Analysis Krümmung Kurvenheft -9-

Prof. Dr.Dörte Haftendorn www.mathematik-verstehen.de 21. Juni 1997/ Jan 04

f sei eine zweimal differenzierbare Funktion. Dann gilt für die

Krümmung $\kappa(x)=\dfrac{f''(x)}{\sqrt{\left(1+f'(x)^2\right)^3}}$ und den Krümmungsradius $r(x)=\dfrac{1}{\kappa(x)}$

Im Nebenscheitel der Ellipse (hier BS) ist $x=0$ und $f'(0)=0$.

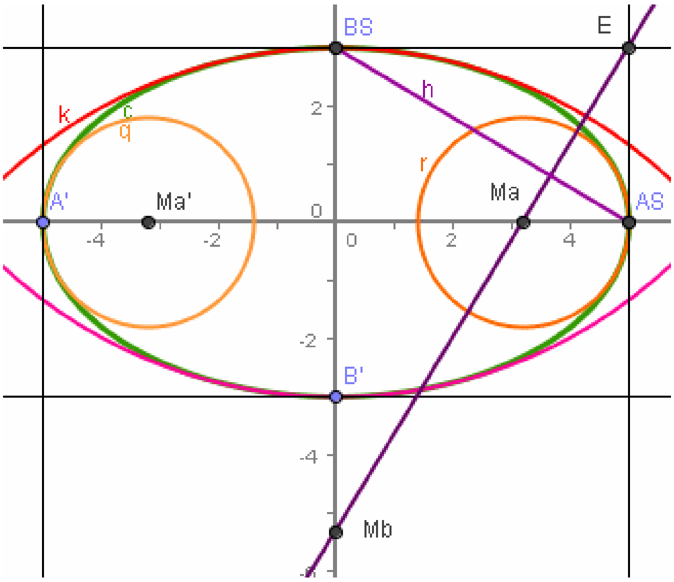
Daher gilt dort $\kappa(0)=f''(0)$ und $r(0)=\dfrac{1}{f''(0)}$.

Implizite Ableitungen

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}y'=0$$

$$\frac{2}{a^2}+\frac{2y'}{b^2}y'+\frac{2y}{b^2}y''=0$$



Nun ist im Nebenscheitel *y'* =0.

Daher gilt:

$$\frac{2}{a^2}+\frac{2b}{b^2}y''=0$$

$$\frac{2}{a^2}+\frac{2}{b}y''=0$$

$$y''=\frac{-b}{a^2}$$

$$r=\frac{-a^2}{b}$$

Aus Symmetriegründen gilt für den Radius des Hauptscheitel-Krümmungskreises $R=\dfrac{b^2}{a}$

Man kann die Mittelpunkte der Krümmungskreise auf die gezeichnete Art auch geometrisch finden.
Man verbinde dazu die Punkte (0/b) und (a/0) und fälle auf diese Strecke von E= (a/b) das Lot.
Es schneidet die x- und die y-Achse in den gesuchten Punkten.
Weisen Sie nach, dass diese Konstruktion richtig ist.

Beweis: g =MbE hat die Steigung $m=\dfrac{a}{b}$, also gilt $\dfrac{b}{R}=\dfrac{a}{b}$, es folgt $R=\dfrac{b^2}{a}$. Weiter gilt

$\dfrac{r}{a}=\dfrac{a}{b}$, und damit $r=\dfrac{a^2}{b}$, r als Strecke Mb BS.