py$ erkennt man, dass das Quadrat über x (das Abszissenquadrat) flächengleich dem Rechteck aus dem Abstand y, den P von der Scheitelgeraden hat, und Breite 2 p ist.
p heißt auch Sperrung, p ist die Breite des Kegelschnittes beim Brennpunkt.

Also gilt: Bei der aufrechten Parabel ist das Abszissenquadrat gleich dem Sperrungsrechteck.

Die nach rechts geöffnete Parabel hat die Gleichung $y^2 = 2px$ und das Ordinatenquadrat ist gleich dem Sperrungsrechteck.

Leitkreiskonstruktion von Ellipse und Hyperbel

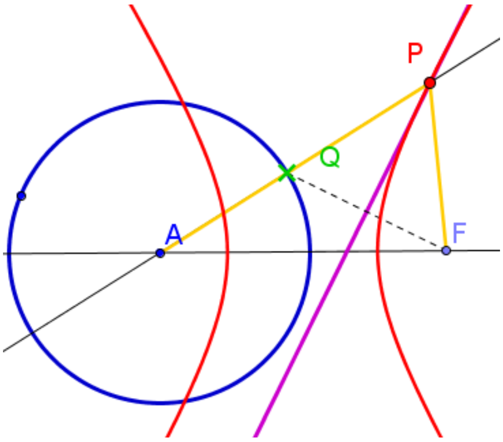


Gegeben ist ein Kreis mit Mittelpunkt A und ein Punkt F innerhalb des Kreises. Q wandert auf dem Kreis. Die Mittelsenkrechte von FQ schneidet die Radiusgerade AQ in Punkt P.

Die Ortskurve von P ist eine Ellipse.

Beweis:
AP+PF=AP+PQ=Radius=konstant.
Damit ist die Fadenkonstruktion der Ellipse nachgewiesen.

Die Ellipse ist der geometrische Ort aller Punkte, die eine feste Abstandssumme zu zwei festen Punkten haben.



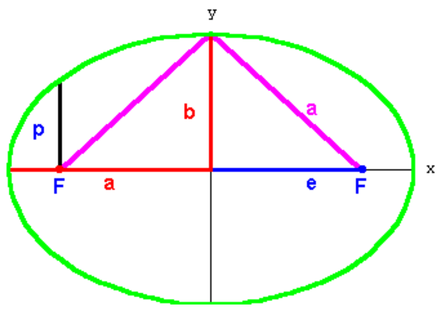
Nun liege F außerhalb des Kreises.

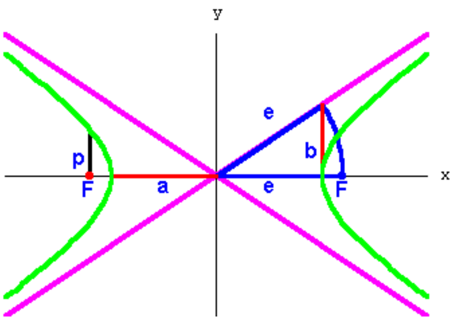
Die Ortskurve von P ist eine Hyperbel.

Beweis:
AP-PF=AP-AQ=Radius=konstant.
Damit ist die Fadenkonstruktion der Hyperbel nachgewiesen.

Die Hyperbel ist der geometrische Ort aller Punkte, die eine feste Abstandsdifferenz zu zwei festen Punkten haben.

Ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ Hyperbel $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$





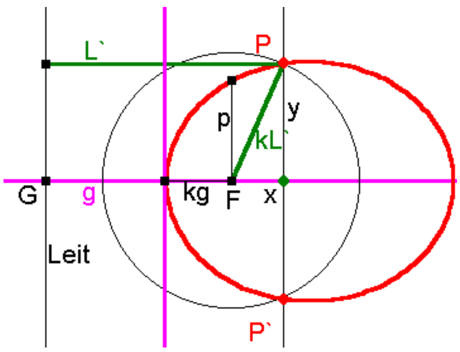
Ellipse: Abstandssumme von den Brennpunkten = 2a
Hyperbel: Abstandsdifferenz von den Brennpunkten = 2a

Ellipse: $a^2-b^2=e^2$ Hyperbel $a^2+b^2=e^2$. Stets gilt:

$\varepsilon=\frac{e}{a}$ und p= Ordinate am Brennpunkt und $y^2=2px-\left(1-\varepsilon^2\right)x^2$

Kurven Leitgeradenkonstruktion aller Kegelschnitte

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Uni Lüneburg, 13. Dezember 2003



Gesucht ist der geometrische Ort aller Punkte P, die von einem festen Punkt F die k-fache Entfernung wie von einer Geraden haben.
Die Gerade heißt Leitgerade.
Sie ist links bei G senkrecht gezeichnet.
Behauptung:
Die Ortskurve ist ein Kegelschnitt mit der allgemeinen Scheitelgleichung $\boxed{y^2 = 2\,p\,x - (1-k^2)x^2}$

Beweis: Das Achsenkreuz steht am Scheitel.

Es gilt nach Konstruktion (1) $(x-kg)^2 + y^2 = k^2L^2$

und (2) $L = x + g$

(2) in (1) ergibt (3) $(x-kg)^2 + y^2 = k^2(x+g)^2$

aufgelöst folgt (3') $x^2 - 2kgx + k^2g^2 + y^2 = k^2x^2 + 2k^2gx + k^2g^2$

sortiert (3'') $(1-k^2)x^2 - 2k(1+k)g\,x + y^2 = 0$

y^2 allein (3''') $y^2 = 2\,k(1+k)g\;\;x - (1-k^2)\,x^2$

Damit ist die behauptete Gleichung schon fast erzeugt.
Eingezeichnet ist p als Ordinate des Kegelschnitts am Brennpunkt.
Für den Kegelschnittpunkt F* über F muss gelten (4) $k(g+kg) = p$,
denn er muss ja auch die Konstruktion erfüllen. Also (4') $k(1+k)g = p$.

(4) in (3''') ergibt (5) $y^2 = 2\,p\,x - (1-k^2)x^2$ die behauptete Gleichung. q.e.d.

Für $k=1$ folgt $y^2 = 2\,p\,x$, eine Parabelgleichung.

Für $k<1$ ergibt sich eine Ellipse. Beweis auf einer Extraseite.

Für $k>1$ ergibt sich eine Hyperbel. Beweis auf einer Extraseite.

Aus der Herleitung der Mittelpunktsgleichung geht hervor, dass mit (4') gilt

$$a = \frac{p}{1-k^2} = \frac{k(1+k)g}{1-k^2} = \frac{kg}{1-k}.$$

Als Entfernung von Mittelpunkt zu Brennpunkt ist $e = a - kg$ und damit gilt

$$\varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{a-kg}{a} = 1 - \frac{kg}{a} = 1 - \frac{kg}{kg}(1-k) = 1 - 1 + k = k$$

Also gilt $\boxed{\varepsilon = k}$ und damit auch $\boxed{y^2 = 2\,p\,x - (1-\varepsilon^2)x^2}$

Scheitelgleichung aus der Mittelpunktsgleichung

Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Mittelpunktslage

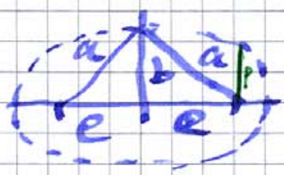
$$\frac{(x-a)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$\boxed{\varepsilon=\frac{e}{a}}$

Scheitellage

$$\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{(x-a)^2}{a^2}$$

$$=1-\frac{x^2}{a^2}+2\frac{x}{a}-1$$



$$\frac{y^2}{b^2}=2\frac{x}{a}-\frac{x^2}{a^2}$$

$$y^2=2\frac{b^2}{a}x-\frac{b^2}{a^2}x^2$$

$b^2=a^2-e^2 \Rightarrow \frac{b^2}{a^2}=1-\varepsilon^2$

$p:=\frac{b^2}{a}$ = Ordinate bei F

setze $x=a-e$ ein $\Rightarrow y^2=\frac{b^4}{a^2}$

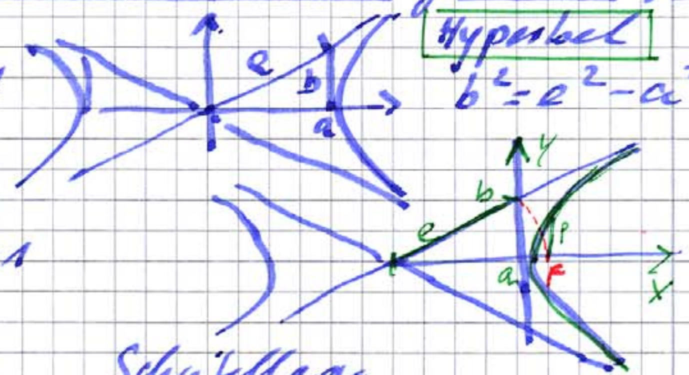
$$\underline{\underline{y^2=2px-(1-\varepsilon^2)x^2}}$$

Scheitelgleichung

Hyperbel

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

$b^2=e^2-a^2$



$$\frac{(x+a)^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\frac{y^2}{b^2}=\frac{(x+a)^2}{a^2}-1$$

Scheitellage

$$y^2=2\frac{b^2}{a}x+\frac{b^2}{a^2}x^2$$

$\frac{b^2}{a^2}=\frac{e^2}{a^2}-1=\varepsilon^2-1$

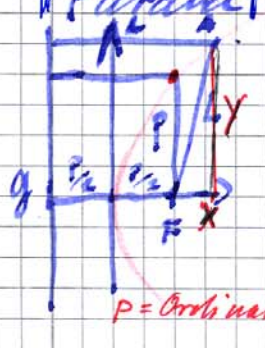
setze $x=e-a$ ein $\Rightarrow y^2=\frac{b^4}{a^2}$

$p:=\frac{b^2}{a}$ = Ordinate bei F

$$\underline{\underline{y^2=2px-(1-\varepsilon^2)x^2}}$$

Scheitelgleichung

Parabel



Abstand von g = Abstand von F

$x+\frac{p}{2} = L$

$L^2=(x-\frac{p}{2})^2+y^2$

Also $(x+\frac{p}{2})^2=(x-\frac{p}{2})^2+y^2$

$\Rightarrow \dots \Rightarrow px=-px+y^2 \Rightarrow \boxed{y^2=2px}$

Scheitelgleichung, u.a. mit $\varepsilon=1$

Kurven Herleitung der Mittelpunktsgleichung

aus der allgemeinen Scheitelgleichung aller Kegelschnitte

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Uni Lüneburg, 13. Dezember 2003

allgemeine Scheitelgleichung $\boxed{y^2 = 2\,p\,x - (1-k^2)\,x^2}$

Für $k=1$ folgt $y^2 = 2\,p\,x$, die Parabelgleichung für nach rechts geöffnete Parabeln.

Behauptung: Für $k<1$ ergibt sich eine Ellipse, für $k>1$ eine Hyperbel.

Beweis durch Herleitung der Mittelpunktsform der Ellipsen~ bzw. Hyperbelgleichung.

(5') $(1-k^2)\,x^2 - 2\,p\,x \quad + y^2 = 0$

(5'') $$x^2 - \frac{2\,p}{(1-k^2)}\,x \quad + \frac{y^2}{(1-k^2)} = 0$$

(6) $$x^2 - \frac{2\,p}{(1-k^2)}\,x + \left(\frac{p}{(1-k^2)}\right)^2 + \frac{y^2}{(1-k^2)} = \frac{p^2}{(1-k^2)^2}$$

(7) $$\left(x - \frac{p}{(1-k^2)}\right)^2 + \frac{y^2}{(1-k^2)} = \frac{p^2}{(1-k^2)^2}$$

(8) $$\frac{\left(x - \frac{p}{(1-k^2)}\right)^2}{\frac{p^2}{(1-k^2)^2}} + \frac{y^2}{\frac{(1-k^2)\,p^2}{(1-k^2)^2}} = 1$$

(9) $$\frac{\left(x - \frac{p}{(1-k^2)}\right)^2}{\frac{p^2}{(1-k^2)^2}} + \frac{y^2}{\frac{p^2}{(1-k^2)}} = 1$$

Taufe für $k<1$, Ellipse

$$a := \frac{p}{(1-k^2)} \quad \text{und} \quad b^2 := \frac{p^2}{(1-k^2)}$$

$$\boxed{\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

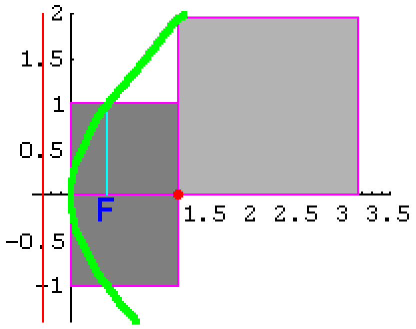
Taufe für $k>1$, Hyperbel

$$a := \frac{p}{(k^2-1)} \quad \text{und} \quad b^2 := \frac{p^2}{(k^2-1)}$$

$$\boxed{\frac{(x+a)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

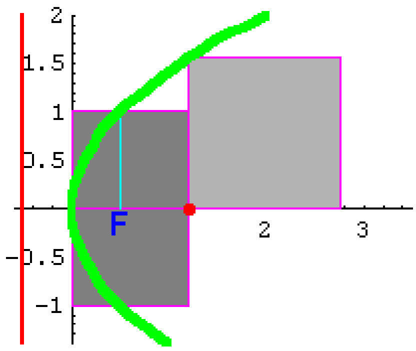
Allgemeine Scheitelgleichung der Kegelschnitte $y^2 = 2\,p\,x - (1-\varepsilon^2)\,x^2$.

Hyperbel



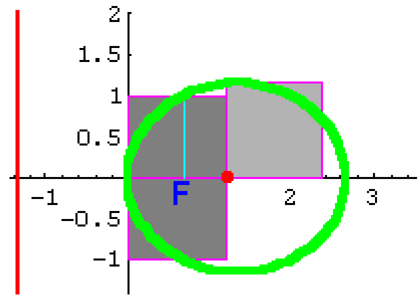
$\varepsilon > 1$

Parabel



$\varepsilon = 1$

Ellipse



$\varepsilon < 1$

$2p$ = Sperrung=Gesamthöhe des Kegelschnitts am Brennpunkt.
Sei x eine beliebige Abszisse =Stelle auf der x-Achse.
Dann ensteht das Sperrungs-Rechteck aus der Sperrung und der Breite x,
Es hat die Fläche $2px$ und steht in der Scheitelgleichung rechts vom “=”-Zeichen
An derselben Stelle x entsteht aus der Ordinate y das Ordinaten-Quadrat mit der Fläche y^2 und es steht links vom “=”-Zeichen.

$\varepsilon > 1$ Hyperbel

$\Rightarrow 1-\varepsilon^2 < 0$

Daher wird rechts effektiv etwas addiert.

Bei der Hyperbel hat also das Ordinaten-Quadrat einen größeren Flächeninhalt als das Sperrungs-Rechteck.

ὑπερβάλλειν

(hyperballein) heißt auf deutsch übersteigen, übertreffen.
In der Sprachwissenschaft ist eine Hyperbel eine Übertreibung, z.B. "himmelhoch", "wie Sand am Meer". Die Vorsilbe Hyper- bedeutet immer "übermäßig", "über-hinaus"

$\varepsilon = 1$ Parabel

$\Rightarrow 1-\varepsilon^2 = 0$

Daher wird rechts nichts geändert.

Bei der Parabel hat also das Ordinaten-Quadrat den gleichen Flächeninhalt wie das Sperrungs-Rechteck.

παραβάλλειν

(paraballein) heißt auf deutsch gleichkommen.
So ist auch in der Literatur eine Parabel eine gleichnishafte belehrende Erzählung.

$\varepsilon < 1$ Ellipse

$\Rightarrow 1-\varepsilon^2 > 0$

Daher wird rechts wirklich etwas Positives abgezogen.

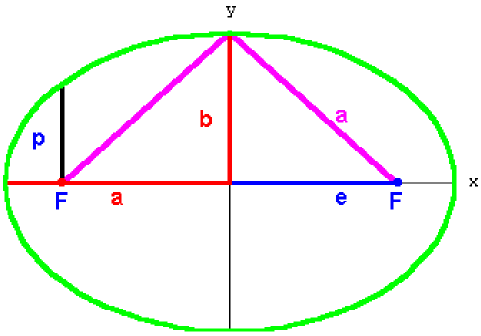
Bei der Ellipse hat also das Ordinaten-Quadrat einen kleineren Flächeninhalt als das Sperrungs-Rechteck.

ἐλλείπειν (elleipein) heißt auf deutsch ermangeln. In der Sprachwissenschaft ist eine Ellipse eine Einsparung von Satzteilen, z.B. "Mach ich." statt, "Das mache ich.".
Der Brockhaus schreibt, die (ovale) Ellipse hieße so, weil es ihr an der Kreisform mangelt. Diese Begründung ist aber nur "ausgedacht".

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ Ellipse Mittelpunktsgleichung Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Falls $a \geq b$ heißt a große Halbachse, b kleine Halbachse.

Bei der Hyperbel haben die Asymptoten die Gleichungen $y = \pm\frac{b}{a}x$.



Ellipse

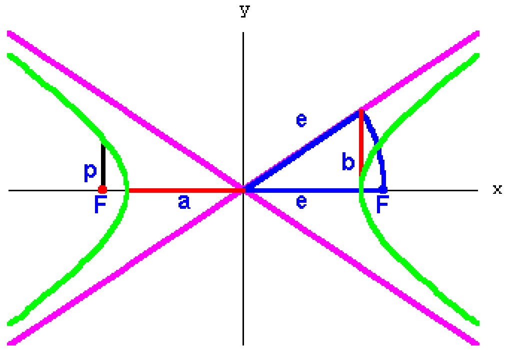
$e^2 = a^2 - b^2$

Hyperbel

$e^2 = a^2 + b^2$

$2e$ =Brennpunkt-Abstand

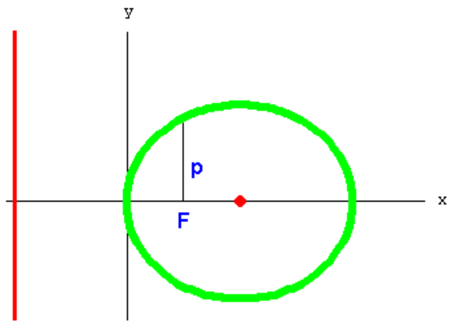
$$p = \frac{b^2}{a}$$

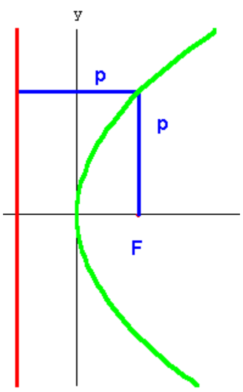


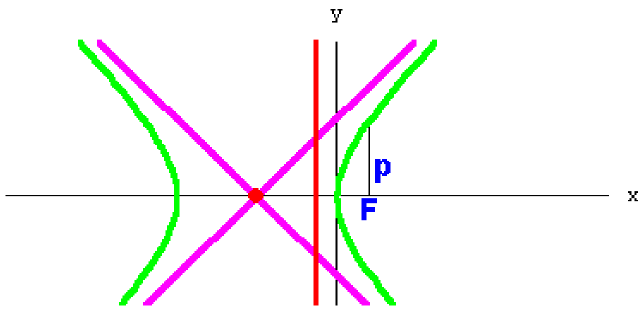
Allgemeine Scheitelgleichung der Kegelschnitte

$$y^2 = 2\,p\,x - (1-\varepsilon^2)x^2.$$

Es gilt $\varepsilon = k$.







$\varepsilon < 1$ $\varepsilon = 1$ $\varepsilon > 1$

g= Abstand des Scheitels von der Leitgeraden,

Ein Kegelschnitt-Punkt P, der den Abstand L von der Leitgeraden hat, hat den Abstand $\varepsilon L = kL$ vom Brennpunkt. $p = \varepsilon(1+\varepsilon)g$ Ordinate am Brennpunkt.

Ellipse $a = \frac{p}{1-\varepsilon^2}$, $b = \frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$, Hyperbel $a = \frac{p}{\varepsilon^2 - 1}$, $b = \frac{p}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}$

Numerische Exzentrizität $\varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$, mit α = halber Öffnungswinkel des Kegels,

$0 \leq \beta \leq 90°$ Schnittwinkel zw. Ebene und Kegelachse. $\varepsilon = 1$ für Parabeln.

Hinweis: Die hier vorgestellte Möglichkeit, Kurven punktweise durch Abzählen zu erzeugen, ermöglicht das Üben für eine Klassenarbeit. Zu den Konstruktion 1,2,3 passen dann 6 und 7, die auch an die Handlungsweise mit dem Faden anknüpfen.
Zu K4 passt als Transfer K5. Ein guter Vorschlag für eine Klassenarbeitsaufgabe, die zu K4 und K5 passt, ist auch die Versiera (Extrablatt)

Arbeitsblatt Kurven Kl 8

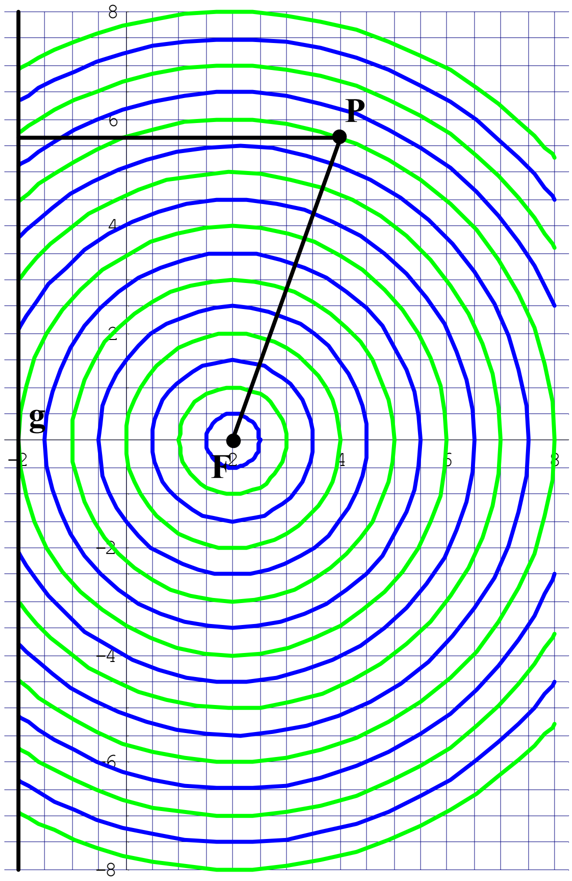
Seite 1

Dr. Haftendorn Dez 2001

Konstruktion 1

Der Punkt P hat von der senkrechten Geraden g dieselbe Entfernung wie von dem Punkt F. Man kann das durch Abzählen der Kreise und Karos feststellen. F heißt Brennpunkt und g heißt Leitgerade.
Erzeuge durch Abzählen weitere solche Punkte P.
Der geometrische Ort aller P heißt **Parabel.**

Handlungshilfe: P liegt auf der 12. Senkrechten Karolinie von links und auf dem 12. Kreis um F. Wo die 13. Karolinie den 13. Kreis schneidet ist wieder eine richtige Stellung für P, usw.



Konstruktion 2

Ist für P die Entfernung von F nur halb so groß wie die von g, so entsteht eine **Ellipse.**

Handlungshilfe: 6. senkrechte Linie und 3. Kreis liefert zwei Stellungen für P, dann 8. Linie und 4. Kreis usw.

Konstruktion 3

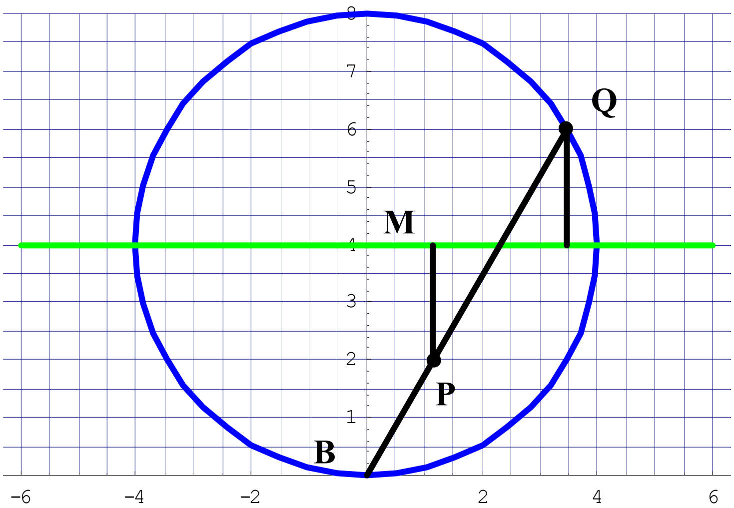
Ist für P die Entfernung von F dreimal so groß wie die von g, so entsteht eine **Hyperbel.**

Handlungshilfe: 2. senkrechte Linie und 6. Kreis liefert eine Stellung für P, dann 3. Linie und 9. Kreis usw.

Konstruktion 4

P liegt auf der Geraden BQ und hat von der waagerechten Geraden denselben Abstand wie Q. Das kann man durch Abzählen von Karos feststellen.
Wenn Q auf dem Kreis wandert, bewegt sich P auf einer "**Kissoide**", einer "**Efeu-Kurve**".
Erzeuge weitere Punkte P.

Handlungshilfe: Rücke Q eine waagerechte Karolinie herunter und verbinde Q mit B. Auf dieser Gerade und genau eine Karolinie höher liegt der neuer Punkt P.

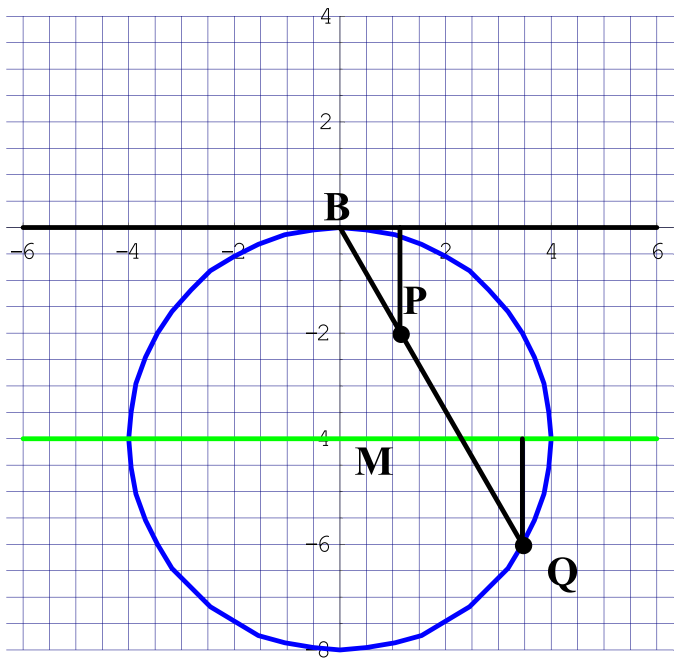


Konstruktion 5

P liegt auf der Geraden BQ und hat von der waagerechten Geraden durch B denselben Abstand, den Q von der waagerechten Geraden durch M hat. Das kann man durch Abzählen von Karos feststellen.

Wenn Q auf dem Kreis wandert, bewegt sich P auf einer "**Strophoide**", einer "**Seil-Kurve**".

Erzeuge weitere Punkte P.

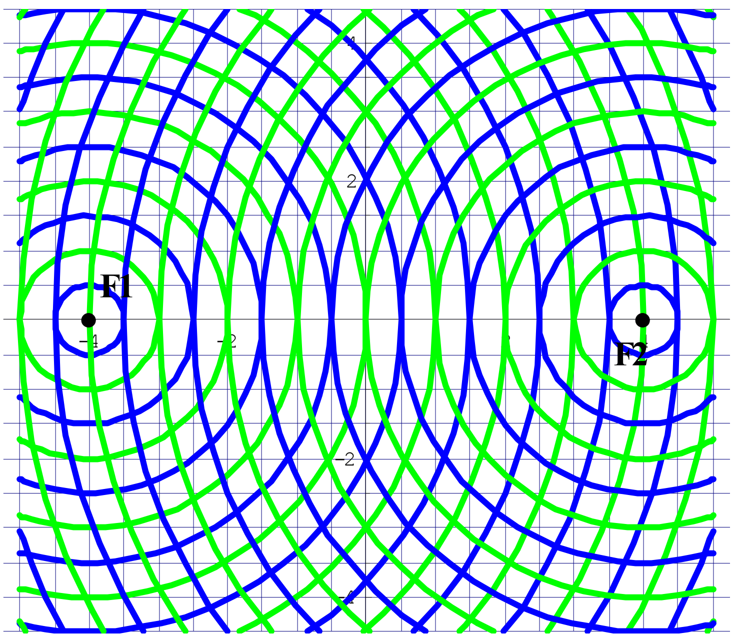


Konstruktion 6

Gesucht ist der geometrische Ort aller Punkte, die von den beiden Brennpunkten F1 und F2 die Entfernungssumme s=20 Karos haben. Erzeuge viele solche Punkte durch Abzählen.

Fadenkonstruktion der Ellipse

Handlungshilfe: 20=10+10, also 10. Kreis von F1 und 10. Kreis von F2, ebenso 11. und 9. , dann......



Konstruktion 7

Gesucht ist der geometrische Ort aller Punkte, die von den beiden Brennpunkten F1 und F2 die Entfernungsdifferenz von d=8 Karos haben. Erzeuge viele solche Punkte durch Abzählen.

Fadenkonstruktion der Hyperbel

Probiere weitere Hyperbeln zu erzeugen, indem du für d auch andere gerade Zahlen wählst.

Achtung: 1Karo = 1 Kästchenbreite = ½ Einheit

Arbeitsblatt Kurven Kl 8 Gleichungen

Dr. Haftendorn Dez 2001

Welche gesicherten Punkte haben die Kurven auf dem Kurven-Arbeitsblatt?

Achtung: 1Karo = 1 Kästchenbreite = ½ Einheit

Welche Eigenschaften haben die Kurven für große Werte?

Gibt es Grenzen für die x- Werte oder die y-Werte?

Konstruktion	**Sichere Punkte**	**x-Wert beliebig groß? Grenzen?**	**y-Wert beliebig groß? Grenzen?**
K1 Parabel			
K2 Ellipse			
K3 Hyperbel			
K4 Kissoide			
K5 Strophoide			
K6 Ellipse			
K7 Hyperbel			

Welche Gleichungen gehören zu welchen Kurven auf dem Kurven-Arbeitsblatt?

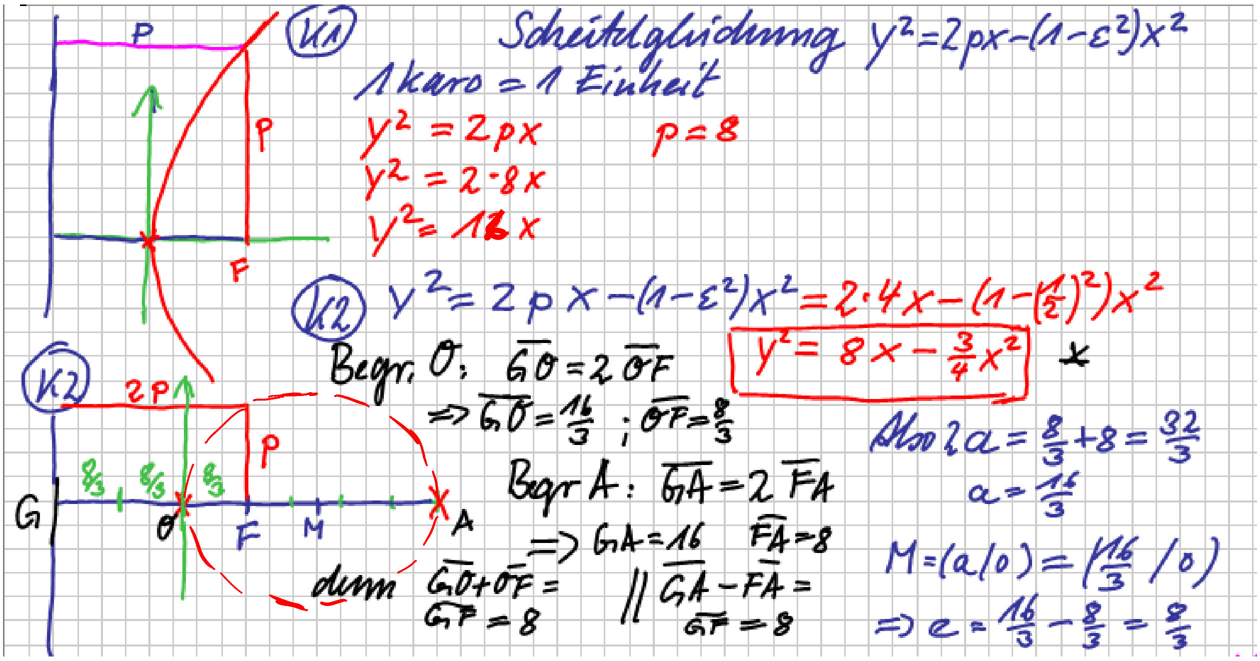
Für **K1, K4, K5, K6, K7** (ohne K2 und K3) gibt es mindestens eine Gleichung.
Prüfe mindestens zwei der gesicherten Punkte.
Achtung, einige Gleichungen sind nur umgeformt worden.
Allerdings gibt es auch falsche Umformungen. Welche sind das?

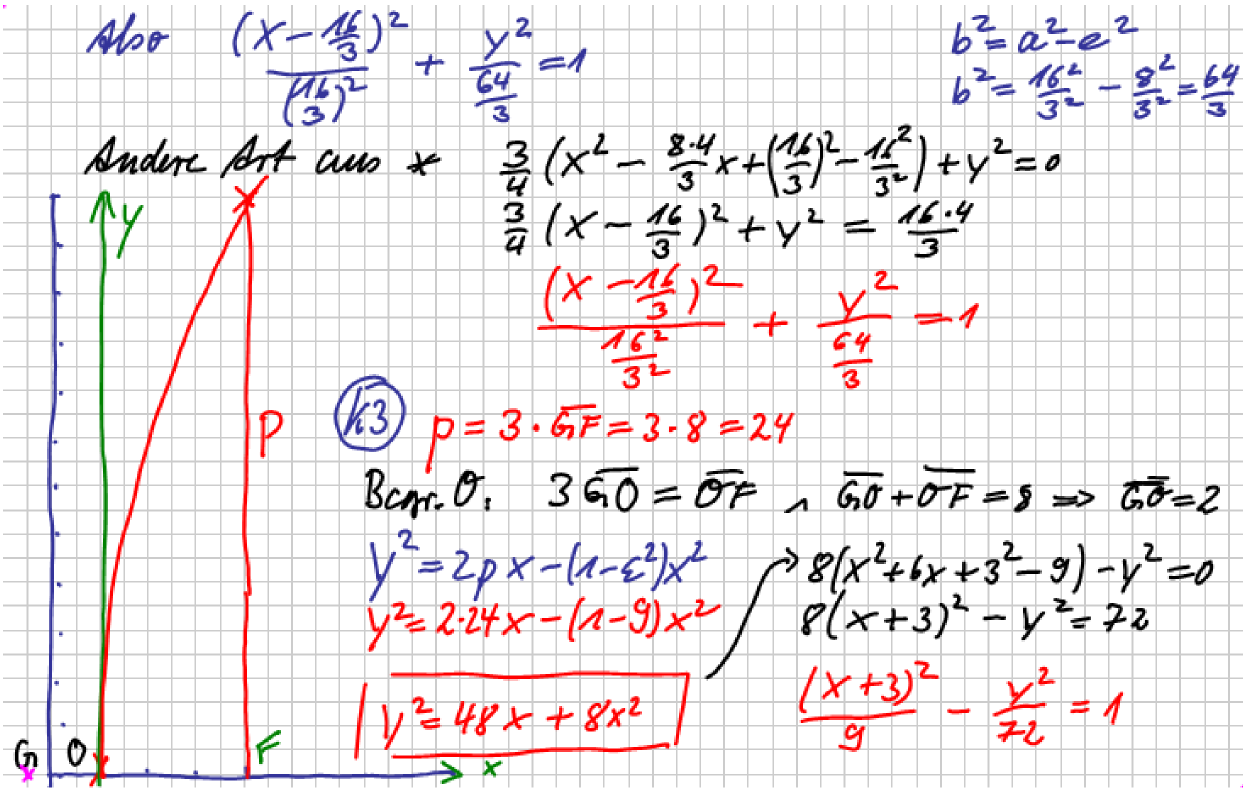
	A	B	C	D
1	$x^2(8-y)=y^3$	$y^2=8x$	$8x^2=y(x^2+y^2)$	$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$
2	$x^2(4-y)=y^2(4+y)$		$4(x^2-y^2)=y(x^2+y^2)$	$4x^2-y^2=yx^2+y^2$
3	$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$	$x^2=8y$	$8x^2-yx^2=y^3$	$8x^2-y=y^3$

Beispiel: Aus der Konstruktion ist zu sehen, dass P(4,4) auf der Kissoide liegt. Nun prüfe ich, welche der Gleichungen für x=4 und y=4 eine wahre Aussage ergibt.
Gleich oben links mit A1 habe ich Glück, denn $4^2(8-4)=4^3$ ist wahr. Das kann die Kissoidengleichung sein. (0/0) erfüllt die Gleichung auch. Für y=8 ist die Gleichung unerfüllbar: 0=8³. Das passt auch zur Kissoide. Da keine andere Kurve den Punkt (4/4) enthält, wird dies die Kissoidengleichung sein. C1 und C3 sind Umformungen davon, D3 ist eine falsche Umformung oder eine andere Kurve.

Arbeitsblatt Kurven Klasse 8 Gleichungen zu K1, K2 K3

Die Scheitelgleichungen lassen sich leicht aufstellen. Man hat ja den Abstand F von G, nämlich 8. p ist bei diesen drei Aufgaben entweder gleich 8, die Hälfte von 8 oder das Dreifache von 8.

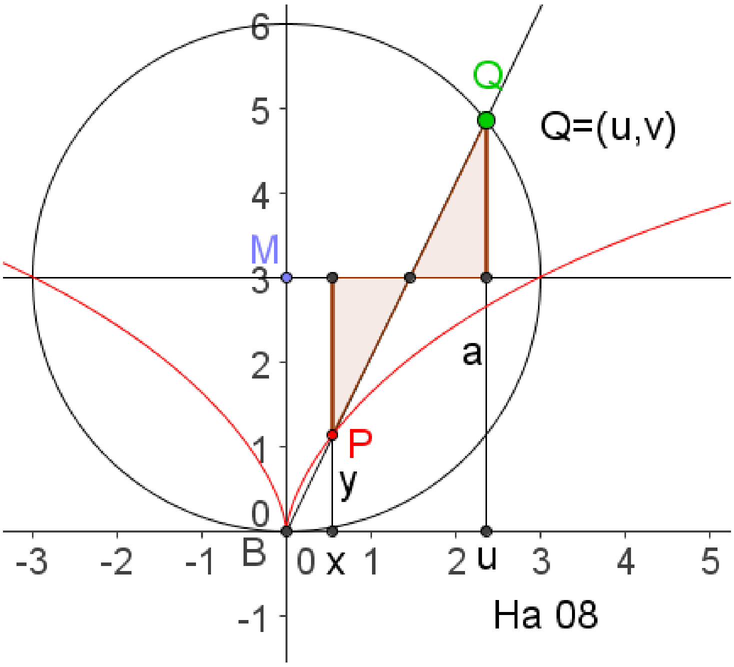




Bei Ellipse und Hyperbel muss man noch die y-Achse in den Scheitel stellen. Die Gleichung in der verschobenen Mittelpunktsform lässt sich auf dieselbe Art bestimmen mit der man in Klasse 9 die Scheitelform der Parabel bestimmt, nämlich mit quadratischer Ergänzung.

Konstuktion 4 vom
Arbeitsblatt Kurven Kl.8

Kissoide



Herleitung der Gleichung:

(1) $v-a=a-y$ ‖ (1) $v=2a-y$

(2) $u^2+(v-a)^2=a^2$ | mit (3) in (2)

(3) $\frac{u}{x}=\frac{v}{y}$

$$\frac{(2a-y)^2}{y^2}\cdot x^2+(a-y)^2=a^2$$

$$(2a-y)^2x^2-2ay^3+y^4=0$$

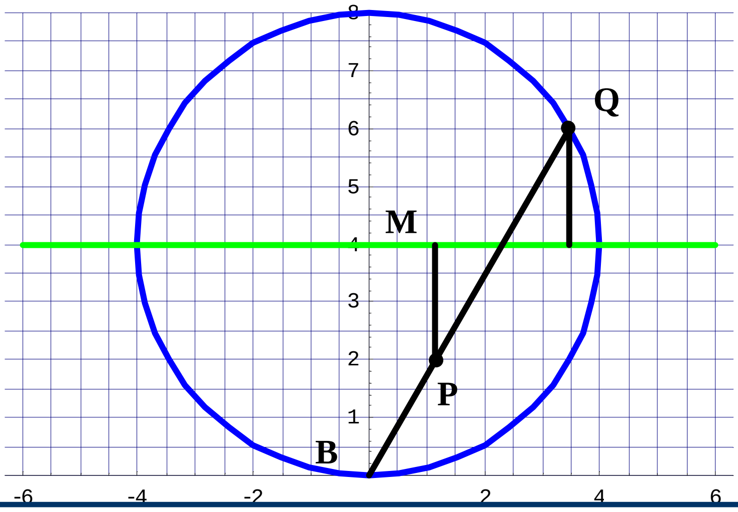
$$(2a-y)^2x^2=(2a-y)y^3 \quad \Big|:(2a-y) \text{ für } y\neq 2a$$

$$\| \ (2a-y)x^2=y^3 \ \| \text{ Kissoide mit } y\neq 2a$$

Für y=2a folgt v=0 aus Gl1, aus Gl2 folgt dann u=0.
also liegt dann Q in B. Rückt Q an B heran, wandert x nach Unendlich und y gegen 2a.

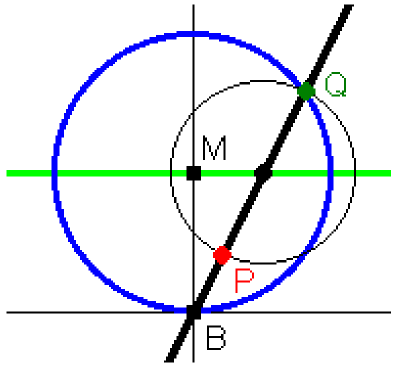
Man sieht auch an der Kissoidengleichung, dass y=2a links 0*x^2 aber rechts 8 a^3 ergibt, das ist nur für x-> unendlich kein Widerspruch.
Also ist die Gerade y=2a die Asymptote.

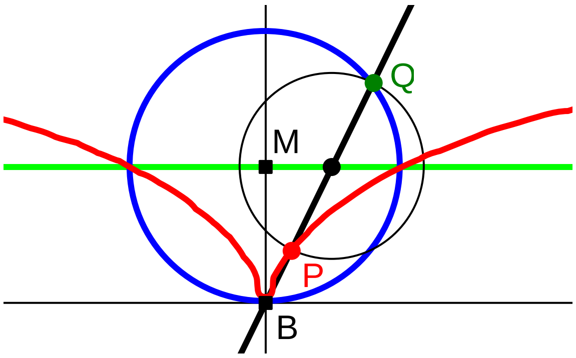
Konstruktion 4
P liegt auf der Geraden BQ und hat von der waagerechten Geraden denselben Abstand wie Q. Das kann man durch Abzählen von Karos feststellen.
Wenn Q auf dem Kreis wandert, bewegt sich P auf einer "**Kissoide**", **einer "Efeu-Kurve**".
Erzeuge weitere Orte für Punkt P.



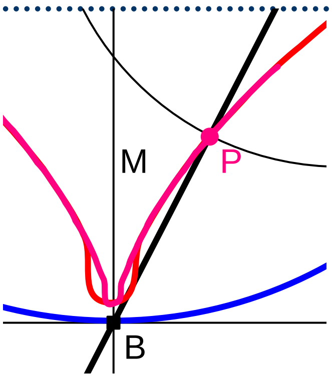
Realisierung in Schritten im DGS Dynageo-Euklid

Erzeuge zuerst das rechtwinklige Kreuz bei B.
Du kannst das Koordinatenkreuz nehmen.
Setze M zugfest auf die Senkrechte,
der blaue Kreis muss durch B verlaufen.
Setze Q zugfest auf den Kreis,
verbinde BQ mit einer Geraden, probiere ob alles zugfest ist.
Wähle mit dem Schnittpunkt-Werkzeug den Mittelpunkt des kleinen Kreises und konstruiere so P.
Überlege, warum damit die oben geforderten Strecken gleich lang sind.
Ziehe an Q und beobachte P, vergleiche mit deiner Von-Hand-Konstruktion oben.





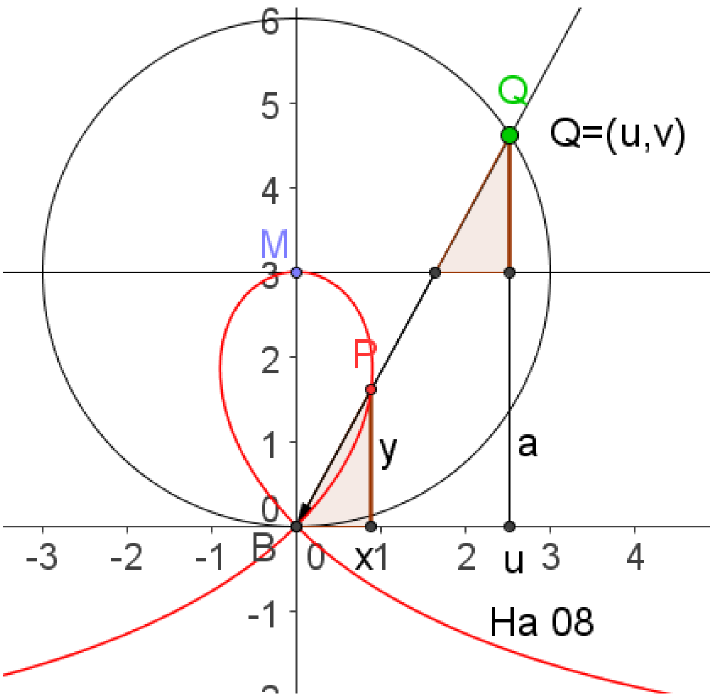
Erzeuge die Ortskurve von P.
Handwerk: Icon „Ortslinie aufzeichnen“, P klicken, Q ziehen.
Diese Kurve heißt „Kissoide“ oder „Cissoide“.
Die Griechen nannten sie so nach der Spitze, die ein Efeublatt hat (cissos=Efeu). Welche besonderen Eigenschaften der Ortskurve kannst du erkennen. Prüfe durch Ziehen an M, ob die von dir gefundenen Eigenschaften zugfest sind.
Lösung: Die Kissoide kann nicht höher steigen als bis zur waagerechten Geraden durch den höchsten Punkt des Grundkreises. Man sagt, sie hat eine **Asymptote**. Weiteres s.u.



Die tropfenförmige (rote) Spitze fand Mathix, als er das obere Bild vergrößerte. Mathilde hat in der vergrößerten Version die Ortskurve nochmals gezeichnet. Sie wurde spitzer.
Wie ist es denn nun? Reicht sie genau bis B? Ist sie spitz?
Lösung: Die Kissoide erreicht B, denn wenn Q ganz oben auf dem Kreis ist, muss P ganz unten, nämlich in B, sein. Computer zeigen nicht immer alles!!!!
Wenn Q im Uhrzeigersinn auf dem Kreis wandert, läuft P in einer Linkskurve auf B zu. Der Kreis ist ganz gleichmäßig, es ist kein Grund zu sehen, warum bei B eine kleine Rechtskurve sein sollte. Nach B ist es auch eine Linkskurve.

Konstuktion 5 vom
Arbeitsblatt Kurven Kl.8

Strophoide



Herleitung der Gleichung:

① $v - a = y$

② $u^2 + (v-a)^2 = a^2$

③ $\frac{v}{y} = \frac{u}{x}$

$$\frac{(y+a)^2}{y^2} x^2 + y^2 = a^2$$

$$(y+a)^2 x^2 = (a^2 - y^2) y^2 \qquad \Big| \text{ 3. Bin. } :(a+y), \; y \neq -a$$

$$\|(a+y)x^2 = (a-y)y^2\|$$

Strophoide

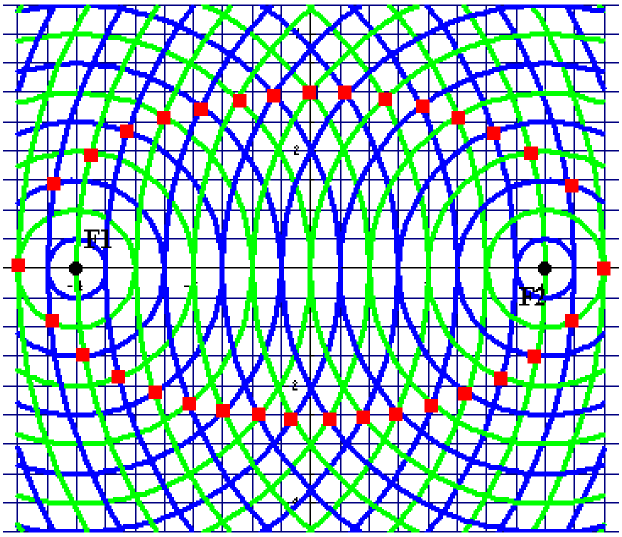
Für y=-a folgt v=0 aus Gl1, aus Gl2 folgt dann u=0.
also liegt dann Q in B. Rückt Q an B heran, wandert x nach Unendlich und y gegen -a.

Man sieht auch an der Strophoidengleichung, dass y=-a links 0*x^2 aber rechts 2 a^3 ergibt, das ist nur für x-> unendlich kein Widerspruch.
Also ist die Gerade y=-a die Asymptote.

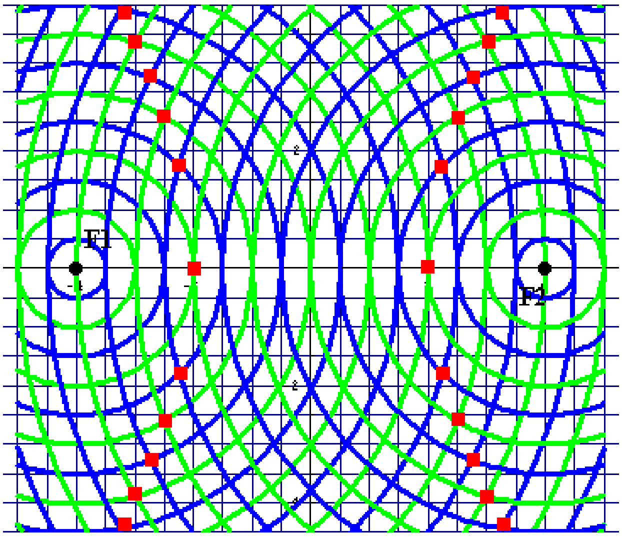
Hinten folgt noch mehr zur Strophoide, in Internet eigene Leitseite.

Konstuktionen 6 und 7 vom Arbeitsblatt Kurven Kl.8

Ellipse

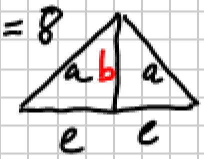


Hyperbel



$2a = 20 \qquad e = 8$

$a = 10$



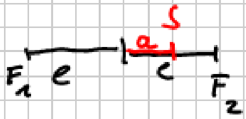
$b^2 = a^2 - e^2$

$b^2 = 100 - 64 = 36$

$b = 6$

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$$

Ellipse



$d = e + a - (e - a)$

$d = 2a$

$d = 8 \Rightarrow a = 4$

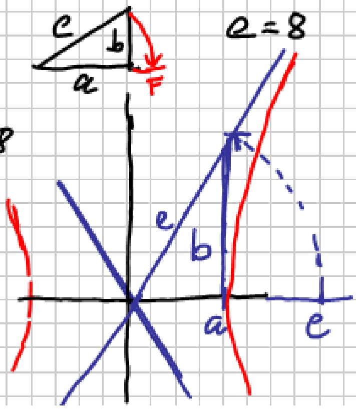
$b^2 = e^2 - a^2$

$b^2 = 64 - 16 = 48$

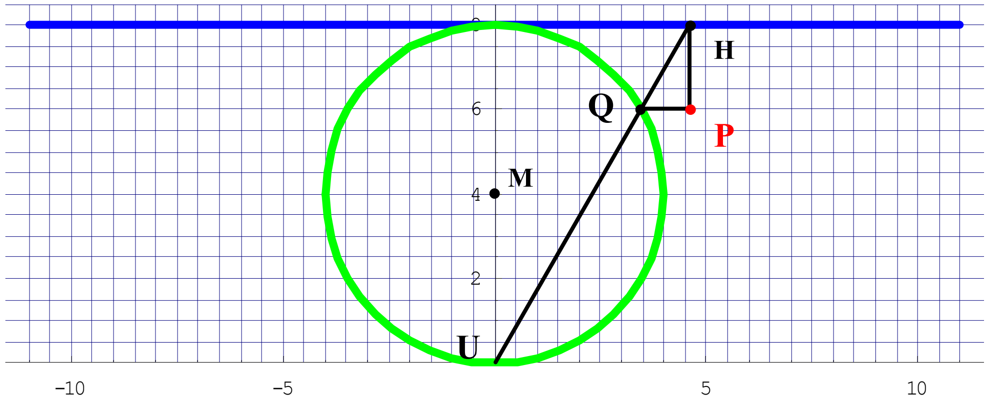
$b = \sqrt{48} \approx 7$

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{48} = 1$$

Hyperbel



Konstruktion der Versiera (Hexe).
Um den Punkt M auf der y-Achse ist ein Kreis mit dem Radius r=4 und eine Parallele zur x-Achse im Abstand 2r zu sehen.
Q läuft auf der Kreisstraße. Durch den Ursprung und Q verläuft eine Gerade, die die Parallele in H schneidet. Auf die gezeichnete Weise ergibt sich P, P hat also die x-Koordinate von H und die y-Koordinate von Q. Erzeuge weitere Stellungen von P, verschaffe dir einen Überblick über die **Ortskurve von P**.



Geschichtliches: Maria Agnesi untersuchte diese Kurve 1748 in ihrem Buch *Istruzioni Analitiche.* In altitalienisch heißt „versiera" sowohl „frei beweglich" als auch „Hexe". In englisch heißt die Kurve nun „Witch of Agnesi". Schon früher hatte Fermat die Kurve untersucht.

Begründe, warum die Punkte B(8/4) und C(-8/4) gesicherte Punkte der Versiera sind und nenne einen weiteren gesicherten Punkt.

Die Gleichung dieser Versiera ist $\boxed{y(x^2+64)=512}$.

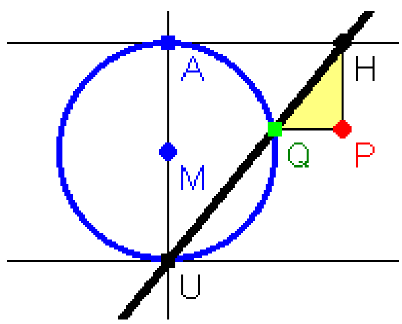
Bestätige, dass die drei sicheren Punkte die Gleichung erfüllen.
Berechne zu drei selbst gewählten x-Werten die zugehörigen y-Werte.
Zeichne die drei so gewonnenen Punkte oben farbig ein.

Mathilde hat im Lexikon als allgemeine Gleichung der Versiera gefunden: $\boxed{y(x^2+a^2)=a^3}$, welchen Wert hat a in dem obigen Fall?
Mathix hat im Internet als allgemeine Gleichung der „Witch of Agnesi" gefunden:
$\boxed{y(x^2+4r^2)=8r^3}$, welchen Wert hat r in dem obigen Fall?
Begründe, warum beide Gleichungen dieselbe Kurve definieren. Was bedeuten a und r?
Mathinchen hat einige Versuche gemacht, die Gleichung umzuformen. Kläre durch Einsetzen eines sicheren Punktes, welche der folgenden Unformungsversuche sicher falsch sind.

a: $\boxed{y\,x^2+64=512}$ b: $\boxed{y=\dfrac{512}{x^2+64}}$ c: $\boxed{y\,(x+8)^2=8^3}$ d: $\boxed{y\,x^2+8^2y=8^3}$

Realisierung in Schritten im DGS Dynageo-Euklid

Erzeuge zuerst das rechtwinklige Kreuz bei U.
Du kannst das Koordinatenkreuz nehmen.
Setze M zugfest auf die Senkrechte. Konstruiere den Kreis mit dem Radius MU und erzeuge den Schnittpunkt A, errichte dort eine Senkrechte, also eine Parallele zur x-Achse.
Setze Q zugfest auf den Kreis, verbinde UQ mit einer Geraden, probiere ob alles zugfest ist.
Erzeuge mit dem Schnittpunkt-Werkzeug H und konstruiere mit zwei senkrechten Geraden den Punkt P. Die Geraden sind hier versteckt.
Ziehe an Q und beobachte P, vergleiche mit deiner Von-Hand-Konstruktion oben.

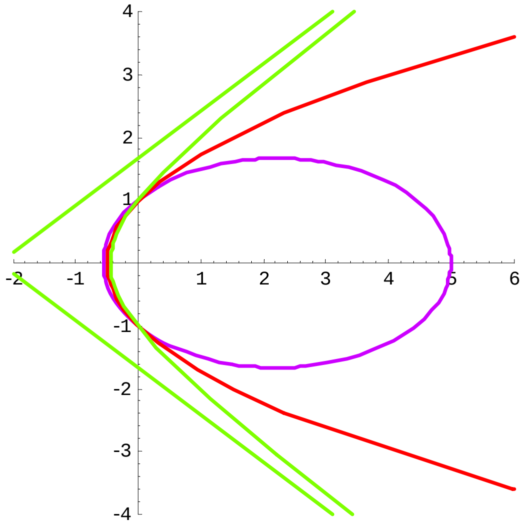


Prof. Dr. Dörte Haftendorn,   Dezember 03

Kegelschnitte

$$r = r(\theta) = \frac{p}{1-\varepsilon\cos\theta}$$

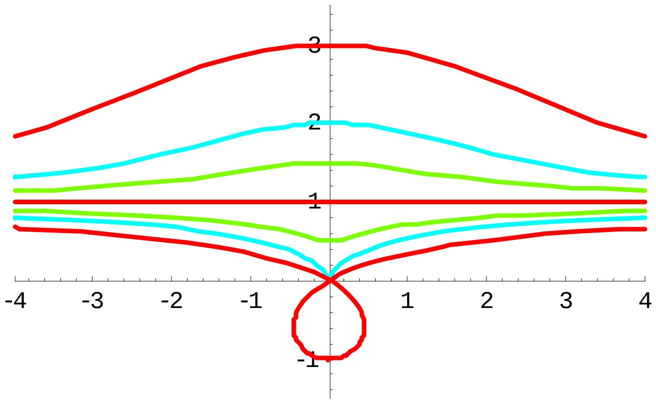
Pol im Brennpunkt



Konchoiden

Gerade Straße, Höhenlage a
Leinenlänge k

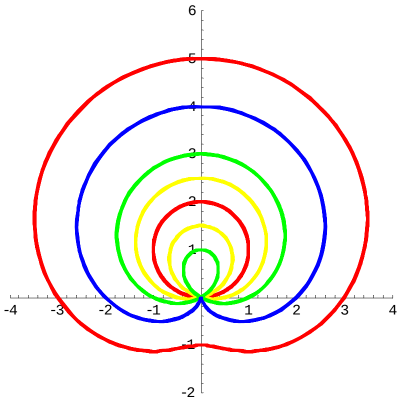
$$r = r(\theta) = \frac{a}{\sin\theta} \pm k$$



Pascalsche Schnecken = Konchoiden mit Kreisstraße durch (0/0), dort steht der Baum

Mittelpunkt $(\frac{a}{2},0)$, **Leinenlänge k**

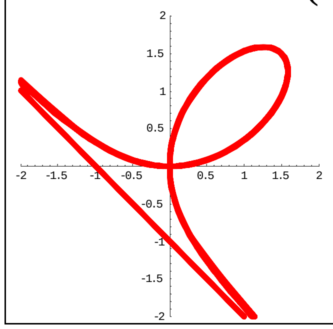
$$r = r(\theta) = a \cdot \sin(\theta) \pm k$$



Kardioide mit a=k, **hier blau, 2. von außen**

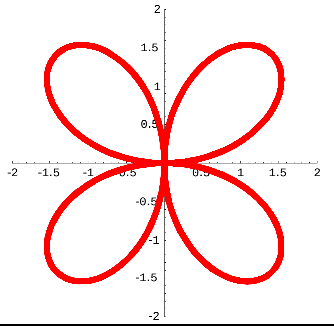
Kartesisches Blatt, k=1

$$r = r(\theta) = \frac{3}{2}k\frac{\sin(2\theta)}{\sin(\theta)^3 + \cos(\theta)^3}$$



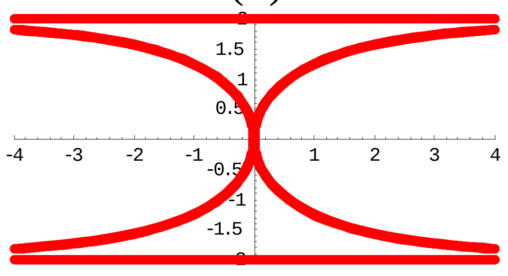
Rosette, Rosenkurve, c=4

$$r = r(\theta) = \frac{c}{2}\sin(2\theta)$$



Kappa-Kurve

$$r = r(\theta) = \frac{a}{\tan(\theta)}$$



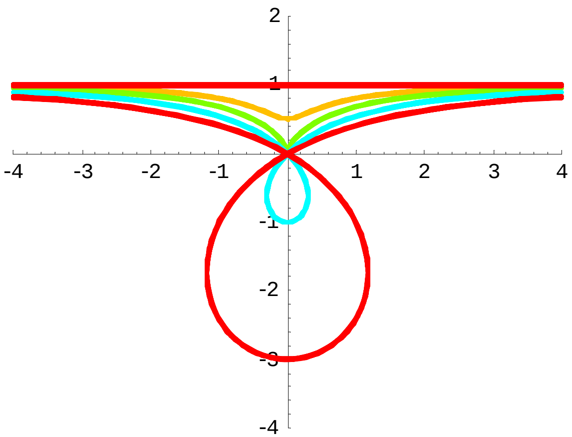
Algebraische Kurven   Gleichungsübersicht in Polarkoordinaten   -2-

Prof. Dr. Dörte Haftendorn,   Dez. 03

Kissoide allgemein

$$r = r(\theta) = c\,\frac{1 - k\sin(\theta)}{\sin(\theta)}$$

k=0, k=0,5,   Efeukurve k=1,   Strophoide k=2, Trisektrix k=4

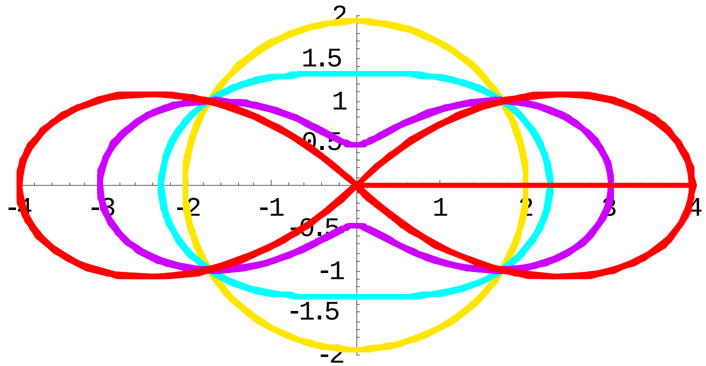


Cassinische Kurven

$$A = \frac{k^2\cos^2(2\theta)}{2}$$

$$r = r(\theta) = A \pm \sqrt{A^2 + 4a^2 - k^2}$$

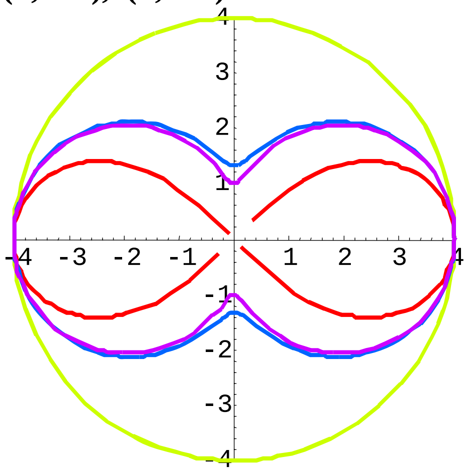
Bernoullische Lemniskate a=1,k=2



Boothsche Lemniskaten

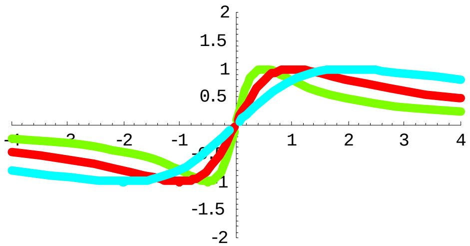
$$r^2 = k^4\left(\frac{\cos^2(\theta)}{a^2} \pm \frac{\sin^2(\theta)}{b^2}\right)$$

a=1, k=2, (+,b=1 außen), (-,b=1,Lemniskate), (+,b=3), (+,b=4)



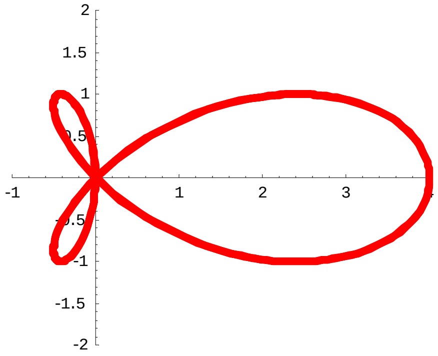
Serpentine $k = 1,\ a = \frac{1}{2}, a = 1,\ a = 2$

$$r^2 = r(\theta)^2 = a\,\frac{2k\cos(\theta) - a\sin(\theta)}{\sin(\theta)\cos(\theta)^2}$$



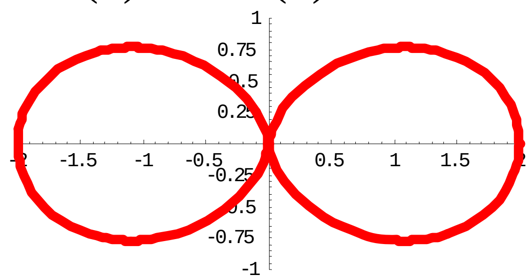
Dreiblatt,

$$r = r(\theta) = 2\sin(\theta)\,\cos(2\theta)$$



Doppel-Ei

$$r = r(\theta) = a\,\cos(\theta)^2$$



Algebraische Kurven Übersicht			Prof. Dr. Dörte Haftendorn 10/2001	
Name	**Kartesische Gleich.**	**Parameterdarst.**	**Polarkoordinaten**	**Sonstiges**
Ellipse	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$x=a\cos\theta$ $y=b\sin\theta$	$r=r(\theta)=\frac{p}{1-\varepsilon\cos\theta}$ **Pol im** $0<\varepsilon<1$ **Brennpunkt**	Kegelschnitt
Hyperbel	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$x=a\cosh\theta$ $y=b\sinh\theta$	Wie Ellipse, aber mit $1<\varepsilon$	Kegelschnitt
Parabel	$y^2=2px$	$x=\frac{p\cos\theta}{1-\cos\theta}$ $y=\frac{p\sin\theta}{1-\cos\theta}$	$r=r(\theta)=\frac{p}{1-\cos\theta}$	Kegelschnitt
Kegelschnitte	$y^2=2px-(1-\varepsilon^2)x^2$ Allg. Scheitelgleichung		$r=r(\theta)=\frac{p}{1-\varepsilon\cos\theta}$	Alle Kegelschnitte
Konchoide	$(x^2+y^2)(y-a)^2=k^2y^2$	Straße waagerecht in Höhe a Wie unten mit $f(t)=a$	$r=r(\theta)=\frac{a}{\sin\theta}\pm k$	Straße waagerecht in Höhe a
Konchoide Allg.		$x=t\left(1\pm\frac{k}{\sqrt{t^2+f(t)^2}}\right)$ $y=f(t)\left(1\pm\frac{k}{\sqrt{t^2+f(t)^2}}\right)$	$r=r(\theta)=R(\theta)\pm k$	Straße $y=f(x)=f(t)$ $R=R(\theta)$ Leinenlänge k, Baum im Ursprung

Pascalsche Schnecken	$(x^2+y^2-a\,x)^2=k^2\,(x^2+y^2)$		$r=r(\theta)=a\cos(\theta)\pm k$	
Kardioide	$(x^2+y^2-a\,x)^2=a^2\,(x^2+y^2)$		$r=r(\theta)=a\cos(\theta)\pm a$	Spez a=k
Kartesisches Blatt	$x^3+y^3=3k\,x\,y$ $k\in\mathbb{R}^+$			Schräge Lage, bei Schmidt Auch gerade Lage
Rosenkurve Rosette	$(x^2+y^2)^3=c^2\,x^2y^2$		$r=r(\theta)=\dfrac{c}{2}\sin(2\theta)$	Schupp Schmidt
Boothsche Lemniskaten	$(x^2+y^2)^2=k^4\left(\dfrac{x^2}{a^2}\pm\dfrac{y^2}{b^2}\right)$		$r^2=k^4\left(\dfrac{\cos^2\theta}{a^2}\pm\dfrac{\sin^2\theta}{b^2}\right)$	
Bernoullische Lemniskate	$(x^2+y^2)^2=k^2(x^2-y^2)$		$r^2=k^2\cos(2\theta)$	Spez a=b=k
Alg Kissoide	$y^2(c-x)=x^2(c(\varepsilon^2-1)+x)$			
Kissoide Efeukurve	$x^2(c-y)=y^3$ waagerecht			
Kissoide Efeukurve	$y^2(c-x)=x^3$	$x=c\sin^2\theta$ $y=\dfrac{c\sin^3\theta}{\cos\theta}$	$r=c^2\tan\theta\sin\theta$	Schupp/23
Strophoide	waagerecht			
Strophoide	$y^2(c-x)=x^2(c+x)$		$r=-c\dfrac{\cos 2\theta}{\cos\theta}$	Spez Kissoide

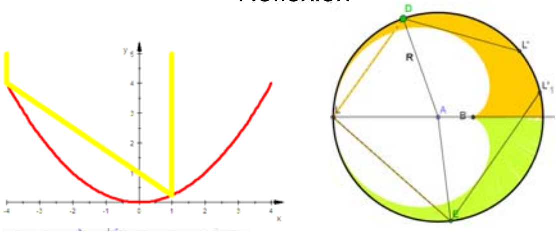
Trisektrix	$y^2(c-x)=x^2(3c+x)$		$r=\dfrac{c}{\cos\theta}-4\cos\theta$	Spez Kissoide
Cassinische Kurven	$(x^2+y^2)^2-2e^2(x^2-y^2)$ $=4a^2-e^2$		$r^4-2c\,r^2\cos 2\theta$ $=a^4-c^4$	Produkt der Abstäbde von zwei festen Punkten ist konstant
Dreiblatt	$(x^2+y^2)^2=2x(x^2-y^2)$			
Kappakurve	$y^4=x^2(a^2-y^2)$		$r=\pm\dfrac{a}{\tan\theta}$	Schmidt / 72 Verwandt mit Strophoide gemeinsame Erzeugungsweise
Serpentine	$y(a^2+x^2)=2\,a\,r\,x$			Schmidt / 61
Versiera der Maria Agniesi	$y(r^2+x^2)=2\,r^3$			Schmidt / 64 mit Serpentine gemeinsame Erzeugungsweise
Kartesische Ovale	$(x^2+y^2-f^2)^2=(h-x)\cdot g$		$r^2+d^2=r(a+b\cos\theta)$	Schmidt / 143 Abst. Wie bei Ellipse, nur vorher mit festen Zahlen multipiziert. U.a Erzeugungsweisen
Doppel-Ei-Linie	$(x^2+y^2)^3=a^2x^4$		$r=a\ \cos^2\theta$	Als Kochoide der Rosette

-41-

Aufgeführt sind nur algebraische Kurven.
Sie haben eine algebraische kartesische Gleichung und sind mit Zirkel und Lineal punktweise erzeugbar. Damit sind Sie im DGS ohne weitere mathematische Kenntnisse realisierbar.
Konstuktionsbeschreibungen, weitere Informationen, auch Literaturangaben: www.doerte-haftendorn.de, dort bei Mathematik, Algebraische Kurven oder Analytische Geometrie. Weiterer Zugang: http://www.uni-lueneburg.de/mathe-lehramt

Kegelschnitte, andere algebraische Kurven

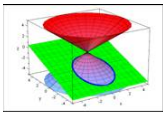
mit besonderem Blick auf die Reflexion



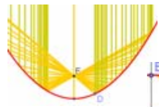
Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Universität Lüneburg, www.mathematik-verstehen.de, www.leuphana.de/matheomnibus

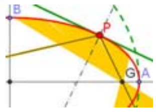
Gliederung

Kegelschnitte

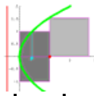


Reflexion





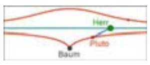
Verschiedene gemeinsame interaktive Konstruktionen



παραβάλλειν

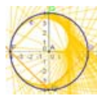
GeoGebra

andere algebraische Kurven



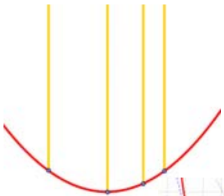
Konchoiden

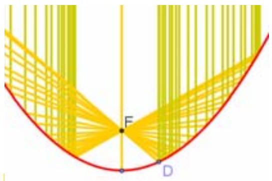
Reflexion

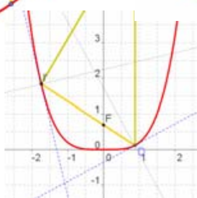


Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Universität Lüneburg, www.mathematik-verstehen.de, www.leuphana.de/matheomnibus

Parabel und einfallendes Licht





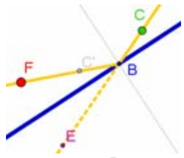


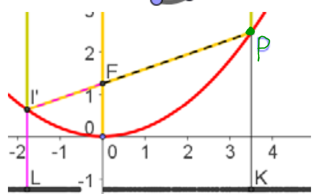
Bei der Parabel werden achsenparallel einfallende Strahlen zum Brennpunkt hin reflektiert.

Hat man keine Parabel, ist es anders.

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Universität Lüneburg, www.mathematik-verstehen.de, www.leuphana.de/matheomnibus

Parabel und gespiegelter Brennpunkt



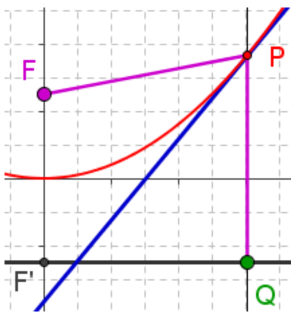


Parabeln haben eine Leitgerade. Jeder Punkt der Parabel ist vom Brennpunkt ebenso weit entfernt wie von der Leitgeraden.

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Universität Lüneburg, www.mathematik-verstehen.de, www.leuphana.de/matheomnibus

Parabel als Ortskurve

Die Parabel ist der geometrische Ort aller Punkte P, die von einem festen Punkt F ebenso weit entfernt sind wie von einer festen Geraden.



F heißt **Brennpunkt**,
die Gerade heißt **Leitgerade**.

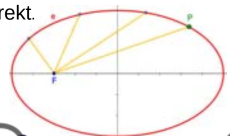
Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Universität Lüneburg, www.mathematik-verstehen.de, www.leuphana.de/matheomnibus

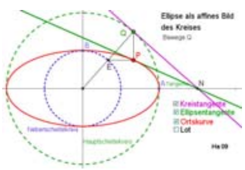
Ellipse und dasselbe Vorgehen

Wie erhalten wir auf einfache Weise eine Ellipse?

Ellipse aus der bekannten Gleichung und die Tangente erhält man in GeoGebra direkt.

Alternativ aus der Stauchung eines Kreises und Konstruktion der Tangente aus der Kreistangente.

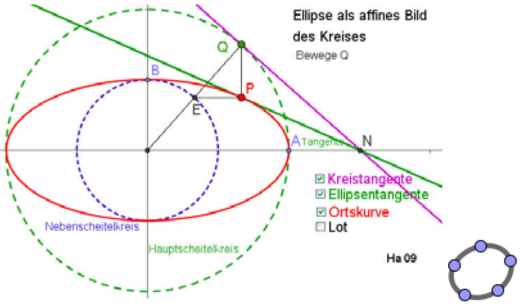




Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Universität Lüneburg, www.mathematik-verstehen.de, www.leuphana.de/matheomnibus

Ellipse und dasselbe Vorgehen

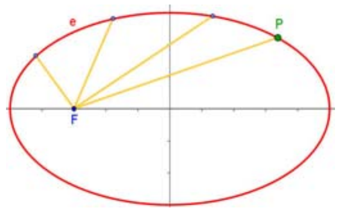
Wie erhalten wir auf einfache Weise eine Ellipse?



Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Universität Lüneburg, www.mathematik-verstehen.de, www.leuphana.de/matheomnibus

Ellipse und dasselbe Vorgehen

In GeoGebra erhält man die Ellipse aus der bekannten Gleichung und die auch die Tangente direkt.



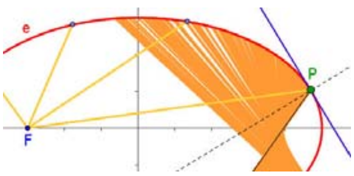
Bei der Ellipse gehen Strahlen von einem Punkt der Achse aus.

Wie werden sie reflektiert?

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Universität Lüneburg, www.mathematik-verstehen.de, www.leuphana.de/matheomnibus

Ellipse und dasselbe Vorgehen

Bei der Ellipse gehen Strahlen von einem Punkt der Achse aus. Wie werden sie reflektiert?

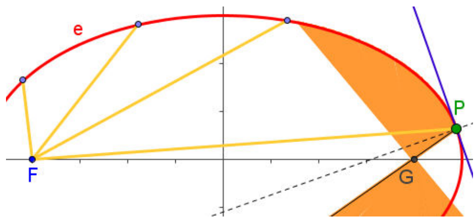


Mit beliebiger Stellung von F ergibt sich nichts Sinnvolles.

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Universität Lüneburg, www.mathematik-verstehen.de, www.leuphana.de/matheomnibus

Ellipse und dasselbe Vorgehen

Zieht man F so, dass **ein** reflektierter Strahl durch den zu F symmetrischen Punkt G verläuft, dann ergibt sich, dass **alle reflektierten Strahlen** durch G verlaufen.

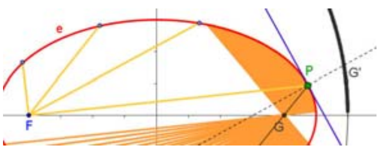


Wir haben die Brennpunkte der Ellipse gefunden.

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Universität Lüneburg, www.mathematik-verstehen.de, www.leuphana.de/matheomnibus

Ellipse und dasselbe Vorgehen

Bei der Ellipse werden von einem Brennpunkt ausgehende Strahlen zum anderen Brennpunkt hin reflektiert.

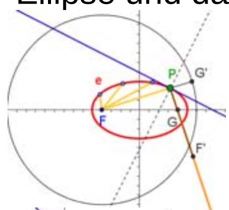


Gehen wir nun so vor wie bei der Parabel, dann spiegeln wir G an der Tangente zu G'.

Der Ort von G' scheint ein Kreis zu sein!

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Universität Lüneburg, www.mathematik-verstehen.de, www.leuphana.de/matheomnibus

Ellipse und dasselbe Vorgehen

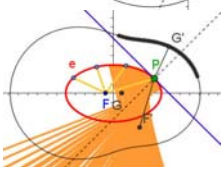


Wer die Fadenkonstruktion der Ellipse kennt, sieht sofort :

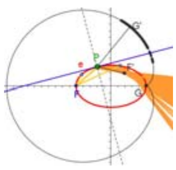
$$\overline{FP}+\overline{PG}=const$$

$$\Rightarrow$$

$$\overline{FP}+\overline{PG'}=const=R$$



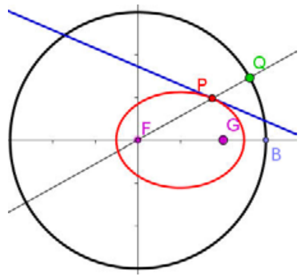
Sind F und G Brennpunkte, dann gibt es den Leitkreis, sonst aber nicht.



Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Universität Lüneburg, www.mathematik-verstehen.de, www.leuphana.de/matheomnibus

Ellipse und dasselbe Vorgehen

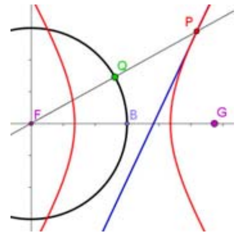
Nun machen wir wieder aus dem gefundenen Ort, dem Leitkreis, eine Konstruktion der



Ellipse

Hyperbel und dasselbe Vorgehen

Nun machen wir wieder aus dem gefundenen Ort, dem Leitkreis, eine Konstruktion:

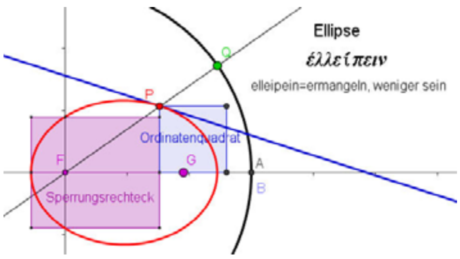


Und schon haben wir mehr als wir suchten:

Hyperbel

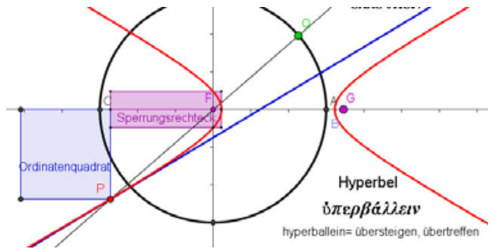
Namensgeheimnis

In der Leitkreiskonstruktion ergibt sich geometrisch das Namensgeheimnis:



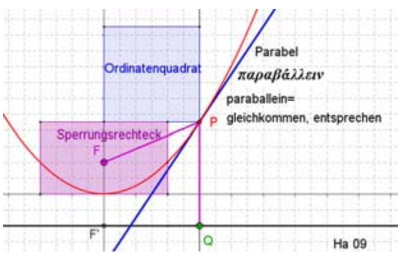
Namensgeheimnis

In der Leitkreiskonstruktion ergibt sich geometrisch das Namensgeheimnis:



Namensgeheimnis

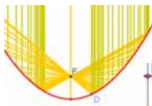
Auch in der Leit**geraden**konstruktion der Parabel ergibt sich das Namensgeheimnis geometrisch :



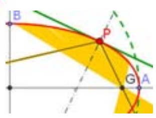
Eigentlich wird bei gemeinsamer Betrachtung aller Kegelschnitte die Parabelachse waagerecht gelegt.

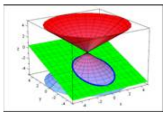
Gliederung

Kegelschnitte

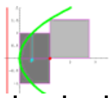


Reflexion





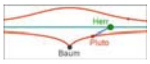
Verschiedene gemeinsame interaktive Konstruktionen



παραβάλλειν

GeoGebra

andere algebraische Kurven

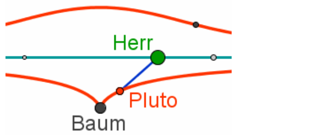


Konchoiden

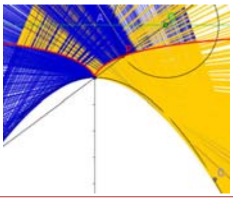
Reflexion

Konchoiden (Hundekurven)

Mein Vortrag 2006 MNU in Karlruhe



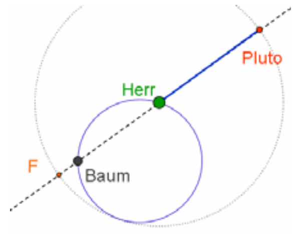
Ist die Hüllkurve eine Parabel?



Konchoide des Nikomedes

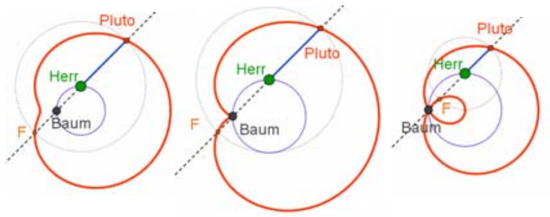
Konchoiden (Hundekurven)

Pascalsche Schnecken



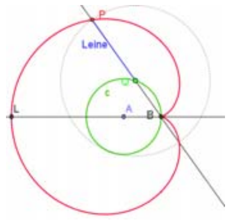
Konchoiden (Hundekurven)

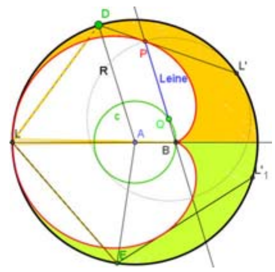
Pascalsche Schnecken



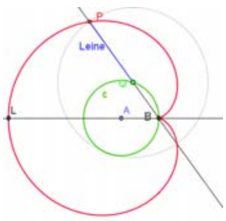
Hier machen wir weiter!

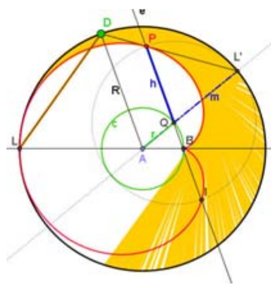
Katakaustik



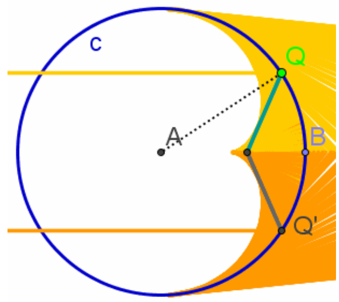


Kardioide konstruiert aus der Reflexion





Nephroide konstruiert aus der Reflexion



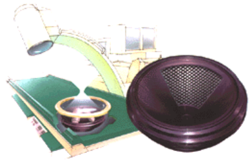
Kurven in unserer Welt

Parabolrinnen-Kollektor

Die Flüstergewölbe der Haltestelle Nieschlagstraße erlauben eine Kommunikation zwischen den beiden Seiten der Haltestelle über die Straße. Eine Idee von Wolfgang Laubersheimer im Rahmen des Projektes "BUSSTOPS" von 1994. Sie befindet sich in der Davenstedter Straße und wird von der Stadtbahnlinie 9 und von den Buslinien 100 und 200 (Ringlinien) angefahren.

Kurven in unserer Welt

Nierensteinzertrümmerer



Eine Vielzahl von piezokeramischen Elementen sind an der Innenseite einer konkaven Schale angebracht. Alle diese Keramiken werden zur gleichen Zeit mit einem extem kurzen Hochspannungsimpuls beaufschlagt und erzeugen eine mechanische Schockwelle. Diese lässt sich durch die konkave Form der Schale auf einen Punkt konzentrieren. Durch die hohe Energie im Fokus dieser Schockwelle werden vorhandene Nierensteine zertrümmert, so dass diese Bruchstücke den Körper auf natürliche Weise über den Harnleiter verlassen können. Auf diese Weise ist es möglich, völlig ohne Narkose, ohne chirurgischen Eingriff und fast schmerzfrei Nierensteine oder auch Gallensteine zu entfernen.

Bauformen: Zylinder

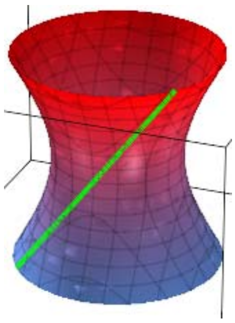
Werkstoffe: SONOX® P 4, SONOX® P 5, SONOX® P 53

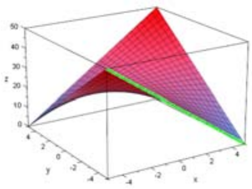
Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Universität Lüneburg, www.mathematik-verstehen.de, www.leuphana.de/matheomnibus

Parabeln in unserer Welt

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Universität Lüneburg, www.mathematik-verstehen.de, www.leuphana.de/matheomnibus

Kurven in unserer Welt

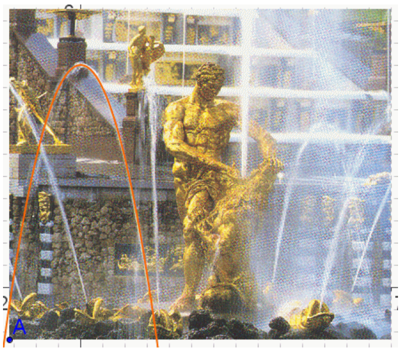




Regelflächen

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Universität Lüneburg, www.mathematik-verstehen.de, www.leuphana.de/matheomnibus

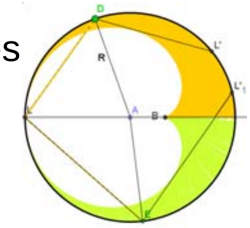
Kurven in unserer Welt



Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Universität Lüneburg, www.mathematik-verstehen.de, www.leuphana.de/matheomnibus

Kegelschnitte, andere algebraische Kurven mit besonderem Blick auf die Reflexion

Und alles steht im Internet

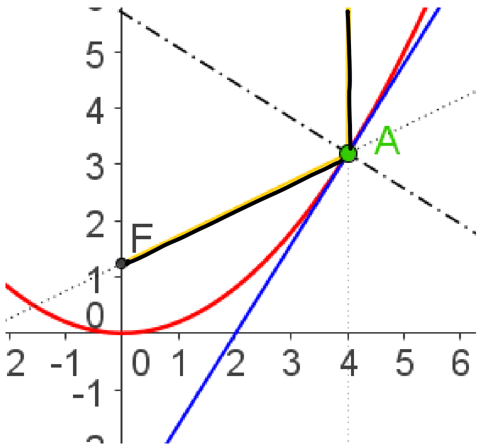


www.mathematik-verstehen.de

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Universität Lüneburg, www.mathematik-verstehen.de, www.leuphana.de/matheomnibus

Parabel-Reflexion beobachten

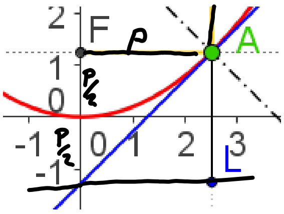


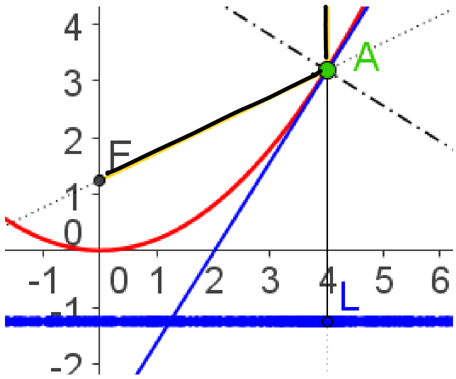
Konstruktionsbeschreibung

1. Gegeben ist eine Parabel und ein Punkt A auf ihr.
2. Erzeuge die Tangente in A an die Parabel mit deinem Werkzeug. z.B. tangente[A,f] in GeoGebra
3. Errichte in A die Senkrechte auf der Tangente.
4. Die Parallele zur y-Achse durch A soll den einfallenden Lichtstrahl tragen.
5. Spiegele sie an der Senkrechten aus 3. Das ist der weitergehende Strahl.
6. Schalte für diesen Strahl die Spur ein und bewege A. Beobachte!
7. Hebe das Besondere durch einen Punkt hervor und formuliere eine Behauptung.

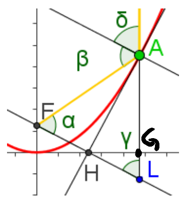
Weiterführung:

8. Spiegele die Strecke FA an der Tangente, Ihr Bild sei LA.
9. Beobachte, dass AL stets senkrecht zur x-Achse ist.
10. Beobachte, dass L stets auf einer Parallelen zu x-Achse wandert. Diese Ortslinie heißt Leitgerade der Parabel.
11. Der Abstand FA in der rechts gezeigten besonderen Stellung wird "Halbparameter p" genannt.
12. Erkunde die Zusammenhänge der Lage von F und der Leitgeraden und der Größe des Stauchfaktor a der Parabel mit dem Halbparameter p.





13. Namen: F heißt "Brennpunkt" der Parabel, 2p heißt die "Sperrung" der Parabel.
14. Informiere dich auf der Website über das "Namensgeheimnis" der Parabel. Warum heißt die Parabel eigentlich Parabel?



Beweis zu 9.: Wegen der Spiegelung ist FL senkrecht zur Tangente und damit parallel zum Einfallslot aus 3. Damit kommen Einfalls- und Ausfallswinkel als Stufen- bzw. Wechselwinkel im gleichschenkligen Dreieck FLA als Basiswinkel vor. H halbiert FL, damit sind F und L gleichweit von der x-Achse entfernt. H hat die halbe Abszisse von A.

Ergebnisse zu 12.: Üblicherweise ist p der Abstand von F und A in der Sonderstellung, dass A dieselbe Ordinate wie F hat. Dann hat F die Ordinate p/2. Für die Parabel y=a x^2, die an der Stelle p der Wert p/2 hat, muss gelten: $p/2 = a\,p^2 \Rightarrow a = 1/2p$ also $2py = x^2$

Beweis von7: Dass nämlich alle Strahlen die y-Achse in demselben F treffen.
Sei f die Ordinate eines F^*. In der rechten Skizze bildet der Ursprung mit F^* und H ein Dreieck, zum dem das Dreieck HAG ähnlich ist. H hat die halbe Abszisse von A, wie oben gezeigt. Damit gilt :

$$f : \frac{x}{2} = \frac{x}{2} : y \;\wedge\; y = \frac{x^2}{2p} \Rightarrow f = \frac{x^2}{4} : \frac{x^2}{2p} = \frac{p}{2}$$

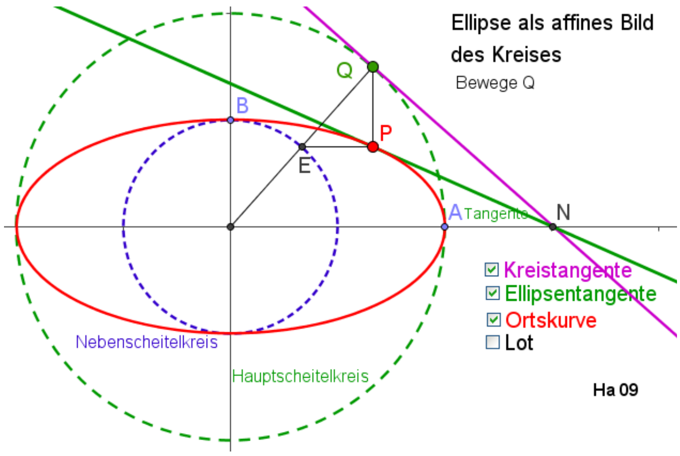
Also verlaufen alle Strahlen durch denselben Punkt F.

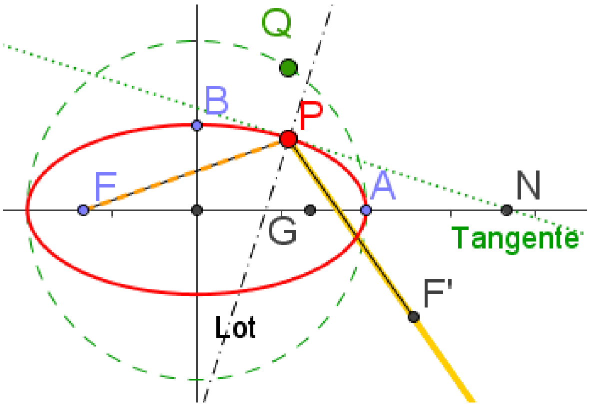
Beweis zu 10.: Da nun F fest ist, H immer auf der x-Achse liegt und L der Spiegelpunkt von F ist, hat L immer dieselbe Ordinate, nämlich –p/2.

Anmerkung: Hier wird von der Parabel ausgegangen, die Reflexion beobachtet und Leitgerade als Ortslinie erzeugt und nachgewiesen. Dabei wurde auch bewiesen, dass F wirklich der gemeinsame Schnittpunkt aller reflektierten Strahlen ist. Es wird seit der Antike (Apollonius) anders herum definiert: **Die Parabel ist der geometrische Ort aller Punkte , die von einem festen Punkt F und einer "Leitgeraden" g den gleichen Abstand haben.** Dann sind der Halbparameter p und der Abstand von F und g per definitionem gleich und die Scheiteltangente halbiert diesen Abstand. Die Mittelsenkrechte FL ist stellt sich dann stets als Tangente heraus, die Winkelaussagen aus Beweis zu 9. gelten ebenso und damit ist dann die Reflexion bewiesen. Siehe dazu eine Extraseite.

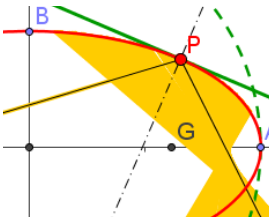
Ellipse und Reflexion, eine Erkundung

Wenn man die Ellipse aus der Stauchung des Hauptscheitelkreises konstruiert, kann man leicht zum Ort von P auch die Tangente von P erhalten.
Durch sie kann man für Reflexionen von Strahlen in P das Einfallslot konstruieren.

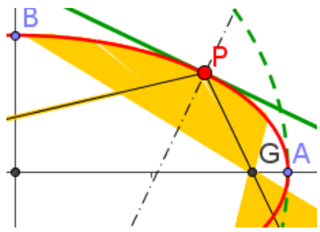




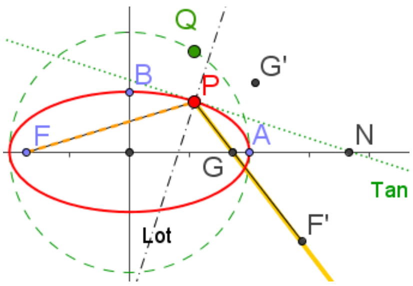
Wir wählen einen Punkt F auf der x-Achse, von dem aus ein Strahl in P reflektiert wird. G ist der bezüglich der Ellipse zu F symmetrische Punkt. I.A. verläuft der reflektierte Strahl nicht durch G.

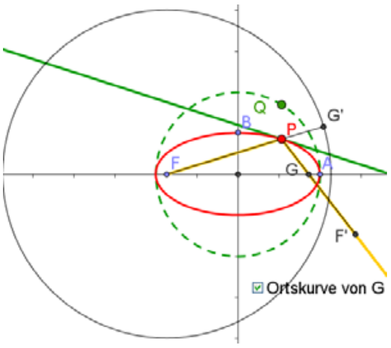


Beobachten wir nun, wie sich die reflektierten Strahlen verhalten, wenn P auf der Ellipse wandert. Letzteres erreicht man durch Ziehen an Q.
Die Strahlen werden nicht gebündelt.
Ziehen wir nun F so, dass der refklektierte Stahl durch G verläuft, dann tritt die Bündelung in G ein. Alle Strahlen, die von F ausgehen, werden nach G reflektiert. Darum heißen F und G die **Brennpunkte der Ellipse**.



Bei der Parabel haben wir durch Spiegelung des Brennpunktes an der Tangente die Leitgerade gefunden. Sie war der geometrische Ort dieses Spiegelpunktes.
Daher spiegeln wir nun den Brennpunkt G an der Tangente und erkunden den Ort von G'.

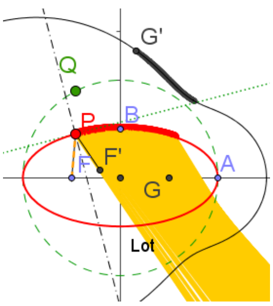


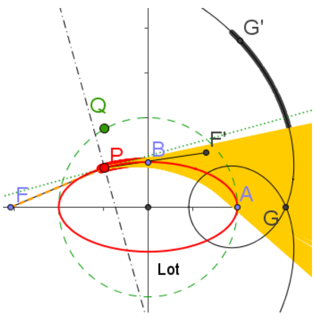


Erstaunlicherweise ist der Ort von g' ein Kreis, er heißt der

Leitkreis der Ellipse.

Er hat sich hier durch Beobachtung ergeben und ist streng genommen noch nicht bewiesen. Setzen wir aber die Fadenkonstruktion der Ellipse als bewiesen voraus, dann ist alles klar: Wenn FP+FG konstant ist, dann ist auch FP+PG' konstant. Daher liegt G' auf einem Kreis um F und der Leitkreis ist nachgewiesen. Auch hier kann man umgekehrt aus dem Leitkreis die Ellipse konstruieren.



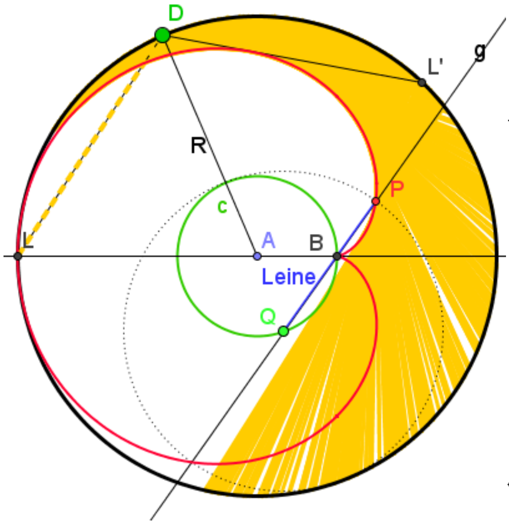


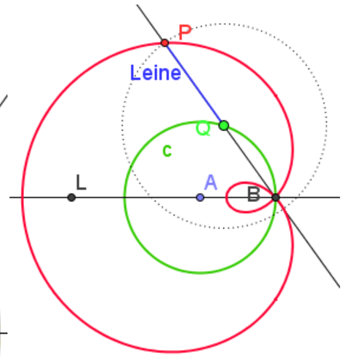
Die Ortskurve von G bleibt kein Kreis, wenn wir wieder falsche Stellungen für F wählen, bei denen der reflektierte Strahl nicht G trifft.

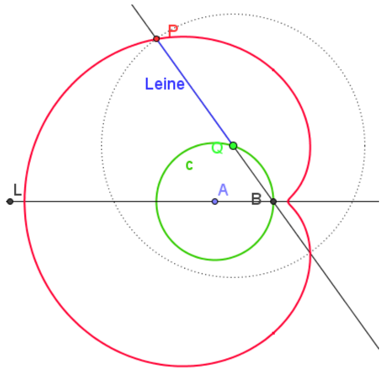
Anmerkung zu alterativem Vorgehen:
Aus der Fadenkonstruktion folgt die Leitkreiskonstruktion, bei der man P aus dem Schnitt der Mittelsenkrechten von G und G' mit dem Radius FG' erhält. Hieraus folgt die Reflexionseigenschaft sofort. Allerdings ist dann das Vorgehen nicht wie bei der Parabel und es ist nicht geeignet für das Erkunden.

Kardioide und Reflexion

Pascalsche Schnecken entstehen als Konchoiden, wenn Q auf einem Kreis wandert, der "Baum" auf dem Kreisrand liegt . Wenn die Leine die Länge des Durchmessers hat, entsteht die Kardioide.

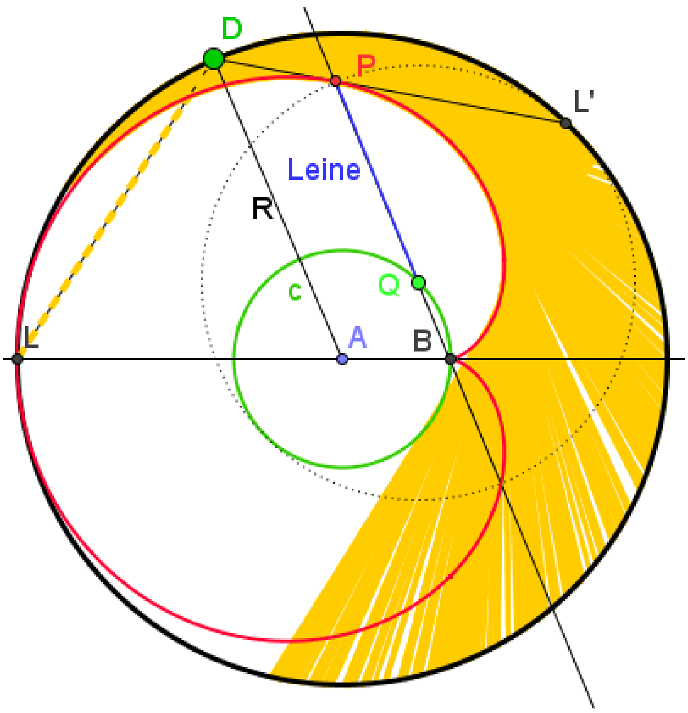


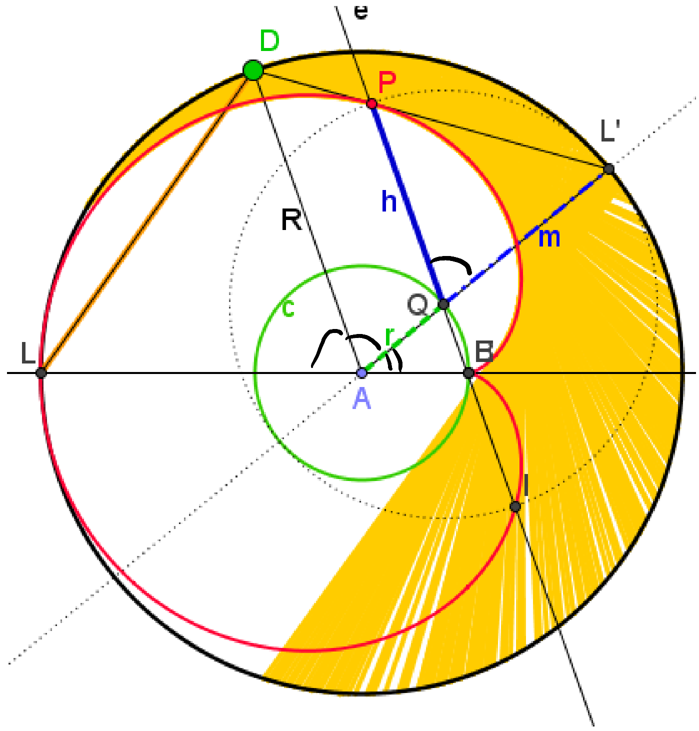




Andererseits entsteht die Kardiodie als Hüllkurve von Reflektionsstrahlen, also als **Katakaustik.** L ist die Lichtquelle, der Strahl von L nach D wird nach L' reflektiert.
In GeoGebra entsteht das gelbe Gebiet als Spur von DL'. Es passt genau zu der von P erzeugten Kardioide.

Inspiration zu einem Beweis:





Beim Ziehen merkt man, dass eine Parallele zum Radius DA entsteht, wenn man Q so zieht, dass P der Berührpunkt der Strahltangente wird. BEWEIS: Rechts ist nun Q nicht mehr frei sondern folgendermaßen konstruiert: L'A schneidet den Kreis c in Q. In Q wird die Parallele zu R=DA konstruiert, die beim Schnitt mit DL' P bestimmt. Stets gilt m=R-r, also ist m konstant. Dreieck L'DA ist gleichschenklig mit Basis L'D. also ist Dreieck L'PQ gleichschenklig mit Basis L'P. Damit ist auch h in jeder Stellung gleich lang, kann also die Leine bei der Kardioidenkonstruktionen sein.
Im gepunkteten Leinenkreis sind m,h,Ql der Durchmesser von Q durch A alle gleich lang und stets 2r. Nun bleibt zu zeigen, dass Gerade QP durch B verläuft, wenn B definiert ist als Schnitt von Kreis c und der Achse AL: die beiden eingestrichenen Winkel bei A sind gleich groß, da DA Spiegelachse ist. Dreieck BQA ist gleichschenklig mit Basis QB. Daher müssen die eingestrichenen Winkel die Basiswinkel sein. Dann hat aber QB auch die Richtung von QP. Also ist Q der Wanderpunkt für die Kardioide mit der Leinenlänge h=2r. Q.e.d.

Kaustiken und Katakaustiken

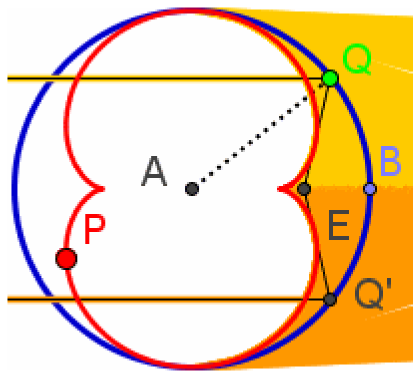
Wird parallel einfallendes Licht an einer Kurve reflektiert, dann heißt die Hüllkurve der reflektierten Lichtstahlen **Kaustik.**
Ist die Lichtquelle punktförmig, spricht man von **Katakaustik.**

Hat die reflektierende Kurve die Gleichung $a(t)=\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ und

fallen die Strahlen parallel zur x-Achse ein, dann hat die Kaustik die Gleichung

$$k(t)=a(t)+\frac{\dot v}{\dot u\ddot v-\ddot u\dot v}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(\dot u^2-\dot v^2\right) \\ \dot u\dot v \end{pmatrix}$$

Quelle: Spektrum-Lexikon: Kaustik, allerdings ist da die Formel falsch. Es steht dort in der y-Koordinate fälschlich der Faktor 2.



Für die Nephroide fällt hier das Licht achsenparallel von links auf den innen verspiegelten Kreis
(Genaugenommen ist es hier ein halbdurchlässiger Spiegel, denn die reflektierten Strahlen sind bei Ihrem Auftreffen auf den Kreis nicht gestoppt.)

Es gilt $a(t)=\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} cos(t) \\ sin(t) \end{pmatrix}$ und damit

$$k(t)=a(t)+\frac{cos(t)}{1}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(sin(t)^2-cos(t)^2\right) \\ cos(t)sin(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} cos(t)-\frac{1}{2}cos(t)cos(2t) \\ sin(t)-\frac{1}{2}cos(t)sin(2t) \end{pmatrix}$$

Diese wahrhaft schöne Formel hat obigem Bild die rote Kurve genau passend erzeugt.
Im Spektrum-Lexikon fehlte unten die Halbierung.
GeoGebra-Datei hierzu in www.mathematik-verstehen.de Bereich Kurven → Reflexion

Dörte HAFTENDORN, Lüneburg

Algebraische Kurven von der 8. Klasse bis zum 8. Semester

Hantierungen mit Seilen, Stangen, Lichtstahlen u.s.w. werden in Konstruktionen mit Zirkel und Lineal umgesetzt und dann im DGS realisiert. Die Variation der geometrischen Parameter führt zu Kurvenfamilien, deren Betrachtung und Beschreibung mathematische Fähigkeiten fördert. Ältere Lernende können zugehörige Gleichungen herleiten, doch prüfen können auch die Achtklässler durch Überlegungen und durch Eingabe in ein CAS, das implizit gegebene Kurven zeichnet. So ist es nur noch ein kleiner Schritt zu der Erkenntnis, dass Gleichungen und ihre Umformungen dasselbe Bild ergeben müssen. In der Lehrerausbildung kann dann der Bogen geschlagen werden zu Schnitten räumlicher Gebilde, deren Betrachtung (mit CAS oder 3D-Graphenzeichnern) dann ihrerseits eine Familie algebraischer Kurven beschreiben und klassifizieren hilft.

Vorbemerkungen, Anlass, Ziele

Die hier skizzierte Unterrichtseinheit ist in zwei 8. Gymnasialklassen durchgeführt, mit Erweiterungen im Leistungskurs Mathematik und mit zusätzlichen Schwerpunkten im Lehramtsstudiengang SekI/II als fachwissenschaftlicher Beitrag zu "Analytischen Geometrie" mehrfach eingesetzt worden.

Anlass war einerseits die unbestritten unzureichende Beherrschung von Term- und Gleichungsumformungen in allen auf Klasse 8 folgenden Schuljahren, andererseits die Beobachtung, dass in Klasse 8 der "Ausstieg aus der Mathematik" in dem Sinne stattfindet. Danach ist ein viel zu großer Anteil der Lernenden -insbesondere der Mädchen- in Mathematik höchstens noch das Allernötigste zu leisten bereit.

Ziel war, durch Unterstützung von Verstehen und Kreativität, durch Handlungsorientierung, Selbststeuerung, Lebensbezug und Freude an ästhetischen Kurven den Heranwachsenden einen Einbau von Mathematik in ihr Selbstkonzept zu ermöglichen. Neben der Verbesserung der algebraischen Kompetenzen kann auch eine Erweiterung des Funktionsverständnisses[1] erhofft werden.

Die Lehramt-Studierenden sollen selbst Erfahrungen mit dieser Art des Lernens sammeln, damit sich Unterricht überhaupt wandeln kann. Inhaltlich muss eine entsprechende Vorlesung reichhaltig sein und auch mathematisch-handwerkliche Kompetenzen im Herleiten und Beweisen vermitteln. Dies kann hier nur angedeutet werden.

---

[1] Die "Eindeutigkeit der Lage von P in Abhängigkeit von Q" ist hier gemeint.

Darstellung der Grundidee am Beispiel der Konchoiden

Wandert Q auf einer Kurve C und liegt P in festem Abstand k von Q auf der Geraden durch Q und einen festen Punkt B, so heißt die Ortslinie von P "Konchoide". Diese allgemeine Definition wird den Lernenden zu Anfang nicht genannt, sondern spezialisiert in folgendes Bild gekleidet: Herrchen wandert auf einer geraden Straße und sein Hund Pluto zerrt an der Leine stets direkt auf seinen Lieblingsbaum zu, der etwas abseits der Straße steht. Der Weg von P wird "Hundekurve" genannt. Dieses wird mit Personen in Szene gesetzt. Nach ersten Beschreibungen wird die Situation an der Tafel geometrisch realisiert und die Kurve in den Schülerheften punktweise erzeugt. Dann erst wird der geometrische Zusammenhang in einem DGS konstruiert. Die Leinenlänge ist ein wesentlicher Parameter, sie muss daher mit variierbarer Strecke oder als "Zahlobjekt" (=Schieberegler) realisiert werden, um dann als Radius für einen Kreis um Q verwendet zu werden. Der Vorteil dieser Vorgehensweise ist, dass sich nun durch stetige Variation der Leinenlänge auch die Ortskurve stetig ändert und so alle Konchoidenformen interaktiv erzeugt werden können.[2]

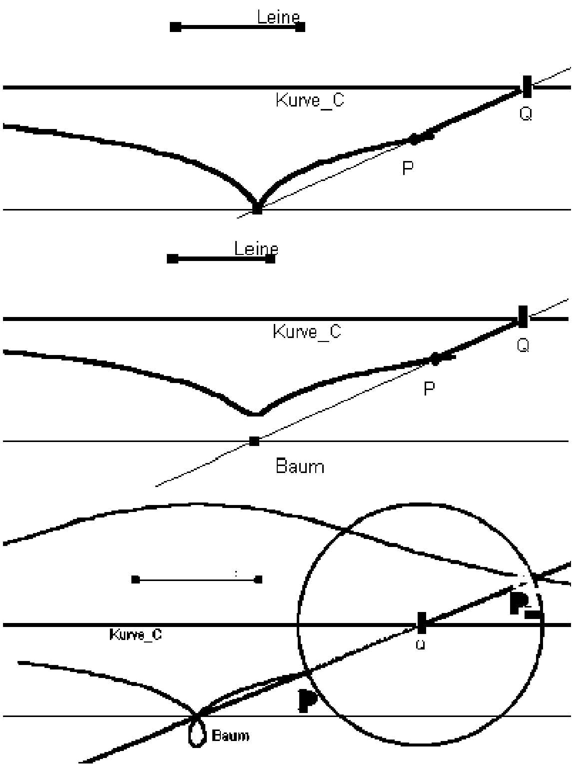


Abbildung 1

Auf verschiedene Art kann noch entdeckt werden, dass die Hundekurve einen zweiten Ast hat, die Bahn des furchtsamen Fiffi.

Ob man nun erst noch weitere Ortskurven erzeugt, wie weitere Konchoiden oder die Gärtnerellipse, oder sofort ein Koordinatensytem einführt, richtet sich nach der unterrichtlichen Situation.

Jedenfalls gehört zu diesen Geraden-Konchoiden die kartesische Gleichung

$$(x^2+y^2)(y-a)^2=k^2y^2$$

mit dem Abstand Straße-Baum a und der Leinenlänge k.

[2] Die suggestive Kraft dieser Dynamisierung lässt sich im Druck nur schwer erahnen.

Zusammenhang zwischen Kurven und Gleichungen

Die Punkte (-1/4); (0/3); (1;2); (2/1) auf der Geraden rechts oben legen nahe $x + y = 3$ zu schreiben. Die Beschäftigung mit entsprechenden Darstellungen gipfelt in den Merksätzen:

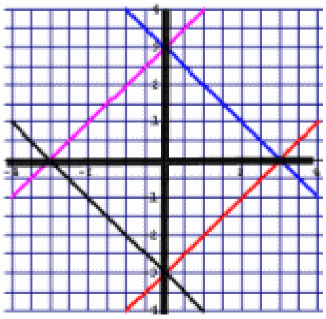


Abbildung 2

1) Genau die Punkte, die aus der Kurvengleichung eine **wahre Aussage** machen, liegen auf der Kurve.

2) Eine Gleichung, mit der ein sicher auf der Kurve liegender Punkt eine **falsche Aussage** erzeugt, ist sicher nicht die Kurvengleichung.

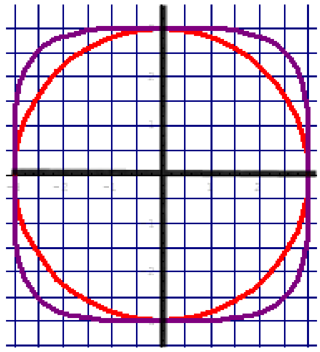


Abbildung 3

$x^4 + y^4 = 3^4$ beschreibt das "Rundecken-quadrat", es kann wie alle impliziten Gleichungen direkt mit Derive dargestellt werden. $(x^2 + y^2)^2 = 3^4$ wird als missglückter Term-umformungsversuch durch den davon verschiedenen Graphen entlarvt. Weitere Experimente dieser Art gipfeln in den Merksätzen:

3) Wenn zu einer umgeformten Gleichung eine **andere** Kurve erscheint, war die **Umformung sicher falsch**.

4) Erscheint dieselbe Kurve, **kann** die Umformung **richtig sein**, es kann aber auch so sein, dass der Fehler so klein, oder so geartet ist, dass man ihn am Bildschirm nicht sieht.

Dieses Rüstzeug sollte gemeinsam mit oder nach geometrischen Erzeugungen von Kurven erarbeitet werden, jedenfalls nicht vorweg. Denn m. E. müssen die Kurven zuerst mit Prozessen verbunden werden. Nun kann einer Galerie von Bildern eine Galerie von Gleichungen zugeordnet werden, Vorschläge siehe [Ha]. Die Schüler können Termumformungen prüfen. Dazu können entweder aus den Termen Gleichungen für das 2D-Fenster gemacht oder Terme direkt im 3D-Fenster dargestellt werden. Enthalten die Terme oder Gleichungen mehr als zwei Variablen, kann man in Derive 6 Schieberegler einfügen und alle, bis auf zwei, zu steuerbaren Parametern machen. Besonders günstig ist, dass hier der Erfindungsgabe der Schüler keine Grenzen gesetzt werden müssen. Sie probieren z.B. $x^9 + y^8 = 99$ und sind stolz, die Gleichung einer Fernsehröhre entdeckt zu haben. Im weiteren Verlauf kann man auch Kurven in Partnerarbeit oder mit dem Konzept "Lernen an Stationen" erkunden lassen.

Passende Prüfungsaufgaben

Um punktweise Erzeugung von Ortskurven möglich zu machen, schlage ich "Raster-Konstruktionen" vor. Bei Abbildung 4 sollen Q und P den gleichen Abstand von der Mittellinie haben. Es entsteht die Kissoide. Studierende sollten kartesische Gleichung und Polargleichung aufstellen können, Achtklässler müssen die richtige Gleichung aus drei vorgeschlagenen begründet auswählen und Ähnliches.

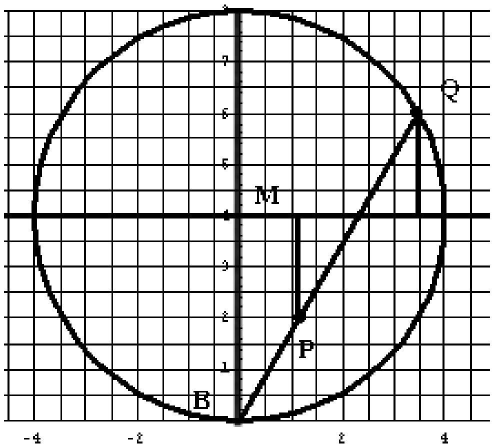


Abbildung 4

Abbildung 5 bezieht sich auf die gemeinsame Leitgeradenkonstruktion der Kegelschnitte und erfordert passendes Abzählen. Kegelschnitte sind auch wegen ihrer Allgegenwärtigkeit in Natur und Technik eine sinnvolle Kurvenklasse.

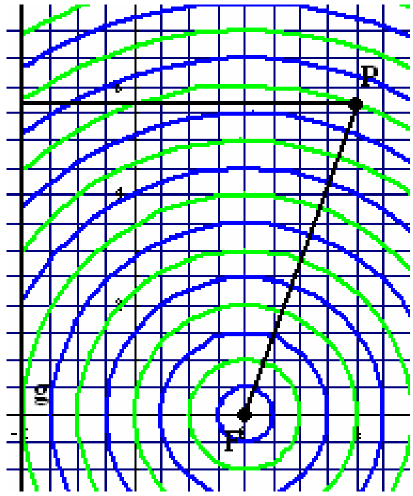


Abbildung 5

3D-Darstellungen

Algebraische Kurven sind durch $F(x, y) = 0$ charakterisiert, wobei F ein Polynom in x und y ist. In Abbildung 6 ist die linke Seite als $z = F(x, y)$ dargestellt und die zugehörige Raumfläche mit der Koordinatenebene $z = 0$ zum Schnitt gebracht. So entsteht die Strophoide, aber beim Anheben der Ebene hat man gleich eine ganze Schar verwandter Kurven. In Derive 6 kann durch Schieberegler die Ebenenbewegung interaktiv gestaltet werden..

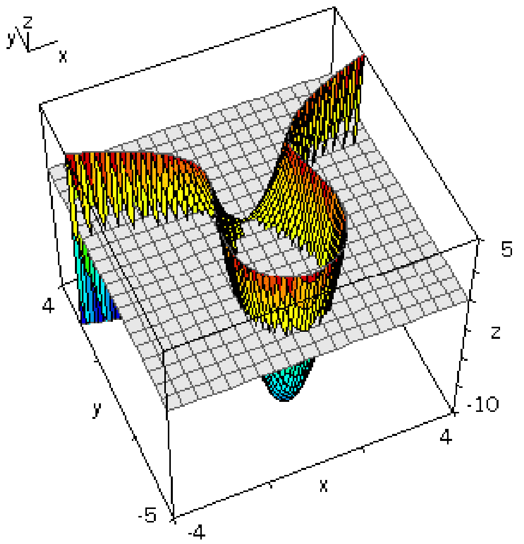


Abbildung 6

Fazit

Algebraische Kurven ermöglichen im Lehramtsstudium, in der Lehrerfortbildung und in der Schule reichhaltige und nachhaltige Mathematik

Literatur und weitere Informationen

[Ha] Haftendorn: "Kurven", www.uni-lueneburg.de/mathe-lehramt