Graphentheorie: Bäume

Definition:

Ein **Baum** ist eine zusammenhängender (einfacher) Graph ohne Kreis.
Ein nicht-zusammenhängender Graph, dessen Zusammenhangskomponenten Bäume sind, heißt **Wald**.

Bezeichnung: e=Anzahl der Ecken, f=Anzahl der Flächen, k =Anzahl der Kanten
n=Anzahl der Zusammenhangskomponenten

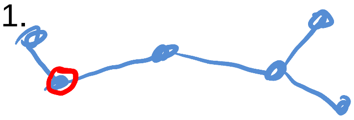
Satz: Für Bäume gilt: f=1 und e = k + 1
Für einen Wald mit n Bäumen gilt: e = k + n

Beweis für Bäume:

Zu f: f=0 gibt es nicht, denn die Fläche, in der ein Graph gezeichnet wird zählt mit. f>=2 heißt, es gibt mindestens einen Kreis -> # zu Baum -> f=1

Konstruktive Idee: Kleinster Baum  zweitkleinster Baum 

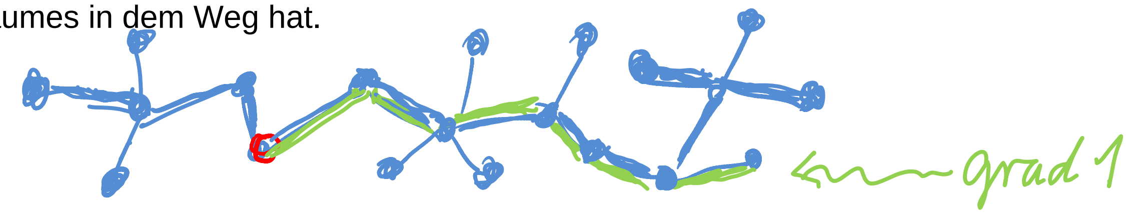
Will man nun weiterzeichnen, so muss ans Ende jeder Kante, die man nun noch von einer Ecke ausgehen lassen will auch noch eine neue Ecke zeichnen. Eine schon vorhandene Ecke kann man nicht nehmen, denn dann würde man ja einen Kreis zeichnen. Kommen zur Startecke gleich viele Ecken und Kanten hinzu, also gilt e=k+1.



Strenger Beweis:

Vollständige Induktion über e e=0 nicht erlaubt, Eckenmenge nichtleer.
e=1 -> k=0, denn Schlingen sind nicht erlaubt. Test: 1=0+1 w.A.
e=2 -> k=1, da zus.h., Test: 2=1+1 w.A. **Induktionverankerung**
Induktionsannahme: Für einen Baum G mit e Ecken gilt e=k+1

Schluss e—>e+1 Betrachten wir einen Baum G* mit e*=e+1 Ecken und k* Kanten.
Teil A Behauptung: Es gibt eine Ecke vom Grad 1.
Beweis von A: Konstruktion eines Weges in G*: Starte an beliebiger Ecke, gehe immer weiter zu einer Nachbarecke, zu schon betretenen Ecken kommt man nicht zurück. Da der Graph endlich ist, kommt man irgendwann nicht mehr weiter. Die Ecke auf der man nun ist, hat Grad 1, sonst könnte man ja weiter. Es ist unwesentlich, dass man i.d.R. nur einen Teil des Baumes in dem Weg hat.



Teil B Diese Ecke vom Grad 1 und die hinführende Kante nehme ich vorübergehend aus G* heraus. Übrig bleibt ein Graph G mit e=e*-1 Ecken und k=k*-1 Kanten. Für so einen Graphen gilt aber die Induktionsannahme e=k+1, also (e*-1)=(k*-1) +1, woraus e*=k*+1 folgt.

q.e.d.

Beweis für einen Wald:
$$\left.\begin{array}{l} e_1 = k_1 + 1 \\ e_2 = k_2 + 1 \\ \vdots \\ e_n = k_n + 1 \end{array}\right\} e = \sum_{i=1}^{z} e_i = \sum_{i=1}^{z} k_i + n \cdot 1 = k + n$$
q.e.d.

Übriges gilt für den Wald auch f=1, da die Bäume des Waldes nicht zusammenhängen.

Graphentheorie: Eulerscher Polyedersatz

Eulerscher Polyedersatz

G sei zus.hängend und planar (einfach) $\Rightarrow \boxed{e+f=k+2}$

Bew. vollst. Ind. nach f

Veranl.: $f=1 \Rightarrow G$ ist Baum $\Rightarrow e=k+1 \quad |+1$

d.h. kein Kreis
Baum. war Voraus.

$e+1=k+2$

$e+f=k+2$

IA Für f Flächen (Gebiete), e Ecken, k Kanten gilt ⭑

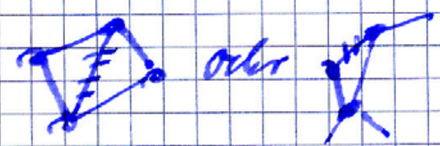
$f \rightsquigarrow f+1$ $\quad G^*$ $\quad f^*=$

Betrachtet wird ein Graph mit f+1 Gebieten, e^* Ecken und k^* Kanten; planar, zush., einfach

Da $f^* > 1$ ist G^* kein Baum, enthält also mindestens einen Kreis.

Entferne eine Kante eines solchen Kreises.

Dabei werden sicher zwei Gebiete vereinigt.

⊛ 

Der neue Graph hat
e^* Ecken $=e$, k^*-1 Kanten $=k$
f^*-1 Flächen $=f$

Für ihn gilt die IA. $\underset{e}{e^*} + \underset{f}{f^*-1} = \underset{k}{k^*-1} + 2 \quad |+1$

$\Rightarrow e^* + f^* = k^* + 2$

qed

Bei ⊛ geht ein, dass der Graph planar ist.

Warum ist das schon ein vollst. Beweis.

Angen. $\exists\ G(\bar e, \bar f, \bar k)$ mit $\bar e + \bar f \neq \bar k + 2$, dann sortiere ich diese Graphen nach der Größe von f. Habe $\bar G$ nun (ein) minimales $\bar f$. Dann nehme ich eine Kante aus einem Kreis weg $\Rightarrow G(\bar e, \bar f - 1, \bar k - 1)$ mit $\bar e + (\bar f - 1) = (\bar k - 1) + 2 \Rightarrow \bar e + \bar f = \bar k + 2 \Rightarrow$ ⚡

Graphentheorie: Eulerscher Polyedersatz, n Komponenten

EP(n)

Eulerscher Polyedersatz für nicht zusammenhängende, planare, schlichte Graphen.
n = Zahl der Zusammenhangskomponenten.
e = Eckenzahl, f = Flächenzahl, k = Kantenzahl
dann gilt $\boxed{e + f = k + 1 + n}$

Hilfssatz: Für einen Wald aus n Bäumen gilt $\boxed{e = k + n}$

Bew. Hilfssatz: Vollst. Ind. über n

I.V. $n=1$ ein Baum, $e = k+1$

I.A. n Baum $e = k+n$

$n \rightsquigarrow n+1$ $n+1$ Bäume

$e = k+n$ der zusätzliche Baum $e_z = k_z + 1$

der Wald $e_w = e + e_z \underset{IA}{=} k + n + e_z = k + n + k_z + 1$

$= (k + k_z) + (n+1) = k_w + (n+1)$ qed

Beweis des Satzes EP(n)

Induktion über n IV $n=1$ $e + f = k + 2$ EP wahr

IA $e + f = k + 1 + n$

$n \rightsquigarrow n+1$ $n+1$ Komponenten von $G^* = G \cup G_z$
zB Wald(n) Baum oder allg.!!!

für die n Komponenten gilt $e + f = k + 1 + n$

Für G^* gilt $e^* = e + e_z$ $f^* = f + f_z - 1$ gemeinsame Außenfläche

$k^* = k + k_z$ Komponenten $n^* = n+1$

$e^* + f^* = e + f + \underbrace{e_z + f_z}_{k_z + 2} - 1 \underset{IA}{=} k + 1 + n + k_z + 2 - 1$

$= k + k_z + 1 + n + 1 = k^* + 1 + \underbrace{(n+1)}_{n^*}$

qed.

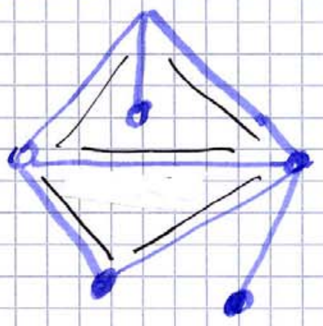
Graphentheorie: Satz 1: 3*Flächen begrenzt durch 2*Kanten

Satz 1 Graph planar, zush., schlicht, $k>1$

dann gilt $\boxed{3f \le 2k}$

Vorstellung: die Holobits wohnen in den Kreisen

Beweis



1.) Verdoppel jede Kante, die 2 Flächen begrenzt. } Jeder Garten bekommt individuelle Zäune.

2.) Zu jeder Fläche gehören nun mind 3 Kanten } Zu jedem Garten mind. 3 Zäune z

$$3f \le z$$

3.) Die Zahl der Kanten kommt durch 1) höchstens doppelt so groß wie vorher werden } Mehr als einen Nachbarzaun kann kein Zaun haben

$$z \le 2k$$

4.) Zusammen

$$3f \le 2k$$

qed

Oben $f=3$ $k=7$

$3f$ $2k$

$9 \le 14$

wahr.

$f=4$ $k=6$

$3f$ $2k$

$12 \le 12$

wahr

Graphentheorie: Satz 2: Kanten begrenzt durch 3*Ecken-6

Satz 2 Graph planar, zusammenhängend, schlicht

Dann gilt $\boxed{k \leq 3e-6}$

mit Worten
Beim planaren schlichten Graphen kann die Kantenzahl nicht beliebig groß sein, sie ist durch $3e-6$ begrenzt.

Beweis Es gilt EP: $e+f=k+2$, also $k=e+f-2$
Satz ①: $3f \leq 2k$

Also $3k \underset{EP}{=} 3e+3f-6 \underset{①}{\leq} 3e+2k-6 \quad | -2k$

$\Rightarrow \boxed{k \leq 3e-6}$ qed.

Liste

Ecken e	Kanten k
1	0
2	~~0~~, 1 //
3	2, 3 //
4	3, 4, 5, 6 //
5	4, ..., 9 //

heißt: mehr Kanten gibt es nicht beim schlichten planaren Graphen zush.

K_4 hat 6 Kanten $= 4\cdot3:2$

$k \leq 3\cdot5-6 = 15-6 = 9$

$k=9$

Der K_5 hat $e=5$, $k=\frac{4\cdot5}{2}=10$, daher kann K_5 nicht planar sein.

Alternative Rechnung

$3e-6 \underset{EP}{=} 3(k+2-f)-6 = 3k+6-3f-6$
$= 3k-3f \geq 3k-2k = k$

wegen Satz ①: $-3f \geq -2k$

Graphentheorie: Satz 3 von der mageren Ecke

Satz 3: Es gibt in planaren, einfachen, zusammhängenden Graphen stets eine Ecke vom Grad höchstens 5.

Satz 3 $\exists$ Ecke mit Grad $\boxed{g \leq 5}$

Planar, zush., schlicht.

Bew Summe aller Eckengrade $=: \Sigma_g$

Jede Kante zählt bei genau 2 Ecken

$\Rightarrow \quad \Sigma_g = 2k$ $\qquad$ e = Zahl der Ecken.

Die Menge aller Eckengrade der Graphen hat ein (od. mehrere) kleinstes Element g

Dann gilt $\quad g \cdot e \leq \Sigma_g = 2k \overset{(2)}{\leq} 6e - 12 \quad |:e$

$\Leftrightarrow \quad g \leq 6 - \frac{12}{e} < 6 \quad \Rightarrow \quad \boxed{g \leq 5}$

Graphentheorie: Vollständige Graphen

Def: Vollständige Graphen K_n

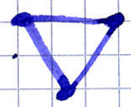
$\Leftrightarrow$ Jede Ecke ist mit jeder andern verbunden

$\Leftrightarrow$ Adjazenzmatrix enthält allenfalls in der Hauptdiagonale eine Zahl 0. (sonst keine 0)

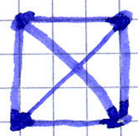
bei schlicht $\Rightarrow$ Hauptdiag. 0

K_2

K_3

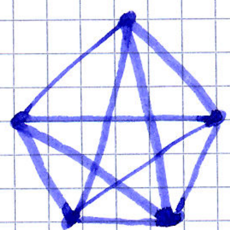


K_4



plättbar

K_5



plättbar?

$2k = \Sigma g$

$2k = 5 \cdot 4$

alle Ecken grad 4

$2k = 20$

auch direkt $\underline{k = 10}$ $e = 5$

Satz (2) $k \le 3e - 6 = 3 \cdot 5 - 6 = 9$

↯, denn $k = 10 > 9$

$\Rightarrow$ Voraussetzung von (2) nicht erfüllt

planar, zus., schlicht

erfüllt erfüllt

also dies nicht erfüllt.

$\Rightarrow$ $\boxed{K_n \text{ mit } n \ge 5 \text{ nicht plättbar}}$

Graphentheorie: Vollständige Graphen

Def ein Graph heißt { zwei-färbbar / bipartit
wenn seine Eckenmenge in zwei Klassen zerfällt $E = E_1 \cup E_2$
und es nur Kanten gibt, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$
die Ecken aus E_1 mit Ecken aus E_2 verbinden.

$K_{1,1}$ 

$K_{1,2}$ 

$K_{1,3}$ 

Ein Graph heißt vollständig-bipartit, wenn jede Ecke aus E_1 mit jeder Ecke aus E_2 verbunden ist

Bez. $K_{m,n}$ $|E_1| = m$ $|E_2| = n$.

$K_{2,2}$ 

$K_{2,3}$ 

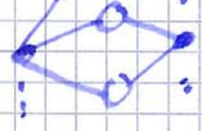
plättbar 

$K_{3,3}$ 

plättbar? G W E
Gas Wasser Elektro

Beh. $\boxed{K_{3,3} \text{ ist nicht plättbar}}$

Bew. Wenn $K_{3,3}$ planar gezeichnet wäre



hätte jede Fläche 4 Kanten.
Wie beim Bew. von (1) gilt
$4f \leq 2k \underset{EP}{\Longrightarrow} 4(k+2-e) \leq 2k$

$4(9+2-6) \leq 2 \cdot 9$
$4 \cdot 5 \leq 2 \cdot 9$
$20 \leq 18$ ↯

⇒ (EP) kann nicht gelten $\underset{w.s.}{\Longrightarrow}$ nicht planar

Satz von Kuratowski :
Alle nicht-planaren Graphen enthalten K_5 oder $K_{3,3}$.(ohne Beweis)