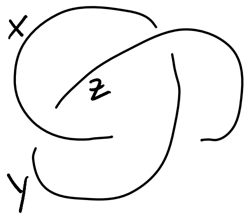
Fünffärbbarkeit p-etikettier-barkeit

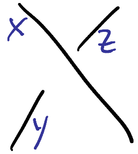
- Farbnummern 0,1,2,3,4. $0, \dots, p-1$
- An jeder Kreuzung mit x oben, y und z unten gilt: 2x-y-z=0 mod 5 p

Definition p-etikettierbar
Ein Knoten heißt 5-färbbar, wenn man seine Stränge so beschriften kann, dass an jeder Kreuzung obige Gleichung gilt. Dabei darf er nicht einfarbig sein.



Allgemein: Etikettierung modulo p

Eigenschaften der 5-Färbbarkeit



$2x - y - z = 0$ modulo 5

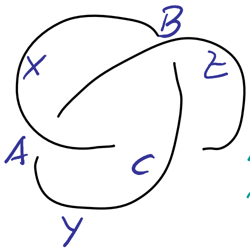
Eine Kreuzung darf einfarbig sein.

$x = y = z$ erfüllt $2x - x - x = 0$

Eine nicht einfarbige Kreuzung hat genau 3 Farben.

Bew. $y = z \Rightarrow 2x - 2y = 0 \Rightarrow 2x = 2y \Rightarrow x = y$ da $(\mathbb{Z}_5, \cdot)$ Gruppe ist.
gilt auch für p statt 5, p prim > 3
$\Rightarrow x = y = z$ einfarbig
$x = y \Rightarrow 2x - x - z = 0 \Rightarrow x - z = 0 \Rightarrow x = z$
$\Rightarrow x = y = z$ einfarbig
$x = z \Rightarrow$ (symm.) einfarbig. Also: x, y, z paarw. versch.

Der Kleeblattknoten ist nicht 5-färbbar



A $2x - y - z = 0$
B $-x - y + 2z = 0$
C $-x + 2y - z = 0$

A-B $3x \quad -3z = 0 \Rightarrow x = z$ $p \neq 3$
in C $\Rightarrow y = x = z$

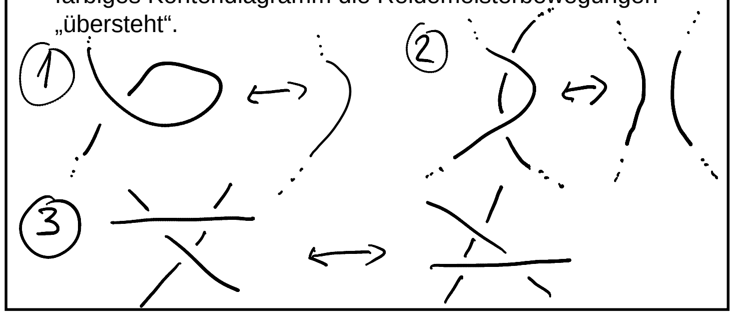
Man kann statt 5-färbbar auch immer „p-färbbar“ oder „etikettierbar modulo p“ sagen. (p prim)

Der Kleeblattknoten ist ausschließlich für p=3 etikettierbar.
denn $3(x-z) \equiv_3 0 \Leftrightarrow 0(x-z) \equiv_3 0$ erfüllbar für $x \neq z$

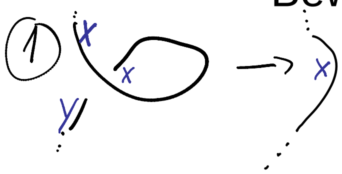
Satz über die generelle 5-färbbarkeit p-etikettierbar

- Ist ein einziges Knotendiagramm 5-färbbar (p), dann sind alle Diagramme desselben Knotens 5-färbbar. (p)

Der Beweis erfolgt dadurch, dass man zeigt, dass ein 5-färbiges (p) Kontendiagramm die Reidemeisterbewegungen „übersteht“.



Beweis



$2x - x - y = 0 \Rightarrow x = y$

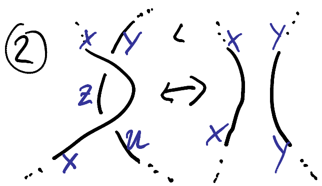
zu 2

$2x - y - z = 0$

$-\big[\; 2x - z - u = 0$

$-y + u = 0$

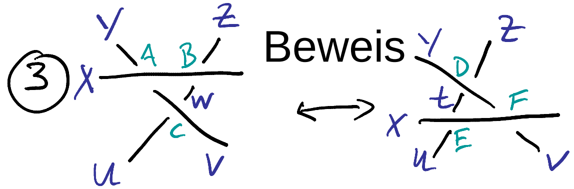
$\Rightarrow y = u$



Die Reidemeisterbewegungen 1 und 2 berühren die 5-Färbbarkeit nicht.

p-

Beweis



A $2x - y - v = 0 \Leftrightarrow v = 2x - y$

B $2x - z - w = 0 \Leftrightarrow w = 2x - z$

C $2v - w - u = 0 \Leftrightarrow u = 2v - w$

$= 4x - 2y - 2x + z$

$= 2x - 2y + z$

Wenn der Knoten p- 5-färbbar ist, gelten diese Gleichungen modulo 5. p

Ist t so wählbar, dass auch die folgenden Gleichungen gelten?

D $2y - z - t = 0 \Rightarrow t = 2y - z$ gleich! So ist t zu wählen.

E $2x - u - t = 0 \Rightarrow t = 2x - u = 2x - 2x + 2y - z = 2y - z$

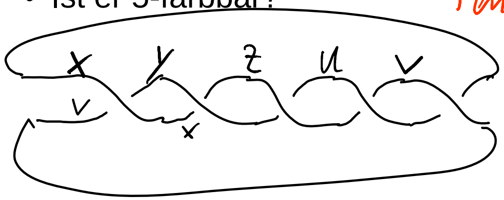
F $2x - y - v = 0 \Leftrightarrow$ A

q.e.d.

p 5-Torus-Knoten

- Ist er p 5-färbbar?

Pentoid-Knoten



5 Torus p

$2x - y - v = 0$

$-x + 2y - z = 0$

$-y + 2z - u = 0$

$-z + 2u - v = 0$

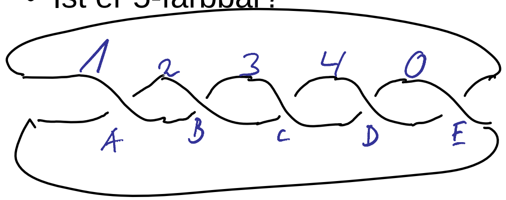
$-x - u - 2v = 0$

Lösen modulo 5 p

5-Torus-Knoten

p-Torus entspr.

- Ist er 5-färbbar?



5 Torus

A $2 - 2 - 0 = 0$

B $4 - 3 - 1 = 0$

C $6 - 4 - 2 = 0$

D $8 - 0 - 3 \equiv_5 3 - 3 = 0$

E $0 - 4 - 1 = -5 \equiv_5 0$

alle richtig $\Rightarrow$ er ist 5-färbbar