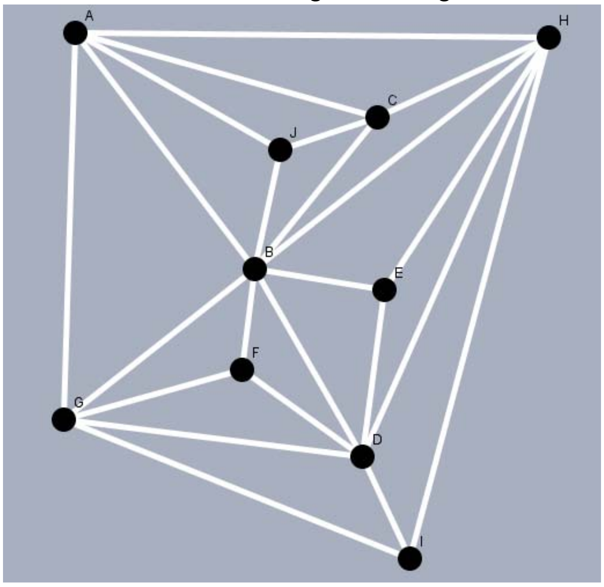
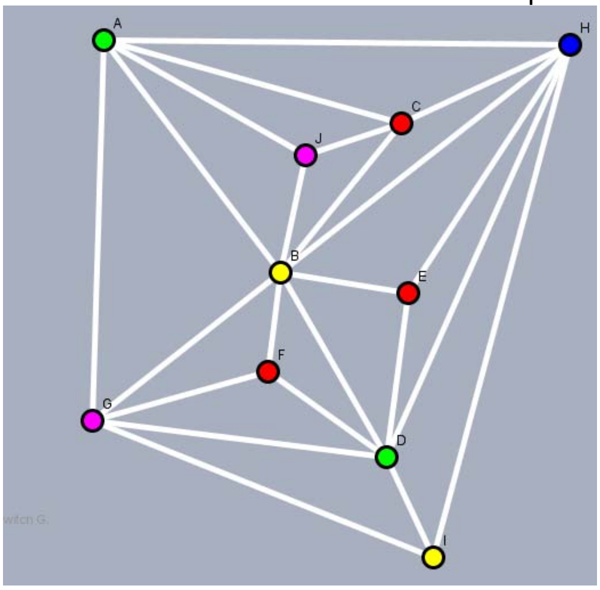
http://www-m10.ma.tum.de/bin/view/MatheVital/DiskreteMathematik/FuenfFarbensatz

MatheVital Diskrete Mathematik: Fünffarbensatz von Heawood

Dort ist ein wunderschönes Applet, das einen Algorithmus zum Fünffärben von planaren Graphen demonstriert und dabei gleichzeitig die Grundidee des Beweises von Heawood am Beispiel anwendet.





Links im Applet befindet sich senkrecht ein langer Schieberegler, den man ganz langsam mit häufigem Innehalten ziegen muss. Es sind dort die Kommentare zum Vorgehen zu lesen.

Falls es schlecht zu sehen ist; G, J lila, C,E,F rot

Folgendes wird iteriert:

1. Suche Ecke von Grad <=5.
2. „Lösche“ sie mit den von ihr ausgehenden Kanten („Lösche“= lege schlafen)
3. Es bleibt ein Subgaph.
4. Hat der Subgraph mehr als 5 Knoten, gehe zu 1.
6. Sonst: Färbe die Knoten mit 5 Farben.
7. Nimm den letzten die schlafen gelegten Konten wieder auf.
8. Kannst du ihn in erlaubter Weise färben und schläft noch ein Knoten gehe zu 7.
9. Sonst: Wenn kein Knoten mehr da ist, ist der Graph gefärbt, fertig.

Problembehandlung:

10. Wenn du den Knoten in 8. nicht in erlaubter Weise färben kannst, also wenn alle 5 Nachbarknoten verschiedene Farben haben, wähle zwei nicht untereinander benachbarte Knoten aus, oBdA seien sie grün und lila. Verfolge vom grünen Knoten aus einen Baum in den Graphen der lila und grün im Wechsel aufweist. Treibe dies soweit es geht.
11. Wenn dieser Baum nicht den lila Knoten deiner Auswahl in 10 erreicht, dann fäbe in ihm!!! grün zu lila und lila zu grün. Dann färbe den Knoten aus 8. grün, er hat nun zwei lila Nachbarn und grün ist frei.
12. Wenn dieser Baum aber den lila Knoten deiner Auswahl in 10 erreicht, hast du Pech gehabt. Dann wähle zwei andere andere Konten aus den Nachbarn des noch zu färbenden Knoten aus und zwar auf verschiedenen Seiten eines der Knoten mit denen es eben nicht geklappt hat. Seien diese rot und gelb. Verfolge vom gelben Knoten aus einen Baum in den Graphen der rot und gelb im Wechsel aufweist. Treibe dies soweit es geht. Nun kann man aber nicht wieder „Pech haben, denn dann müsste der Baum den grün-lila-Weg kreuzen. Das geht aber nicht, da es sich um einen planaren Graphen handelt. Also kann in dem rot-gelben Baum Rot mit Gelb vertauscht werden.
13. Dann hat der noch zu färbende Knoten zwei rote Nachbarn und es bleibt gelb für ihn als Farbe übrig.

Der **Beweis von Heawood** verwendet diese Problembehandlung in der Vollständigen Induktion. Verankerung klar. G sei ein planarer Graph mit n+1 Ecken, Suche in G die (nach Satz…existierende) Ecke mit Grad <= 5. Nimm sie und die von ihr ausgehenden Kanten heraus. Es entsteht G* mit n Ecken und G* ist nach Induktionsannahme fünffärbbar. Nun fügt man die Ecke wieder ein und färbt sie. Entweder geht das problemlos oder man verfolgt obige Problembehandlung. Danach ist dann auch G mit n+1 Ecken fünffärbbar.