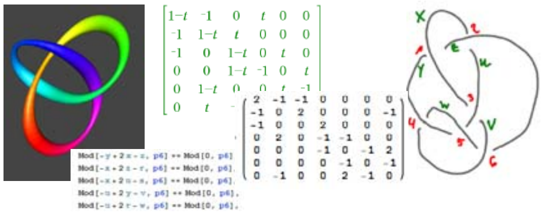
LEUPHANA
UNIVERSITÄT LÜNEBURG

Diskret verknotet

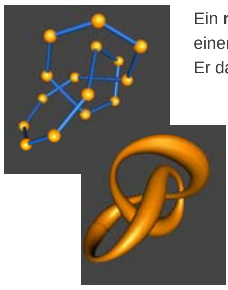
Knotentheorie und diskrete Mathematik



GDM Arbeitskreis Mathematik und Informatik AK MuI in Saarbrücken 27. 9.2013

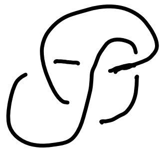
Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg

Definition:



Ein **mathematischer Knoten** wird definiert durch einen geschlossenen Polygonzug im Raum.
Er darf keine Doppelpunkte haben.

Er ist **ein topologisches Objekt**,
die erzeugenden Punkte sind nicht wesentlich.

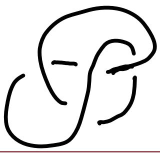


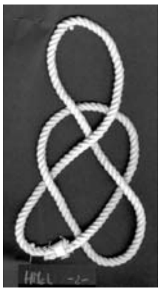
Ein **Knotendiagramm** kann man zeichnen.

Erstellt mit der freien Software knotplot des Kanadiers Rob Sharein, www.knotplot.com

---

Legen Sie selbst einen mathematischen Knoten und zeichnen Sie sein Knotendiagramm.





Warum Knoten?

Die Knotentheorie bietet
- spannende,
- junge,
- reichhaltige,
- vernetzungsfähige
- kommunizierbare
- offene

Freuen Sie sich darauf!

Mathematik

Nach dem Vortrag diskutieren wir mit Sachverstand.

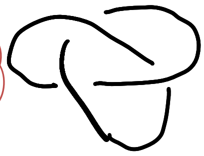
Zeichnen und Reden

Ein **Bogen (oder Strang)** reicht von einer **Unterkreuzung** zur nächsten.

Dieses Knotendiagramm hat 4 Kreuzungen und 4 Bögen.
Dieses hat nur 3 Kreuzungen und 3 Bögen

- Diesen Bogen hochlegen!

- **Der Klee-blatt-knoten**

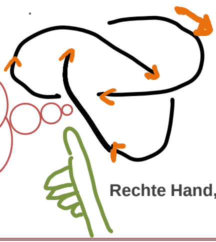


Orientierung, Händigkeit

Einen Knoten kann man **orientieren**, indem man an einer Stelle eine Richtung nennt und diese für jeden Bogen fortführt.

.

- Der Daumen zeigt in Richtung des überkreuzenden Bogens, die Finger der abgewinkelten Hand in Richtung der unter-kreuzenden Bögen



Im orientierten Knoten ist jede Kreuzung **rechtshändig** oder **linkshändig**.

Rechte Hand, also Rechts-Kreuzung

Orientierung, Händigkeit

Einen Knoten kann man **orientieren**, indem man an einer Stelle eine Richtung nennt und diese für jeden Bogen fortführt.

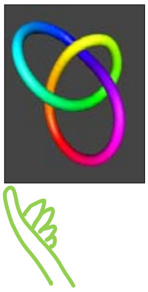
- Der Daumen zeigt in Richtung des überkreuzenden Bogens, die Finger der abgewinkelten Hand in Richtung der unter-kreuzenden Bögen

Im orientierten Knoten ist jede Kreuzung **rechtshändig** oder **linkshändig**.

Linke Hand, also Links-Kreuzung

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, www.mathematik-verstehen.de, Folie 6

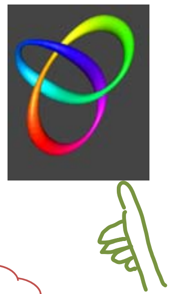
Händigkeit



Probieren Sie bei Ihrem Knoten aus, welche Kreuzung **rechtshändig** und welche **linkshändig** ist.

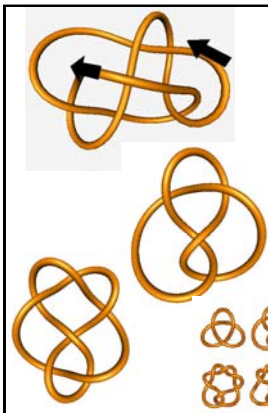
linke Hand, linkshändiger Klebattknoten

- **Drehen und Wenden nützt nichts, die verschiedene Händigkeit bleibt.**



rechte Hand, rechtshändiger Klebattknoten

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, www.mathematik-verstehen.de, Folie 7

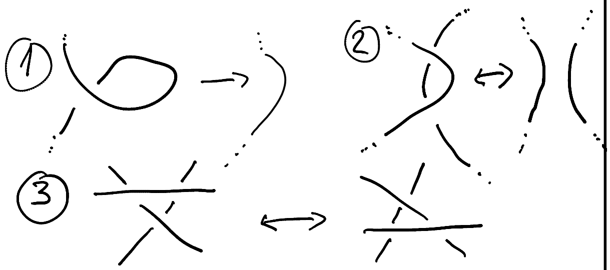


Wie bewältigt man die Fülle????????

Mit Knoteninvarianten

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg. www.mathematik-verstehen.de, Folie 8

Wie kann man Knoten bewegen, ohne sie wirklich zu verändern

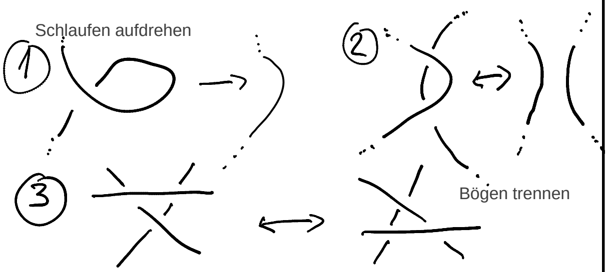


Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, www.mathematik-verstehen.de, Folie 9

Erlaubt sind genau die Reidemeister-Bewegungen

Kurt Reidemeister 1932, einsichtig, aber Beweis nicht einfach.

Schlaufen aufdrehen



Bögen trennen

überkreuzenden Bogen verlegen

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, www.mathematik-verstehen.de, Folie 10

Eine Knoteninvariante

ist eine Eigenschaft eines Knotens, die für alle seine Knotendiagramme gleich ist.

Keine Knoteninvarianten

- Kreuzungszahl
- Zahl der Bögen
- Wechsel von Über- und Unterkreuzungen
- ……

Gute Knoteninvarianten, die wir kennenlernen:

- Dreifärbbarkeit
- p-Etikettierbarkeit
- Alexander-Polynom

weitere Knoteninvarianten

- Jones-Polynom
- Conwaypolynom
- HOMFLY-Polynom
- Signatur
- Entknotungszahl
- …..

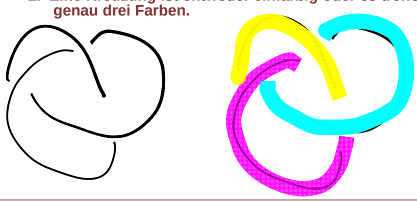
Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, www.mathematik-verstehen.de, Folie 11

Knoten Dreifärbbarkeit

Definition:
Ein Knoten heißt 3-färbbar wenn sich eins seiner Knotendiagramme nach folgenden Regeln einfärben lässt, ohne dass er einfarbig ist.

1. **Jeder Bogen hat zwischen zwei Unterkreuzungen eine einheitliche Farbe.**
2. **Eine Kreuzung ist entweder einfarbig oder es treffen sich genau drei Farben.**

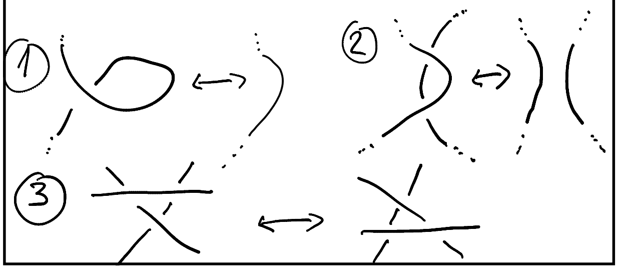
Kleeblatt



Die Dreifärbbarkeit ist eine Knoteninvariante

- Ist ein einziges Knotendiagramm 3-färbbar, dann sind alle Diagramme desselben Knotens 3-färbbar.

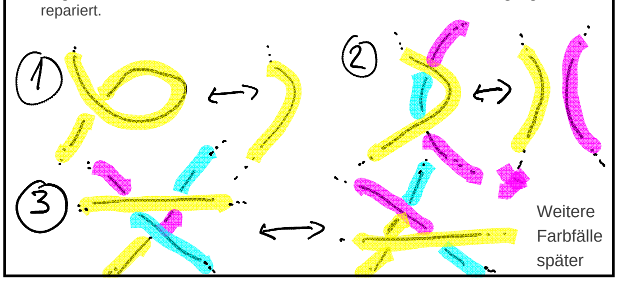
Der **Beweis** erfolgt dadurch, dass man zeigt, dass ein 3-färbiges Knotendiagramm die **Reidemeister-Bewegungen „übersteht".**



Beweis

Der Beweis erfolgt dadurch, dass man zeigt, dass ein 3-färbiges Kontendiagramm die Reidemeisterbewegungen „übersteht".

Man muss sich die gezeichneten Stränge als Teil eines größeren Knotens vorstellen. Ist der 3-färbbar, so ist er es nach der Bewegung immer noch. Gelingt im großen Knoten der 3-färb-Versuch nicht, wird das durch die Bewegung nicht repariert.

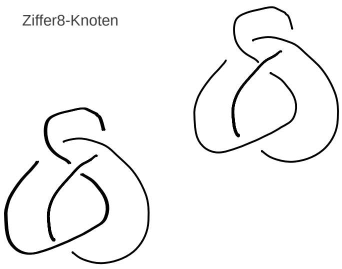


Weitere Farbfälle später

Knoten Dreifärbbarkeit

1. **Jeder Bogen hat zwischen zwei Unterkreuzungen eine einheitliche Farbe.**
2. **Eine Kreuzung ist entweder einfarbig oder es treffen sich genau drei Farben.**

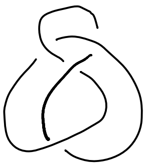
Ziffer8-Knoten



Knoten Dreifärbbarkeit

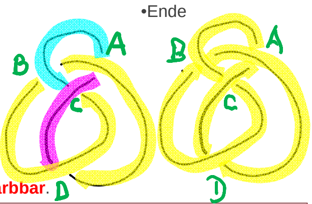
1. **Jeder Bogen hat zwischen zwei Unterkreuzungen eine einheitliche Farbe.**
2. **Eine Kreuzung ist entweder einfarbig oder es treffen sich genau drei Farben.**

Ziffer8-Knoten



• Start bei A dreifarbig
•erzwingt bei C dreifarbig
•erzeugt bei B und D Fehler
•Ende

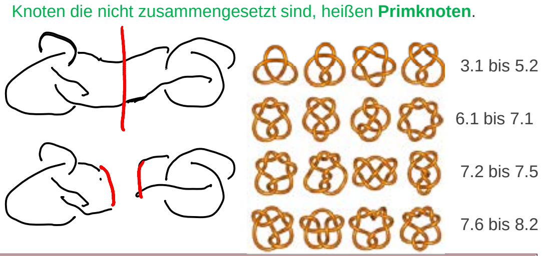
•Start bei A einfarbig
•erzwingt bei C einfarbig
•alles einfarbig
•Ende



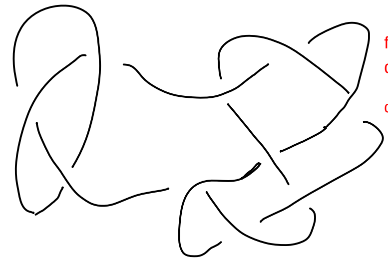
Es gibt keine Alternativen mehr.
Also:
Der Ziffer-8-Knoten ist nicht dreifärbbar.

Knotenzusammensetzung

- Ein Knoten heißt „**zusammengesetzt**", wenn er durch Aufschneiden an zwei passenden Stellen in zwei Knoten zerfällt, die nicht die Unknoten sind.
- Knoten die nicht zusammengesetzt sind, heißen **Primknoten**.



Knotenzusammensetzung und Dreifärbbarkeit



Wenn

Teilknoten

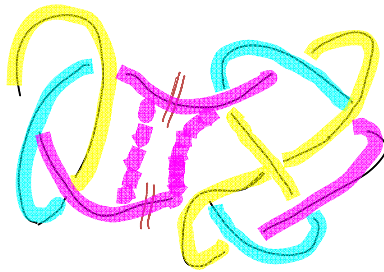
für sich genommen

dreifärbbar ist,

dann

?

Knotenzusammensetzung und Dreifärbbarkeit



3.1 7.7

Wenn **wenigsten einer** der Teilknoten für sich genommen dreifärbbar ist,

dann

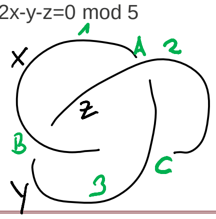
ist der zusammen-gesetzte Knoten dreifärbbar.

Fünffärbbarkeit

- Farbnummern 0,1,2,3,4.
- An jeder Kreuzung
  mit x oben, y und z unten
  gilt:
  2x-y-z=0 mod 5

p-Etikettierbarkeit

- Farbnummern 0,1, 2,…, p-1.
- An jeder Kreuzung
  mit x oben, y und z unten
  gilt:
  2x-y-z=0 mod p



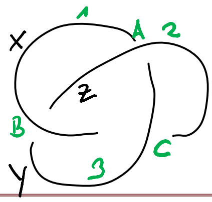
Definition
Ein Knoten heißt **p-etikettierbar**, wenn man seine Stränge so beschriften kann, dass an jeder Kreuzung obige Gleichung gilt.
Dabei darf er nicht einfarbig sein.

Fünffärbbarkeit

- Farbnummern 0,1,2,3,4.
- An jeder Kreuzung
  mit x oben, y und z unten
  gilt:
  2x-y-z=0 mod 5

p-Etikettierbarkeit

- Farbnummern 0,1, 2,…, p-1.
- An jeder Kreuzung
  mit x oben, y und z unten
  gilt:
  2x-y-z=0 mod p



A $2\cdot 2-1-3 \equiv 0$

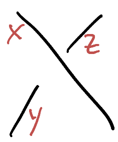
B $2\cdot 1-2-3 \equiv -3 \underset{p}{\equiv} 0$

$\Leftrightarrow p=3$

C $2\cdot 3-1-2=3 \equiv 0$

$\Leftrightarrow p=3$

Eigenschaften der p-Etikettierbarkeit



$2x-y-z \underset{p}{\equiv} 0$

Eine Kreuzung darf einfarbig sein, denn

$x=y=z \Rightarrow 2x-x-x=0$

Eine nicht einfarbige Kreuzung hat genau 3 Farben.

Beweis:

$$x=y \Rightarrow 2x-y-z=2x-x-z=x-z \underset{p}{\equiv} 0 \Leftrightarrow x \underset{p}{\equiv} z$$

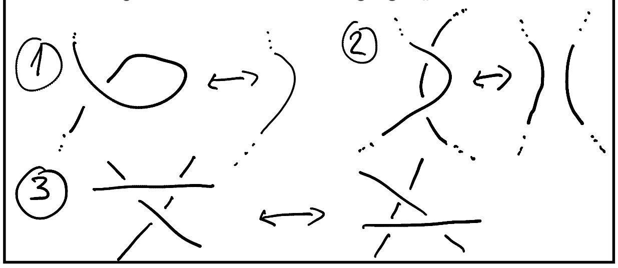
$$y=z \Rightarrow 2x-y-z=2x-2y \underset{p}{\equiv} 0 \Leftrightarrow 2(x-y) \underset{p}{\equiv} 0 \underset{p\ prim}{\Leftrightarrow} x \underset{p}{\equiv} y$$

Bei Gleichheit zweier Farben ist die Kreuzung sofort einfarbig.

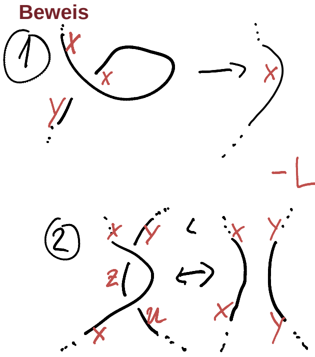
Die p-Etikettierbarkeit ist eine Knoteninvariante

- Ist ein einziges Knotendiagramm p-etikettierbar, dann sind alle Diagramme desselben Knotens p-etikettierbar

Der Beweis erfolgt dadurch, dass man zeigt, dass ein p-etikettiertes Knotendiagramm die **Reidemeisterbewegungen** „übersteht".



Beweis



$2x - x - y = 0 \Rightarrow x = y$

zu (2)

$2x - y - z = 0$

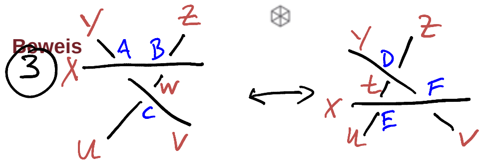
$-\left[\,2x - z - u = 0\right.$

$-y + u = 0$

$\Rightarrow y = u$

Die Reidemeisterbewegungen 1 und 2 berühren die p-Etikettierbarkeit nicht.

Beweis



A $2x - y - v = 0 \Leftrightarrow v = 2x - y$

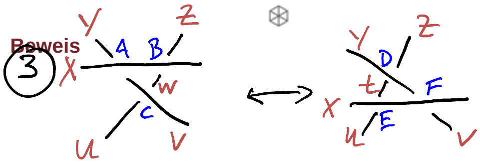
B $2x - z - w = 0 \Leftrightarrow w = 2x - z$

C $2v - w - u = 0 \Leftrightarrow u = 2v - w$

Wenn der Knoten p-etikettierbar ist, gelten diese Gleichungen modulo p.

Ist t so wählbar, dass auch die folgenden Gleichungen gelten?

Beweis



A $2x - y - v = 0 \Leftrightarrow v = 2x - y$

B $2x - z - w = 0 \Leftrightarrow w = 2x - z$

C $2v - w - u = 0 \Leftrightarrow u = 2v - w$

Wenn der Knoten p-etikettierbar ist, gelten diese Gleichungen modulo p.

Ist t so wählbar, dass auch die folgenden Gleichungen gelten?

$= 4x - 2y - 2x + z$

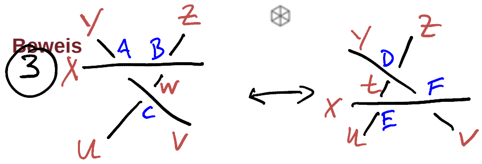
$= 2x - 2y + z$

D $2y - z - t = 0 \Rightarrow t =$

E $2x - u - t = 0$

F $2x - y - v = 0 \Leftrightarrow$

Beweis



A $2x - y - v = 0 \Leftrightarrow v = 2x - y$

B $2x - z - w = 0 \Leftrightarrow w = 2x - z$

C $2v - w - u = 0 \Leftrightarrow u = 2v - w$

Wenn der Knoten p-etikettierbar ist, gelten diese Gleichungen modulo p.

Ist t so wählbar, dass auch die folgenden Gleichungen gelten?

$= 4x - 2y - 2x + z$

$= 2x - 2y + z$

gleich! So ist t zu wählen.

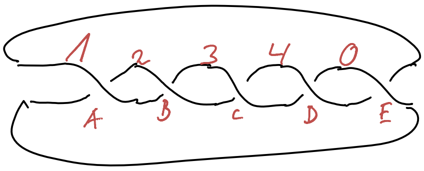
D $2y - z - t = 0 \Rightarrow t = 2y - z$

E $2x - u - t = 0 \Rightarrow t = 2x - u = 2x - 2x + 2y - z = 2y - z$

F $2x - y - v = 0 \Leftrightarrow$ A

q.e.d.

Ist ein 5-Torus-Knoten 5-etikettierbar?



A $2 - 2 - 0 = 0$

B $4 - 3 - 1 = 0$

C $6 - 4 - 2 = 0$

D $8 - 0 - 3 \underset{5}{\equiv} 3 - 3 = 0$

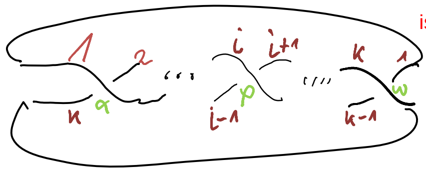
E $0 - 4 - 1 = -5 \underset{5}{\equiv} 0$

Alle Gleichungen sind erfüllt.

Also:

Der 5-Torus-Knoten ist 5-etikettierbar.

Ist ein k-Torus-Knoten p-etikettierbar?



Ein k-Torus-Knoten ist p-etikettierbar

$\Leftrightarrow$

$p \mid k$

$\Leftrightarrow$

k von p geteilt wird.

α $2 \cdot 1 - 2 - k \underset{p}{\equiv} 0 \Leftrightarrow k \underset{p}{\equiv} 0$

φ $2 \cdot i - (i+1) - (i-1) \underset{p}{\equiv} 0$ f. $\forall p$

ω $2k - 1 - (k-1) \underset{p}{\equiv} 0 \Leftrightarrow k \underset{p}{\equiv} 0$

Der p-Torus-Knoten ist p-färbbar.

Sinnvoll für: k ungerade, sonst ist es eine Verschlingung, : k größer als 1, sonst ist es der Unknoten,

Kann man so allgemein auch andere Knoten untersuchen?

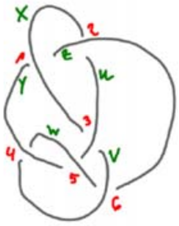
Färbbarkeitsmatrix   Matrix des modularen Gleichungssystems

$$\text{fm6} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}; \text{Det[fm6]}$$

0

$$\text{fmred6} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \text{Det[fmred6]}$$

-13



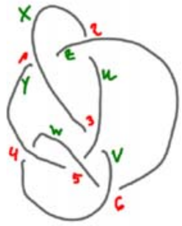
Kretschmarknoten

Nur die Primteiler dieser Determinante kommen für die p-Etikettierbarkeirt infrage.
Hier ist die einzige Möglichkeit p=13

Die Primfaktoren der (red.) Determinante sind möglich p.

Lösung des modularen Gleichungssystems

```
Reduce[{Mod[2 x - y - z, p6] == Mod[0, p6],
   Mod[-x + 2 z - u, p6] == Mod[0, p6],
   Mod[-x + 2 u - v, p6] == Mod[0, p6],
   Mod[-v + 2 y - w, p6] == Mod[0, p6],
   Mod[-y + 2 w - u, p6] == Mod[0, p6],
   Mod[-z + 2 v - w, p6] == Mod[0, p6]
  }, {x, y, z, u, v, w}, Integers];
```



Für p6=13 ergeben sich viele Lösungen,
für andere Werte kommt „einfarbig“ heraus.

Zum Beispiel Ausschnitt aus Lösungen (Mathematica) bei 3-Färbbarkeit:

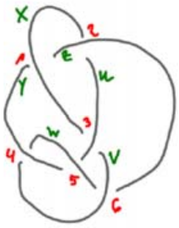
```
(x == 2 + 3 C[1] && y == 3 C[2] && z == 1 + 3 C[3] && u == 3 C[4] && v == 1 + 3 C[5] && w == 2 + 3 C[6]) ||
(x == 2 + 3 C[1] && y == 1 + 3 C[2] && z == 3 C[3] && u == 1 + 3 C[4] && v == 3 C[5] && w == 2 + 3 C[6]) ||
(x == 2 + 3 C[1] && y == 2 + 3 C[2] && z == 2 + 3 C[3] && u == 2 + 3 C[4] && v == 2 + 3 C[5] && w == 2 + 3 C[6]))
```


Proben sind leicht durchführbar, auch von Hand.

Probe einer Lösung des
modularen Gleichungssystems

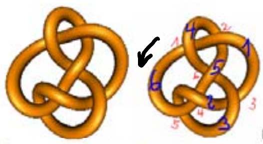
Mit p6=13

• Hier ist eine der von Mathematica vorgeschlagenen Lösungen eingetragen



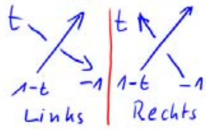

```
{Mod[2 x - y - z, p6] == Mod[0, p6],
  Mod[-x + 2 z - u, p6] == Mod[0, p6],
  Mod[-x + 2 u - v, p6] == Mod[0, p6],
  Mod[-u + 2 v - w, p6] == Mod[0, p6],
  Mod[-y + 2 w - v, p6] == Mod[0, p6],
  Mod[-z + 2 y - w, p6] == Mod[0, p6]} /. {x → 2, y → 1, z → 0, u → 1, v → 0, w → 2}

{True, True, True, True, True, True}
```


Alexanderpolynom als Knoteninvariante



Die Alexandermatrix wird so aufgestellt:

- Der Knoten wird orientiert.
- Kreuzungen und Bögen werden beschriftet
- Werte für die Bögen werden in der Zeile der Kreuzung eingetragen.



$$\begin{array}{c|c} \text{Kr}\backslash\text{Bo} & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \end{array} & \begin{pmatrix} t & 0 & 0 & 1-t & 0 & -1 \\ 1-t & 0 & 0 & -1 & t & 0 \\ t & -1 & 1-t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & 0 & 0 & t & -1 \\ 0 & t & -1 & 0 & 0 & 1-t \\ 0 & 0 & -1 & t & 1-t & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Alexanderpolynom als Knoteninvariante

Die Alexandermatrix wird so ausgewertet::

- Eine beliebige Zeile wird gestrichen
- Eine beliebige Spalte wird gestrichen
- Vorn dieser reduzierte Alexandermatrix wird die Determinatne berechnet.
- bei dem enstehenden Term von t wird die höchstmögliche Potenz von t ausgekammert.
- Das verbleibende Polynom (Absolutglied ungleich Null)

ist das Alexanderpolynom

$$\begin{pmatrix} t & 0 & 0 & 1-t & 0 & -1 \\ 1-t & 0 & 0 & -1 & t & 0 \\ t & -1 & 1-t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & 0 & 0 & t & -1 \\ 0 & t & -1 & 0 & 0 & 1-t \\ 0 & 0 & -1 & t & 1-t & 0 \end{pmatrix}$$

Dadurch entsteht die reduzierte Alexandermatrix

```
almex
```

$$\begin{pmatrix} t & 0 & 0 & 1-t & 0 \\ 1-t & 0 & 0 & -1 & t \\ t & -1 & 1-t & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & 0 & 0 & t \\ 0 & t & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ihre Determinante ist das Alexanderpolynom

```
linalg::det(almex)
```

$$t^5 - t^4 \cdot 3 + 5 \cdot t^3 - t^2 \cdot 3 + t$$

Alexanderpolynom als Knoteninvariante

Die Alexandermatrix wird so ausgewertet::

- Eine beliebige Zeile wird gestrichen
- Eine beliebige Spalte wird gestrichen
- Vorn dieser reduzierte Alexandermatrix wird die Determinatne berechnet.
- bei dem enstehenden Term von t wird die höchstmögliche Potenz von t ausgekammert.
- Das verbleibende Polynom (Absolutglied ungleich Null)

ist das Alexanderpolynom

$$t^4 - 3\,t^3 + 5\,t^2 - 3\,t + 1$$

$$\begin{pmatrix} t & 0 & 0 & 1-t & 0 & -1 \\ 1-t & 0 & 0 & -1 & t & 0 \\ t & -1 & 1-t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & 0 & 0 & t & -1 \\ 0 & t & -1 & 0 & 0 & 1-t \\ 0 & 0 & -1 & t & 1-t & 0 \end{pmatrix}$$

Dadurch entsteht die reduzierte Alexandermatrix

```
almex
```

$$\begin{pmatrix} t & 0 & 0 & 1-t & 0 \\ 1-t & 0 & 0 & -1 & t \\ t & -1 & 1-t & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & 0 & 0 & t \\ 0 & t & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ihre Determinante ist das Alexanderpolynom

```
linalg::det(almex)
```

$$t^5 - t^4 \cdot 3 + 5 \cdot t^3 - t^2 \cdot 3 + t$$

Alexanderpolynome der ersten Primknoten

Der Kretzschmar-Knoten kann allenfalls dieser Knoten, der 6.3, sein.

$t^4 - 3\,t^3 + 5\,t^2 - 3\,t + 1$

3_1	$t^2 - t + 1$
4_1	$t^2 - 3t + 1$
5_1	$t^4 - t^3 + t^2 - t + 1$
5_2	$2t^2 - 3t + 2$
6_1	$2t^2 - 5t + 2$
6_2	$t^4 - 3t^3 + 3t^2 - 3t + 1$
6_3	$t^4 - 3t^3 + 5t^2 - 3t + 1$
7_1	$t^6 - t^5 + t^4 - t^3 + t^2 - t + 1$
7_2	$3t^2 - 5t + 3$
7_3	$2t^4 - 3t^3 + 3t^2 - 3t + 2$
7_4	$4t^2 - 7t + 4$
7_5	$2t^4 - 4t^3 + 5t^2 - 4t + 2$
7_6	$t^4 - 5t^3 + 7t^2 - 5t + 1$
7_7	$t^4 - 5t^3 + 9t^2 - 5t + 1$
8_1	$3t^2 - 7t + 3$
8_2	$t^6 - 3t^5 + 3t^4 - 3t^3 + 3t^2 - 3t + 1$
8_3	$4t^2 - 9t + 4$
8_4	$2t^4 - 5t^3 + 5t^2 - 5t + 2$
8_5	$t^6 - 3t^5 + 4t^4 - 5t^3 + 4t^2 - 3t + 1$

208 Anhang 2: Alexander-Polynome

9_{37}	$2t^4 - 11t^3 + 19t^2 - 11t + 2$
9_{38}	$5t^4 - 14t^3 + 19t^2 - 14t + 5$
9_{39}	$3t^4 - 14t^3 + 21t^2 - 14t + 3$
9_{40}	$t^6 - 7t^5 + 18t^4 - 23t^3 + 18t^2 - 7t + 1$
9_{41}	$3t^4 - 12t^3 + 19t^2 - 12t + 3$
9_{42}	$t^4 - 2t^3 + t^2 - 2t + 1$
9_{43}	$t^6 - 3t^5 + 2t^4 - t^3 + 2t^2 - 3t + 1$
9_{44}	$t^4 - 4t^3 + 7t^2 - 4t + 1$
9_{45}	$t^4 - 6t^3 + 9t^2 - 6t + 1$
9_{46}	$2t^2 - 5t + 2$
9_{47}	$t^6 - 4t^5 + 6t^4 - 5t^3 + 6t^2 - 4t + 1$
9_{48}	$t^4 - 7t^3 + 11t^2 - 7t + 1$
9_{49}	$3t^4 - 6t^3 + 7t^2 - 6t + 3$

Charles Livingston
Knotentheorie für Einsteiger
Braunschweig 1995, Vieweg
Isbn 3 528 06660 1

Alexei Sossinski
Mathematik der Knoten
rororo science sachbuch
Hamburg 2000
Isbn 978 3499609305 (9€)

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, www.mathematik-verstehen.de, Folie 36

Alexanderpolynome mit CAS Taschenrechner

ALexander–Polynome Knotentheorie Haftendorn, April 2011

1. Bezeichne alle Kreuzungen des Knotens k1, k2, ...
2. Bezeichne alle Bögen des Knotens mit mit Nummern
3. Richte eine Matrix ein mit nXm n= Zahl der Kreuzungen m=Zahl der Knoten

$$\textbf{aex}:=\begin{bmatrix} 1-t & -1 & 0 & t & 0 & 0 \\ -1 & 1-t & t & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1-t & 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1-t & -1 & 0 & t \\ 0 & 1-t & 0 & 0 & t & -1 \\ 0 & t & -1 & 0 & 0 & 1-t \end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix} 1-t & -1 & 0 & t & 0 & 0 \\ -1 & 1-t & t & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1-t & 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1-t & -1 & 0 & t \\ 0 & 1-t & 0 & 0 & t & -1 \\ 0 & t & -1 & 0 & 0 & 1-t \end{bmatrix}$$

Jede Zeile steht für eine Kreuzung, jede Spalte für einen Bogen

4. Beschrifte die Matrix entsprechend den Regeln.
5. Kopiere die Matrix, streiche eine Zeile und eine Spalte
6. Bestimme die Determinante der Restmatrix, das ist das Alexar
7. Klammere t^k aus. -> reduziertes Alexanderpolynom.

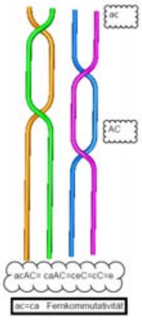
aex

$$\textbf{alex2}:=\begin{bmatrix} 1-t & -1 & t & 0 & 0 \\ -1 & 1-t & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & 1-t & 0 & t & -1 \\ 0 & t & 0 & 0 & 1-t \end{bmatrix} \blacktriangleright$$

$$\det(\textbf{alex2}) \blacktriangleright t^2\cdot(2\cdot t^2-3\cdot t+2)$$

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, www.mathematik-verstehen.de, Folie 37

Zöpfe und Knoten

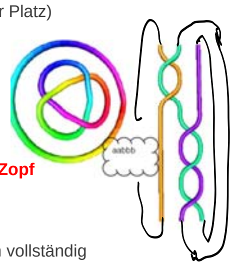


- Zöpfe haben n+1 Stränge
- zwischen zwei benachbarten Strängen kann eine Kreuzung von rechts (Kleinbuchstabe) oder von links (Großbuchstabe) erfolgen.
- Es gibt damit ein Alphabet von 2 n Zeichen
- Es gibt einen Zopfworte.
- Diese bilden eine unendliche Zopfgruppe (im algebraischen Sinn).
- Sie ist nicht kommutativ, hat aber Fernkommutativität und andere interessante Eigenschaften

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, www.mathematik-verstehen.de, Folie 38

Zöpfe und Knoten

- Zöpfe können in einer standardisierten Weise gechlossen werden. (Platz für Platz)
- Dabei entstehen Knoten und **Verschlingungen**



Es gibt einen Satz:
Jeder Knoten kann in einen Zopf verwandelt werden.

Die Hoffnung, damit die Knoten vollständig beschreiben zu können, hat sich nicht erfüllt.

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, www.mathematik-verstehen.de, Folie 39

Warum Knoten?

Die Knotentheorie bietet
- spannende,
- junge,
- reichhaltige,
- vernetzungsfähige
- kommunizierbare
- offene

Mathematik

Vielen Dank für Ihre Aufmerk-samkeit

Nach dem Vortrag diskutieren wir mit Sachverstand.

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, www.mathematik-verstehen.de, Folie 40

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!

Sie finden alles bei www.mathematik-verstehen.de
Bereich: Knotentheorie

Spektrum Akademischer Verlag /Springer
ISBN 978 8274 2044 2
www.mathematik-sehen-und-verstehen.de

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, www.mathematik-verstehen.de, Folie 41