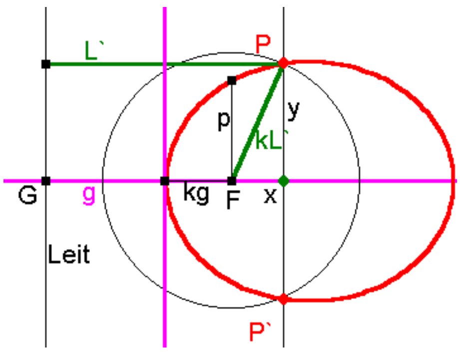
Kurven Leitgeradenkonstruktion aller Kegelschnitte

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Uni Lüneburg, 13. Dezember 2003



Gesucht ist der geometrische Ort aller Punkte P, die von einem festen Punkt F die k-fache Entfernung wie von einer Geraden haben.
Die Gerade heißt Leitgerade.
Sie ist links bei G senkrecht gezeichnet.
Behauptung:
Die Ortskurve ist ein Kegelschnitt mit der allgemeinen Scheitelgleichung $\boxed{y^2 = 2\ p\ x - (1-k^2)x^2}$

Beweis: Das Achsenkreuz steht am Scheitel.

Es gilt nach Konstruktion (1) $(x-kg)^2 + y^2 = k^2L^2$

und (2) $L = x + g$

(2) in (1) ergibt (3) $(x-kg)^2 + y^2 = k^2(x+g)^2$

aufgelöst folgt (3') $x^2 - 2kgx + k^2g^2 + y^2 = k^2x^2 + 2k^2gx + k^2g^2$

sortiert (3'') $(1-k^2)x^2 - 2k(1+k)g\,x + y^2 = 0$

y^2 allein (3''') $y^2 = 2\,k(1+k)g\ \ x - (1-k^2)\,x^2$

Damit ist die behauptete Gleichung schon fast erzeugt.
Eingezeichnet ist p als Ordinate des Kegelschnitts am Brennpunkt.
Für den Kegelschnittpunkt F* über F muss gelten (4) $k(g+kg) = p$,
denn er muss ja auch die Konstruktion erfüllen. Also (4') $k(1+k)g = p$.

(4) in (3''') ergibt (5) $y^2 = 2\ p\ x - (1-k^2)x^2$ die behauptete Gleichung. q.e.d.

Für $k = 1$ folgt $y^2 = 2\ p\ x$, eine Parabelgleichung.

Für $k < 1$ ergibt sich eine Ellipse. Beweis auf einer Extraseite.

Für $k > 1$ ergibt sich eine Hyperbel. Beweis auf einer Extraseite.

Aus der Herleitung der Mittelpunktsgleichung geht hervor, dass mit (4') gilt

$$a = \frac{p}{1-k^2} = \frac{k(1+k)g}{1-k^2} = \frac{kg}{1-k}.$$

Als Entfernung von Mittelpunkt zu Brennpunkt ist $e = a - kg$ und damit gilt

$$\varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{a-kg}{a} = 1 - \frac{kg}{a} = 1 - \frac{kg}{kg}(1-k) = 1 - 1 + k = k$$

Also gilt $\boxed{\varepsilon = k}$ und damit auch $\boxed{y^2 = 2\ p\ x - (1-\varepsilon^2)x^2}$