Körpererweiterungen, Gradformel

Bosch: Algebra f. Einst.
Vieweg 2002

Def: Körper K, Erweiterung zum Körper E
m heißt "Grad der Körpererweiterung", wenn sich genau m Werte $e_1, \dots, e_m \in E$ finden lassen, so dass jeder Wert $x \in E$ eindeutig mit Koordinaten $k_1 \dots k_m \in K$ darstellbar ist

$$x = k_1 e_1 + k_2 e_2 + \dots + k_m e_m$$

Fasst man E als VR über K auf, dann ist m die Dimension dieses VR

Satz: Für geschachtelte Körpererweiterungen

$$\underbrace{\underbrace{K \subset L}_{\text{Grad } m} \underbrace{\subset E}_{\text{Grad } n}}_{\text{Grad } m \cdot n}$$

$K = \mathbb{Q} \quad L = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$

$L(\sqrt{3}) = E = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$

Basis in $L = \{1, \sqrt{2}\}$

Basis in $E = \{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}\}$

Info: $(K, +, \cdot)$ ist Körper $\iff$ $(K, +)$, $(K^*, \cdot)$ sind Gruppen und es gilt das Distrib.gesetz
ohne 0 kommut.

$z \in E \Rightarrow z = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}$
mit Zahlen dieser Bauart kann man rechnen und erhält nur wieder solche.

Beispiel $\frac{3+\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{3+\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{2}+3\sqrt{3}+2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{2-3}$

$= -(6\sqrt{2} + 5\sqrt{3}) \in E$

Unmöglichkeitsbeweise

$z \in \mathbb{C}$ ist mit Zirkel und Lineal konstruierbar

$\Longleftrightarrow$ $z \in E$ mit E ist Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$ mit Grad 2^k

denn entsteht aus schrittweiser Erweiterung mit Grad 2

siehe dazu die Seite: Konstruierbarkeit

$\sqrt[3]{a}$ kommt nur durch eine Körpererweiterung vom Grad 3 zustande.

Basis ist $\{1, \sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{a}^2\}$.

Daher sind $\sqrt[3]{a}$ nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar.