Indisches Wurzelziehen

Vortrag Christoph Kirfel (Norwegen), GDM Regensburg 2019
sulbasutra.nb Ha 2019

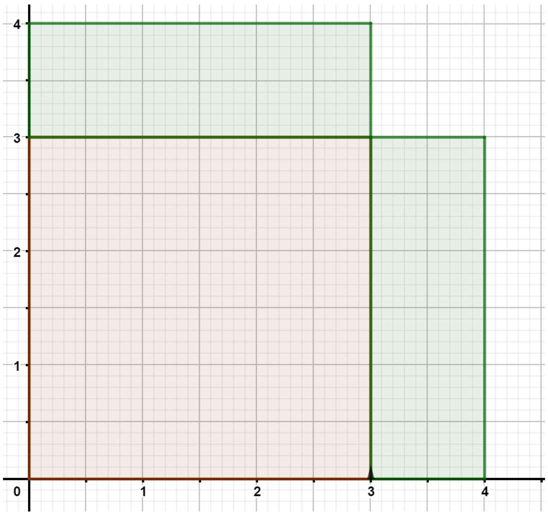
$\sqrt{N}$ -Bestimmung, Sulbasutra 600vChr.

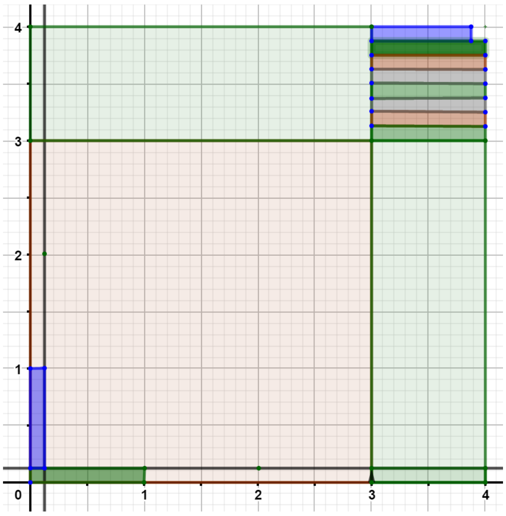
Grundidee

Es wird eine Folge von Quadraten erzeugt, aus denen an einer Ecke ein kleineres Quadrat ausgeschnitten ist, genannt L-Figuren Eine passende Rekursionsformel führt dann zu eine (Haupt)-Kantenlänge, die sich (schnell) $\sqrt{N}$ nähert.
Unten wird gezeigt, dass die Werte dem Heronverfahren entsprechen.

Start für $\sqrt{N}$

w sei so gewählt, dass w^2<N ist. Günstig ist aber $(w+1)^2 > N$. Die Fläche $N-w^2$ wird auf zwei Rechtecke der Länge w und der Breite $b = \frac{N-w^2}{2w}$ aufgeteilt. Daraus wird die L-Figur gebildet, so dass ein Quadrat der Kantenlänge w+b entsteht, dem das Quadrat b^2 fehlt.





Gemäß Konstruktion ist
$(w + b)^2 - b^2 = w^2 + 2 w b = w^2 + 2 w * \frac{N-w^2}{2w} = N$
Der Radikand der gesuchten Wurzel ist also gleich der Differenz zweier Quadrate.

Rekursionsschritt für L-Figuren

Setzt man nun $a = w + b$, so gilt $N = a^2 - b^2$.
Das leere Quadrat der Breite b wird nun durch 2n Streifen ausgefüllt, die man durch Abschneiden unten und links gewinnt. Dabei ist $n = \frac{a}{b}$Sie haben die Breite b und die Höhe $\hat{b} = \frac{b}{2n} = \frac{b^2}{2a}$, allerdings

ist ein Streifen nur $b - \hat{b}$ breit.
Damit hat die neue L-Figur die Maße $\hat{a} = a - \hat{b} = a - \frac{b^2}{2a}$

Rekursionsformeln

In[8]:=
```
fb[a_, b_] := b^2/(2 a)
fa[a_, b_] := a - b^2/(2 a)
```

$\sqrt{2}$ denn $2 = (3/2)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$

In[37]:=
```
N[√2, 20]
```
numerischer Wert

Out[37]= 1.4142135623730950488

In[46]:= $\{a = \frac{3}{2}, b = \frac{1}{2}\}$

Out[46]= $\{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\}$

In[47]:=
```
liste = {fb[a, b], fa[a, b], fa[a, b] // N, fa[a, b]^2, fa[a, b]^2 // N}
```
numerischer Wert nur

Out[47]= $\{\frac{1}{12}, \frac{17}{12}, 1.41667, \frac{289}{144}, 2.00694\}$

Anmerkung

Die Inder fassten die Brüche nicht zusammen. Für die Längen a ergab sich
$\frac{3}{2}, \frac{3}{2} - \frac{1}{3*4}, \frac{3}{2} - \frac{1}{3*4} - \frac{1}{2*3*4*17}, \frac{3}{2} - \frac{1}{3*4} - \frac{1}{2*3*4*17} - \frac{1}{2*3*4*17*1154} - \ldots$
Zusammengefasst $\frac{3}{2}, \frac{17}{12}, \frac{577}{408}, \frac{665857}{470832}$

Es sind “Schachtelnenner”, bei jedem Schritt kommt ein Faktor im Nenner hinzu. Damit gelang es, das Vorgehen zu rekonstruieren.

weitere Werte

$\sqrt{15}$ denn w=3, $b = \frac{15-9}{2*3} = \frac{6}{6} = 1$, also $a = 4$

Passend zum Bild

In[5]:=
```
N[√15, 20]
```
numerischer Wert

Out[5]= 3.8729833462074168852

In[6]:= `{a = 4, b = 1}`

Out[6]= `{4, 1}`

In[10]:= `liste = {fb[a, b], fa[a, b], N[fa[a, b], 20], fa[a, b]^2, N[fa[a, b]^2, 20]}`
numerischer Wert numerischer Wert

Out[10]= $\left\{\frac{1}{8}, \frac{31}{8}, 3.8750000000000000000, \frac{961}{64}, 15.015625000000000000\right\}$

In[11]:= `{a = liste[[2]], b = liste[[1]]};`
`liste = {fb[a, b], fa[a, b], N[fa[a, b], 20], fa[a, b]^2, N[fa[a, b]^2, 20]}`
numerischer Wert numerischer Wert

Out[12]= $\left\{\frac{1}{496}, \frac{1921}{496}, 3.8729838709677419355, \frac{3\,690\,241}{246\,016}, 15.000004064776274714\right\}$

In[13]:= `{a = liste[[2]], b = liste[[1]]};`
`liste = {fb[a, b], fa[a, b], N[fa[a, b], 20], fa[a, b]^2, N[fa[a, b]^2, 20]}`
numerischer Wert numerischer Wert

Out[14]= $\left\{\frac{1}{1\,905\,632}, \frac{7\,380\,481}{1\,905\,632}, 3.8729833462074524357, \frac{54\,471\,499\,791\,361}{3\,631\,433\,319\,424}, 15.000000000000275373\right\}$

Hier stimmen schon 14 Stellen von $\left(\sqrt{15}\right)$

In[15]:= `{a = liste[[2]], b = liste[[1]]};`
`liste = {fb[a, b], fa[a, b], N[fa[a, b], 20], fa[a, b]^2, N[fa[a, b]^2, 20]}`
numerischer Wert numerischer Wert

Out[16]= $\left\{\frac{1}{28\,128\,961\,537\,984}, \frac{108\,942\,999\,582\,721}{28\,128\,961\,537\,984}, 3.8729833462074168852,\right.$
$11\,868\,577\,158\,080\,747\,980\,121\,763\,841 \,/\, 791\,238\,477\,205\,383\,198\,674\,784\,256,$
$\left.15.000000000000000000\right\}$

In[17]:= `N[√15, 20]`
numerischer Wert

Out[17]= `3.8729833462074168852`

Zusammenhang mit dem Heronverfahren

Beweis, dass Heron und Sulbasutra das Gleiche tun

$N = a^2 - b^2$, heron $(a) = \frac{1}{2}\left(a + \frac{a^2-b^2}{a}\right) = \frac{2\,a^2-b^2}{2\,a} = a - \frac{b^2}{2\,a}$= Sulbasutra(a)

$\sqrt{15}$

In[24]:= `w = 15; heron[x_] := 1/2 (x + w/x)`

In[26]:= `N[NestList[heron, 4, 4], 20]`
Liste verschachtelter Ergebnisse

Out[26]= `{4.0000000000000000000, 3.8750000000000000000,`
`3.8729838709677419355, 3.8729833462074524357, 3.8729833462074168852}`

○ $\sqrt{2}$

In[33]:=
```
w = 2; heron[x_] := 1/2 (x + w/x)
```

In[34]:=
```
NestList[heron, 3/2, 4]
```
Liste verschachtelter Ergebnisse

Out[34]= $\left\{\frac{3}{2}, \frac{17}{12}, \frac{577}{408}, \frac{665857}{470832}, \frac{886731088897}{627013566048}\right\}$

In[36]:=
```
N[NestList[heron, 3/2, 6], 20]
```
Liste verschachtelter Ergebnisse

Out[36]=
```
{1.5000000000000000000, 1.4166666666666666667,
 1.4142156862745098039, 1.4142135623746899106,
 1.4142135623730950488, 1.4142135623730950488, 1.4142135623730950488}
```

■ Weitere Beispiele

■ Sqrt[32], denn $32 = 6^2 - 2^2$

■ $\sqrt{72}$ denn $72 = 9\text{^}2 - 3^2 = 6^2 + 2 * 6 * 3$