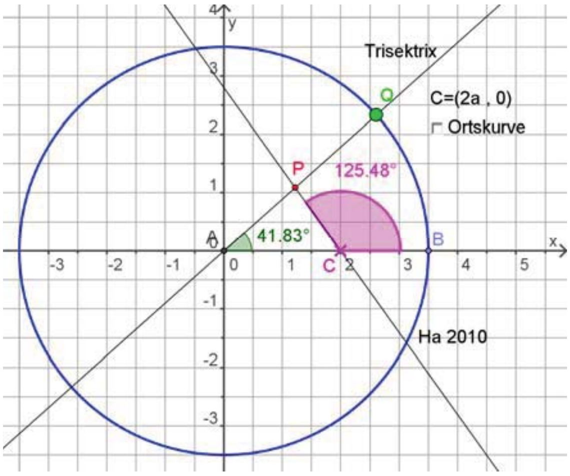
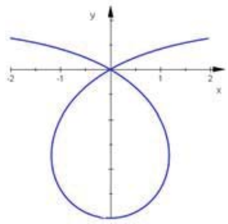
Kurven Trisektrix



Konstruktion: Q läuft auf einem Kreis um den Ursprung A. Punkt C liegt auf der x-Achse in der Entfernung 2a. Der Polarwinkel von Q wird verdreifacht in C an die x-Achse angetragen. Der zweite Schenkel dieses Winkels schneidet die Radiusgerade durch Q in P. Der Ort von P heißt **Trisektrix**.

Die folgende Aufgabe war ein Teil einer Kurven-Klausur, bei dem es nicht um diese Konstruktion ging.
Lernziele waren: Erzeugung der Polargleichung aus einer impliziten Gleichung, Deutung der Gleichungen in vielfacher Hinsicht.



Dies ist die Trisektrix, ihre implizite Gleichung ist

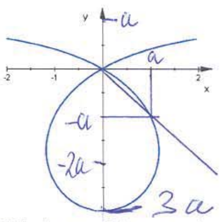
$$x^2(a-y)=y^2(3a+y)$$

e) Leiten Sie ihre Polargleichung aus der impliziten Darstellung her.

f) Weisen Sie nach, dass A=(a,-a) ein Punkt der Trisektrix ist. Bestimmen Sie in der Darstellung die Beschriftung der y-Achse in Abhängigkeit vom Parameter a.

g) Stellen Sie Überlegungen an:
   a. Zum Einfluss von a
   b. Zur Symmetrie
   c. Zur Asymptotenproblematik
   d. Zu der Möglichkeit für andere Formen der Trisektrix (Mit Spitze, mit stumpfem Bogen…)
   e. Zum Grad der Kurve (zwei Eigenschaften)

Zeichnung zur Lösung, nachfolgend Lösung ausführlich.



d) Dies ist die Trisektrix, ihre implizite Gleichung ist

$$x^2(a-y)=y^2(3a+y)$$

e) Leiten Sie ihre Polargleichung aus der impliziten Darstellung her.

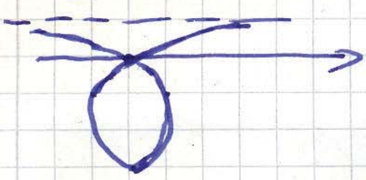
f) Weisen Sie nach, dass A=(a,-a) ein Punkt der Trisektrix ist. Bestimmen Sie in der Darstellung die Beschriftung der y-Achse in Abhängigkeit vom Parameter a.

g) Stellen Sie Überlegungen an:
   a. Zum Einfluss von a
   b. Zur Symmetrie
   c. Zur Asymptotenproblematik
   d. Zu der Möglichkeit für andere Formen der Trisektrix (Mit Spitze, mit stumpfem Bogen…)
   e. Zum Grad der Kurve (zwei Eigenschaften)

Es folgt die Lösung, also ist dies die Datei trisektrix-def+aufgabe+lo.pdf

Klausur Modul 2 Kurven & Geo Wdh 24.9.2010

zu ① Trisektrix Gleichung $x^2(a-y)=y^2(3a+y)$



e) $x=r\cos\varphi$ $\quad y=r\sin\varphi$

$r^2\cos^2\varphi\,(a-r\sin\varphi)=r^2\sin^2\varphi\,(3a+r\sin\varphi)$

$\cos^2\varphi\,(a-r\sin\varphi)=\sin^2\varphi\,(3a+r\sin\varphi)$

$r=0$, d.h. $x=0 \wedge y=0$ ist Lösung $0\cdot(a-0)=0\cdot(3a+0)$ ist wahre A.

Division durch r^2 also zulässig

$a\cos^2\varphi-r\cos^2\varphi\sin\varphi=3a\sin^2\varphi+r\sin^3\varphi$

$r\sin\varphi(\underbrace{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi}_{1})=a\cos^2\varphi-3a\sin^2\varphi$

$\cos^2\varphi=1-\sin^2\varphi$

$r\sin\varphi=a-a\sin^2\varphi-3a\sin^2\varphi$

$r\sin\varphi=a-4a\sin^2\varphi$

$r=r(\varphi)=a\,\frac{1-4\sin^2\varphi}{\sin\varphi}=a\left(\frac{1}{\sin\varphi}-4\sin\varphi\right)$

Polargleichung der Trisektrix

f) $A=(a,-a)$ einsetzen

$a^2(a-(-a))=(a)^2(3a-a) \Leftrightarrow 2a^3=a^2\cdot 2a$

$2a^3=2a^3$

also A liegt auf der Trisektrix wahre Aussage

Der Schnitt mit der y-Achse für $x=0$ $\quad 0=y^2(3a+y)$

$\Leftrightarrow y=0 \vee y=-3a$ Also $(0|0)$ und $(0|-3a)$

sind die Durchgänge durch die y-Achse

Die y-Achse ist also in $\frac{a}{2}$ markiert.

Wegen "$(a|-a)$ liegt auf der T." muss $a=1$ sein siehe Zeichnung

Auch $(-a|-a)$ " " " T.

a. An der Polargleichung sieht man, dass die Veränderung von a eine zentrische Streckung bewirkt. Das ist aber auch an den Punkten $(\pm a|-a)$ und $(0|3a)$ zu sehen.

zu g) b. Wegen x^2 als einzigem x-Term wird der Einfluss des Vorzeichens von x eliminiert, also liegt Symmetrie zur y-Achse vor.

c. Einsetzen von $y = a$ ergibt

$x^2 \cdot 0 = a^2 \cdot 4a$

$x^2 \cdot 0 = 4a^3$

Das ist bei $a \neq 0$ für kein x erfüllbar.
Also kommt die Gerade $y = a$ als Asymptote infrage.

$y = a - \varepsilon \qquad x^2(a - a + \varepsilon) = (a-\varepsilon)^2(3a + a - \varepsilon)$

$x^2 \cdot \varepsilon = (a-\varepsilon)^2(4a - \varepsilon)$

Diese Gleichung ist für jedes noch so kleine ε erfüllbar, also ist $y=a$ wirkliche Asymptote.

d. Die Gleichung erzeugt nur diese Form, a kann sie nur aufblähen oder zusammenziehen. Siehe a.

e) Die Trisektrix hat den Grad 3 denn $x^2 \cdot y$ und $y^2 \cdot y$ sind Terme 3. Grades. (Grad = Exponentensumme)
Der Grad ist auch die Zahl der maximal möglichen Schnittpunkte mit einer Geraden

3 Schnittpkte und nicht mehr.