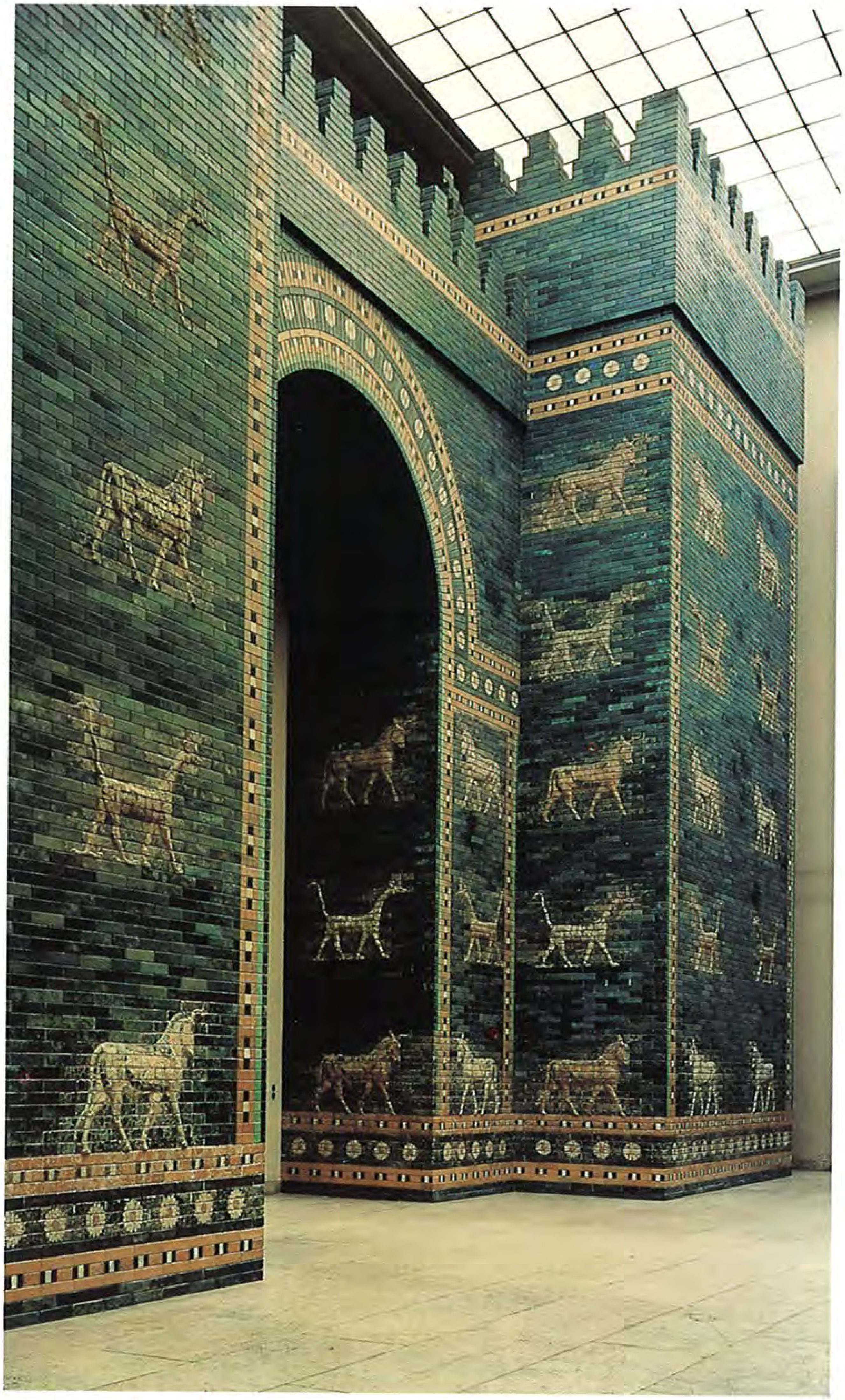
So rechneten Ägypter und Babylonier

Johannes Lehmann

Urania

Bild 73
Prozessionsstraße in Babylon. Vor über 4000 Jahren bildeten die Sumerer im Zweistromland Mesopotamien zwischen Euphrat und Tigris einen Staat mit einer hervorragenden Kultur, die ihren Höhepunkt unter König Nebukadnezar (6. Jh. v. u. Z.) erreichte. Um seine Hauptstadt Babylon vor Überfällen zu bewahren, ließ der Herrscher diese mit einer unüberwindbaren Mauer, z. T. über 7 m dick und über 10 m hoch, versehen. In gleichmäßigen Abständen ragten riesige Wehrtürme in die Höhe. Es wurden Tore, Tempel, prachtvolle Plätze, Straßen und eine Sommerresidenz errichtet. Ein besonders gelungenes Bauwerk, mit Glanzziegeln und Tiersymbolen geschmückt, war das Ischtar-Tor. Es konnte später rekonstruiert werden und gehört zu den Kostbarkeiten des Vorderasiatischen Museums zu Berlin.
Mit freundlicher Genehmigung der Staatlichen Museen zu Berlin, Vorderasiatisches Museum



So rechneten die Babylonier

Dr. R. Thiele und K. Haase

Die Menschen, die wir hier als Babylonier benennen, sind Untertanen verschiedener auf- und untergehender Reiche gewesen. Ihre kulturellen Traditionen gehen bis zum Anfang des dritten vorchristlichen Jahrtausends zurück. In der fruchtbaren Ebene zwischen Euphrat und Tigris, dem Land zwischen zwei Strömen (griechisch Mesopotamien), entstanden in jener Zeit die frühesten sumerischen Stadtstaaten wie Ur, Nippur oder Uruk. In der zweiten Hälfte des dritten Jahrtausends bildeten sich Flächenstaaten (z. B. Altbabylonisches Reich, Elam, Assyrien) heraus, von deren politischen, kommerziellen oder juristischen Gepflogenheiten wir aus etwa viertausend Jahre alten Tontafeln wissen.

Die sumerischen Hochkulturen (Altbabylonisches Reich) erlagen dem Ansturm akkadischer Horden. Das neue akkadische Großreich stellte eine Synthese von sumerischer Kultur und dem Lebensstil der Eroberer dar, was hinsichtlich der Schrift für uns interessant ist. Die schriftlosen Akkadier übernahmen nämlich die Keilschrift der Sumerer für ihre Sprache, die in Wirtschaft und Handel dominierte. In wissenschaftlichen Dingen aber wurde weiter das Sumerische verwendet. Das hatte zur Folge, daß beispielsweise akkadische Formulierungen eines mathematischen Textes aus der in gewisser Weise toten sumerischen Sprache Fremdwörter entleihen konnten und damit die Formalisierung des mathematischen Denkens förderten.

Die Geschichte Mesopotamiens ist außerordentlich bewegt. Bergvölker brachen in die Hochkulturen ein und schwächten oder zerstörten die bestehenden Reiche. Hammurabi (1792–1750 v. u. Z.) ist einer der bekannten Herrscher, der die Macht des sumerisch-akkadischen Reiches wieder erstehen ließ und Babylon (1894 v. u. Z. gegründet) zur Blüte führte.

Die Besiedlungsgeschichte der Stadt ist heutzutage über etwa fünf Jahrtausende nachweisbar. Das Ruinenfeld, aus dem wir seit dem Beginn der Ausgrabungen durch Robert Koldewey im Jahre 1899 immer genauere Kenntnisse erhalten haben, liegt südlich der irakischen Hauptstadt Bagdad am Euphrat.

Babylon verdankt seinen Aufstieg zu einer der bedeutendsten Städte des Altertums und Hauptstadt verschiedener Reiche unter

Bild 74
Keilschrifttafel mit 2 Zahlenreihen. Berechnung der Zahl 290^2, berechnet von einem Schüler.
Die Tafel ist um 90° nach rechts zu drehen.
Mit freundlicher Genehmigung der Hilprecht-Sammlung der Universität Jena
Foto: G. Schörlitz, Jena

anderem seiner Lage an uralten Handelsstraßen. Die babylonische Kultur (auch die Mathematik) beerbte, wie gesagt, die ältere sumerische. Auch die zahllosen Eroberer brachten frische Ideen in die Stadt mit dem berühmten Turm, der bewundernswerten Prozessionsstraße, den legendären Hängenden Gärten. Babylons kopfstarke und, wie uns die Tontafeln wissen lassen, schwerfällige Bürokratie lenkte die Geschicke der Stadt und des Reiches: Da ging es um komplizierte Bewässerungsprobleme, um eine ausgeklügelte Vorratswirtschaft, um mannigfaltige Rechtsstreitigkeiten, um die tägliche Zinsberechnung von Darlehen oder um die penible Buchhaltung betreffs der Steuerforderungen der Tempel und des Hofes. Prinzipien babylonischer Rechtsprechung sind uns in der berühmten Gesetzessammlung des erwähnten babylonischen Königs Hammurabi, dem Codex Hammurabi, überliefert. Sie regelte das Straf-, Zivil- und Handelsrecht im ganzen Reich. Die 282 Gesetze sind in Akkadisch in eine im Jahre 1901 aufgefundene Stele eingemeißelt.

Auch über die philosophische und religiöse Literatur, wie etwa das Gilgamesch-Epos, über die Medizin oder über die Astronomie der Babylonier wissen wir aus Tontafeln, in die in frischem Zustand die Keilschrift (nagelähnliche Zeichen) mit einem Griffel eingedrückt wurde. Diese Art von Informationsträgern härtete an der Sonne aus. Ihre Erhaltung verdanken wir der Regenarmut der Weltgegend, dem schützenden Sand und wohl auch dem Umstand, daß fremdartige Schriftzeichen nicht gerade attraktives Raubgut darstellen.

Zwölf in Ninive gefundene Tontafeln vermitteln uns ein Fragment der uralten Gilgamesch-Sage. Hören Sie den Anfang des Epos, der einen Einblick in das Leben der Zeit gibt: »Alles sah er, der Herr des Landes ... In Keilen ließ schreiben der Dulder die ganze Mühsal. In harten Stein wurden Taten und Leiden aller gemeißelt. Gilgamesch, der siegreiche Held, baute die Mauern um Uruk. Hoch wie ein Berg erhebt sich der heilige Tempel in der umfriedeten Stadt. Fest wie Erz liegt der aufgeschüttete Grund. Unter dem Schutz des erhabenen Hauses, in dem der Himmelsgott wohnt, dehnt sich weit der Kornspeicher der Stadt, das prächtige Vorratshaus. Leuchtend weiß erstrahlt des Königs Palast im Licht. Späher stehen den ganzen Tag auf der Mauer, auch des Nachts wachen die Mannen. Ein Drittel ist Mensch in Gilgamesch, zwei Drittel ist Gott ...«

Werfen wir einige Blicke auf das bewegte Schicksal der Stadt: Babylon wurde 1594 v. u. Z. durch Hethiter zerstört. Ihre militärische Überlegenheit verdankte diese aufstrebende orientalische Großmacht ihren neuen Eisenwaffen und dem Einsatz von Reiterei. Aber auch das Hethiter-Reich ging wie das kassitische, das assyrische und viele weitere unter. Babylon überstand Perioden schwerster Zerstörung. Im Jahre 323 v. u. Z. stirbt der legendäre Alexander der Große in der Stadt der Städte und hinterläßt sein Weltreich seiner Generalität. Es wird aufgeteilt. Babylon fällt an Seleukides und führt unter der Dynastie der Seleukiden noch einige Jahrhunderte ein eigenständiges Dasein. Im Jahre 64 u. Z. geht es im Römischen Reich auf.

Bild 75
Hatra war bis zu seiner Eroberung durch die Araber vor 612 u. Z. Hauptstadt des assyrischen Reiches. Unser Bild zeigt den großen Tempel (437,5 × 322,5 m), eine Mischung aus assyrischer und hellenistischer Architektur.
Mit freundlicher Genehmigung des Ministeriums für Information, Bagdad

Wie rechneten die Babylonier, wenn wir die Angehörigen der vielen glänzenden Hochkulturen so bezeichnen wollen? Konnte es in den immerwährenden politischen Wirren überhaupt ein festes Element geben? Überraschenderweise ja, und es gab nicht nur ein Bewahren der Rechenfertigkeiten, sondern sogar Weiterentwicklung.

Hatten die Sumerer anfänglich verschiedene Zahlensysteme ausprobiert (angefangen mit der Zählreihe eins, zwei, viele), so bildete sich schließlich ein Sexagesimalsystem heraus, also eine Zahlschreibweise, die im Gegensatz zur uns vertrauten Zählbasis 10 die Zählbasis 60 benutzt.

Die 60 ist eine für alltägliche Bedürfnisse viel angenehmere Zahl als 10, da sich 60 ohne Rest durch 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20 und 30 teilen läßt, was bei 10 nur für 2 und 5 möglich ist. Die Zahlen von 1 bis 59 wurden mit Hilfe von zwei Zeichen (Keil und Winkelhaken) und eines eingeschobenen Dezimalsystems dargestellt, und eine Positionsschreibweise ermöglichte beim Darstellen der Potenzen der Basis 60 den Rückgriff auf die bekannten 59 Ziffern. Da auch die negativen Potenzen von 60 auf diese Weise erfaßt werden, war die babylonische Bruchrechnung auf ganz natürliche Art ein Teil der Arithmetik.

Furore machte zu Beginn unseres Jahrhunderts die Entdeckung, daß eine Tontafel die sogenannten pythagoreischen Tripel in einer Vollständigkeit enthielt, wie sie erst bei den späten Griechen (Diophant) wieder erschien. Diese Tripel sind ganzzahlige Lösungen der pythagoreischen Gleichung x2 + y2 = z2. Die Babylonier kannten also lange vor Pythagoras den berühmten Lehrsatz über die

Summe von Quadraten in rechtwinkligen Dreiecken. Damit wurden die Tontafeln und die Assyriologie für die Mathematikgeschichte von höchstem Interesse.

Reste sexagesimalen Denkens finden wir noch heute: in der Winkeleinteilung des Vollkreises in 360 Grad, in der Aufteilung einer Stunde in 60 Minuten, in der Unterteilung der Minute in 60 Sekunden. Aber nicht nur hier ist die alte Kultur präsent, auch eine Reihe heutiger Schulaufgaben über Gleichungen oder geometrische Fragen steht mehr oder weniger bereits auf babylonischen Tontafeln.

Sehen Sie doch selbst!

Bild 76
Uruk: Eanna-Zikkurat, hellenistischer Tempel Bît Rês und Irigal.
Mit freundlicher Genehmigung des Deutschen Archäologischen Instituts, Abteilung Bagdad, Berlin

Bild 77
Karte von Mesopotamien

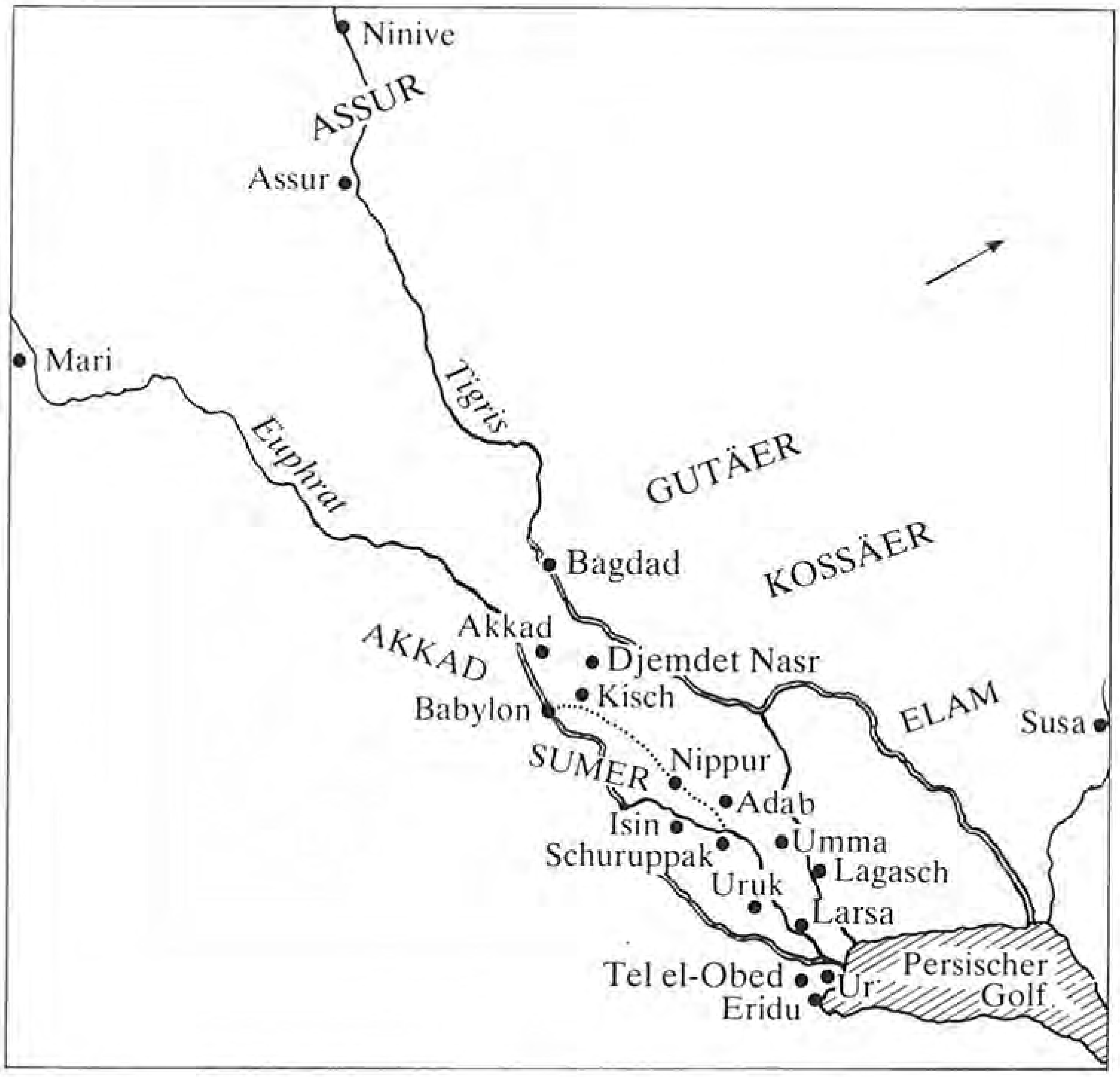
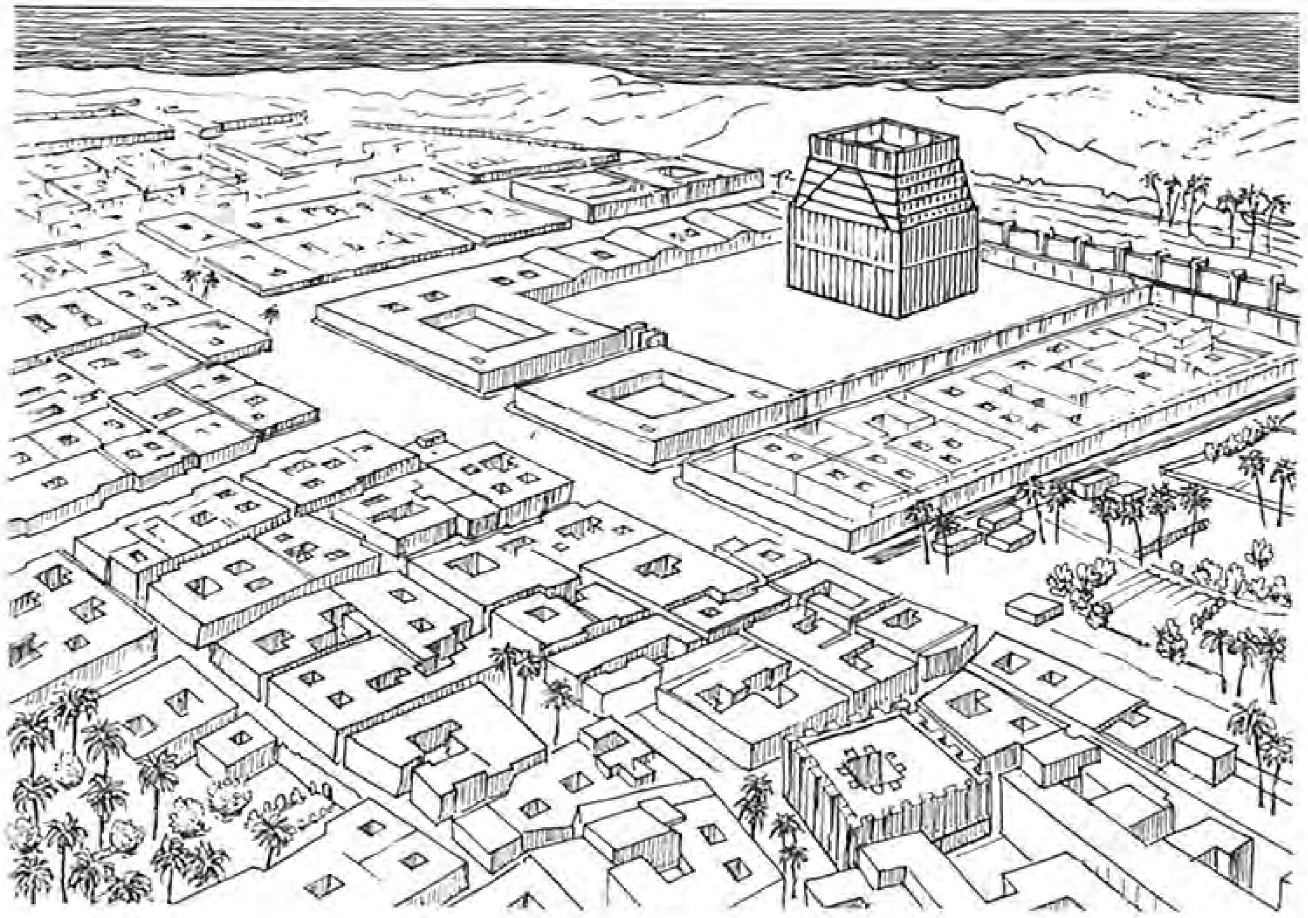


Bild 78
Babylon im 7. Jh. v. u. Z.
Rekonstruktion. Zikkurat,
91 m hoch, 92 m breit,
(Turm von Babel)



Zeittafel

Allgemeine Geschichte	Kulturgeschichte	Geschichte der Wissenschaft
Um 3000 v.u.Z. Sumerische Stadtstaaten	Keilschrift Hohes kulturelles Niveau	Sexagesimalsystem
2800 bis 1800 v.u.Z. Semitisierung		Multiplikations- und Divisionstafeln
Erste Dynastie von Babel: 1700 v.u.Z. Hammurapi	Höhepunkt der Kultur, Gesetzgebung, Rechtsprechung	Hochblüte von Algebra und Geometrie Venusbeobachtungen
1500 bis 1250 v.u.Z. Babylon unter den Kassiten	Astrologische Omenserie: »Enuma Anu Enlil«	Primitive astronomische Berechnungen. Beobachtungen des heliakischen Aufgangs von Fixsternen
747 v.u.Z. Nabonassar, König von Babylon	Beginn der astronomischen »Ära Nabonassar«	Datierte Beobachtungen von Finsternissen in Babylon
729 v.u.Z. Der Assyrer Tiglatpilesar II. be- steigt als Pulu den Thron Babels		
722 v.u.Z. Sargon II. 700 v.u.Z. Sanherib 650 v. u. Z. Assurbanipal	Assyrische Königspaläste Hofastrologen Bibliothek von Assurbanipal	Astronomische Kompendien: I-NAM-GIŠ-ḪAR und MUL APIN, babylonischen Ursprungs in Assyrien um 700 v.u.Z. kopiert
612 v.u.Z. Zerstörung von Ninive Ende des assyrischen Reichs		
Neubabylonisches Reich der Chaldäer: 580 v.u.Z. Nebukadnezar II.	Neuer Höhepunkt von Kunst und Wissenschaft	Beobachtungen von Mond und Planeten
540 v.u.Z. Kyros, Gründer des persischen Reiches	Babylonischer Kultus bleibt unberührt	Immer genauere Beobachtungen
500 v.u.Z. Darius	Kalenderperioden	Tierkreiszeichen, Planetenperioden
333 v.u.Z. Alexander der Große	Hellenismus	Höhepunkt der Astronomie
311 v.u.Z. Anfang der Seleukidenära	Geburtshoroskope	Mond- und Planetentafeln
247 v.u.Z. Anfang der Arsakidenära		Wiederaufleben der Algebra Ausführliche Rechentafeln

Aus: B. L. van der Waerden: Erwachende Wissenschaft. Basel/Stuttgart 1956

Die Aufgaben

Ohne die Geschichte
bleibt man ein unerfahrenes Kind.

Ephraim der Syrer

Archaische Texte – Vorläufer der Keilschrift

Diese Texte sind wahrscheinlich die ältesten bisher aufgefundenen Schriftzeugnisse der Welt. Sie entstanden ca. 3000 v. u. Z. Rund 4000 dieser Fragmente wurden im Füllschutt, der zum Planieren des Baugrundes für einen Neubau der Tempelanlagen in der Stadt Uruk gedient hatte, gefunden. (Uruk – heute Warka – war die älteste Hauptstadt Sumers; um 3200 v. u. Z.) Weitere 200 Texte fand man in der weiter nördlich gelegenen Stadt Gemdet Nasr. Diese Funde bilden die älteste Gruppe archaischer Texte.

Nicht alles wurde bisher entziffert. Bei der Entzifferung dieser Texte bedienten sich die Wissenschaftler eines modernen Großrechners, indem sie, gewissermaßen mittels eines »elektronischen Puzzles«, versuchten, sich ein Gesamtbild vom Inhalt dieser Texte zu verschaffen.

Dabei stellte man fest, daß diese Texte Abrechnungen und Quittungen der Tempel- und Palastverwaltungen sind. Etwa 60 verschiedene Zahlzeichen dienten der Aufzeichnung von Mengenangaben und etwa 1000 mehr oder weniger abstrakte Symbole zur Kennzeichnung von Gegenständen, Namen, Titeln oder Orten. Besonders erfolgreich war man bei der Entzifferung von Zahlzeichen. Diese Zahlzeichen geben uns einen Einblick in die den damaligen Aufzeichnungen zugrunde liegenden arithmetischen Zusammenhänge. Weil die arithmetischen Gesetze – damals wie heute – immer die gleichen sind, halfen oftmals einfache mathematische Überlegungen an einigen »Schlüsseltexten«, um zu wertvollen Einsichten zu gelangen.

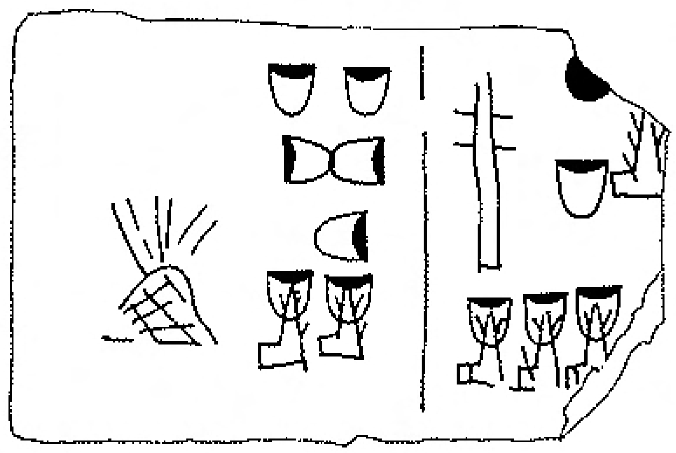
Einen dieser Texte und seine Entschlüsselung wollen wir mit dem nun folgenden Problem vorstellen.

Problem

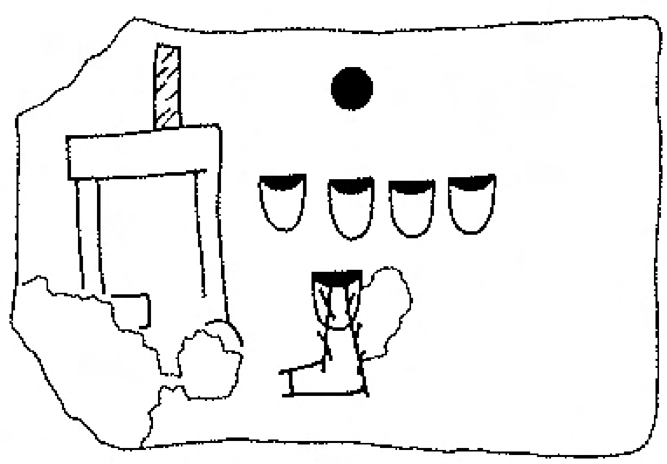
1

Eines der Zahlzeichensysteme ist uns nur durch eine kleine Gruppe von 26 Texten bekannt, deren Inhalt wir bislang kaum verstehen. Glücklicherweise jedoch enthält einer dieser Texte eine Addition, die weitreichende arithmetische Schlußfolgerungen zuläßt, so daß wir wenigstens die meisten der Größenbeziehungen des Zahlzeichensystems kennen.

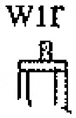
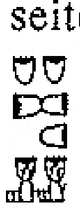
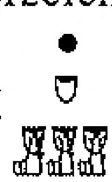
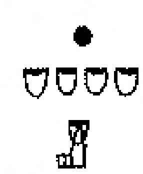
Bild 79
Der Archaische Text ATU Nr. 311



Vorderseite

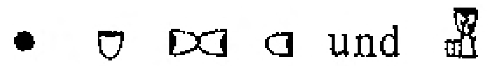


Rückseite

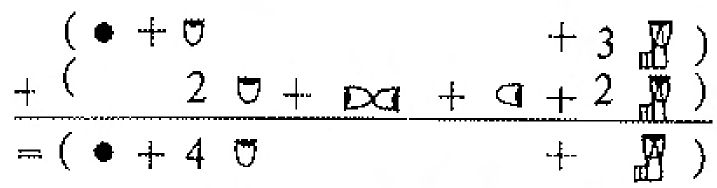
Der Text (vgl. Bild 79) enthält auf der Vorderseite zwei »Fächer« mit jeweils einer Zahlnotation und einem Schriftzeichen. Die Schriftzeichen ( und ) stellen vermutlich Titel dar. Auf der Rückseite ist zunehmend mit einem Schriftzeichen, dessen Bedeutung wir nicht kennen, da es nur in diesem einzigen Text vorkommt (), die Summe der beiden Zahlnotationen der Vorderseite verzeichnet. Das heißt, die beiden Zahlnotationen  und  ergeben miteinander addiert die Zahlnotation 

Dies ist die entscheidende Information des Textes, die es ermöglicht, einige der Größenbeziehungen des Systems zu bestimmen.

Die Zahlnotationen des Textes enthalten fünf verschiedene Zahlzeichen, nämlich die Zeichen

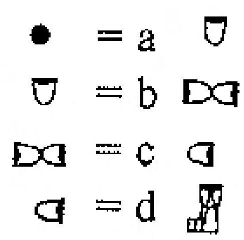


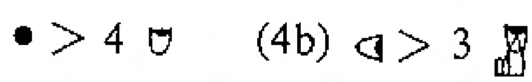
Die Addition liefert für diese fünf Unbekannten die Gleichung (1). Wir wissen ferner, daß Zahlzeichen mit höheren Werten stets über denjenigen mit niederen Werten stehen, so daß wir aus den Zahlnotationen die Größenabfolge (2) erschließen können. Weiterhin wissen wir, daß in der Regel ein Zahlzeichen mit einem höheren Wert eine bestimmte Anzahl Zeichen mit dem nächstniedrigen Wert repräsentiert, so daß es ein ganzzahliges Vielfaches dieses Zeichens darstellt (3). Schließlich können wir zwei weitere Ungleichungen (4a) und (4b) aus der Tatsache erschließen, daß das Zeichen viermal und das Zeichen dreimal wiederholt wird, so daß das Zeichen • mindestens den fünffachen Wert des Zeichens beziehungsweise das Zeichen mindestens den vierfachen Wert des Zeichens repräsentiert. Unser Zahlenrätsel besteht demnach aus den folgenden Gleichungen und Ungleichungen:

(1) 

(2) 

(3) Es gibt a, b, c, d $\in \mathbb{N} - \{1\}$, so daß gilt:



(4a) / (4b) 

Und nun Ihre Aufgabe:

Welche Größenbeziehungen zwischen den fünf Zeichen lassen sich aus diesen Bedingungen erschließen?

(Mit freundlicher Genehmigung der Zeitschrift »mathematik-lehren«, Heft 20, Febr. 1987, Erhard Friedrich Verlag Seelze, und des Autors Peter Damerow, Berlin.)

Ein kleiner Kurs in Keilschrift

Das sumerisch-babylonische Zahlensystem kannte zwei Zahlenzeichen: den senkrecht stehenden Keil  für die Eins und den nach rechts offenen Winkel  für die Zehn. Mit diesen beiden Zeichen wurden die Zahlen 1 bis 59 additiv niedergeschrieben. Die Zeichen wurden mit Hilfe von zwei Griffeln verschiedenen Querschnitts, die man schräg oder senkrecht in den weichen Ton eindrückte, geschrieben. Für die Eins gibt es noch die Darstellung  oder  und für die Zehn das Zeichen  oder  (s. Bild 80).

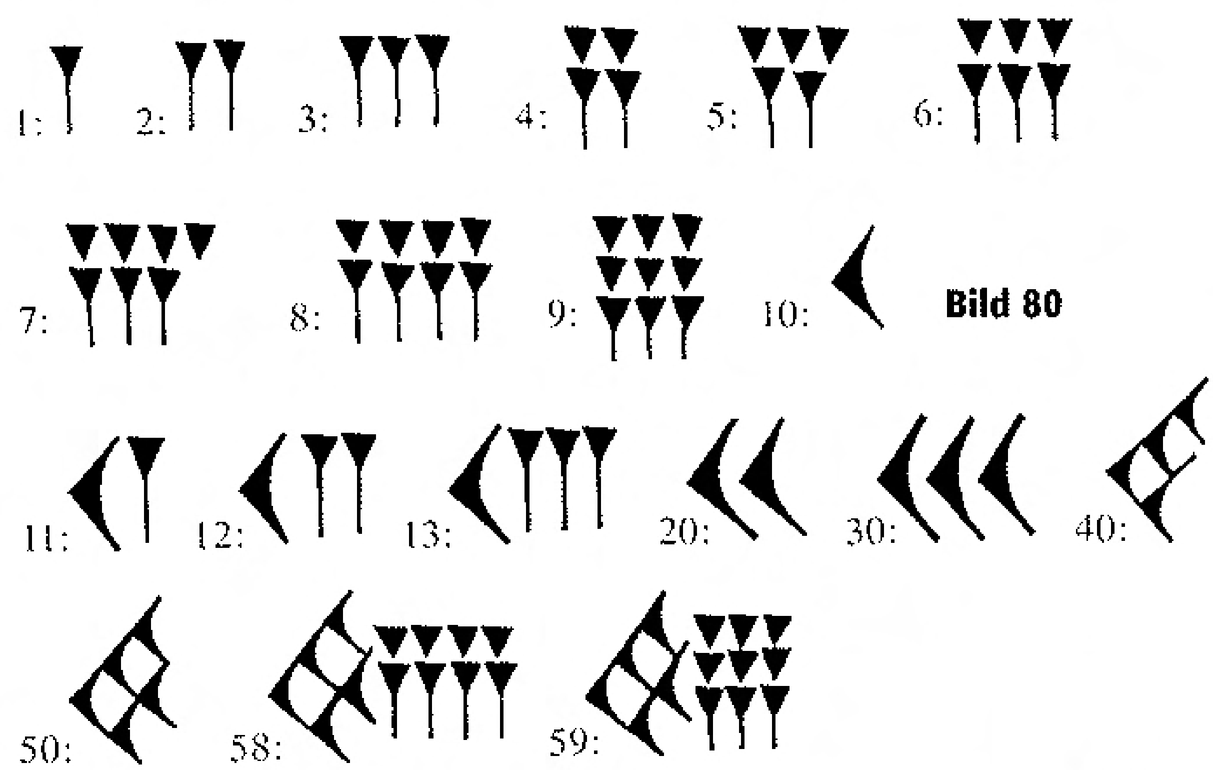


Bild 80

Das Zahlensystem war ein Stellenwertsystem mit der Basis 60 (Sexagesimalsystem). Man begann die Notierung einer Zahl links mit dem höchsten Stellenwert. Ein Zeichen für die Null gab es damals nicht. Zum Darstellen dieser Zahlen sind 60 Zahlzeichen erforderlich. Wählt man dafür die in Klammern gesetzten dekadischen Bezeichnungen für die Ziffernwerte, also (0), (1), (2), ... (57), (58), (59), so erhält man z. B. für die Zahl 52 365 die Schreibweise $52\,365 = (14) \cdot 60^2 + (32) \cdot 60^1 + (45) \cdot 60^0 = (14)(32)(45)$.

Weitere Beispiele sind

$$271 = 4 \cdot 60 + 31 = (4)(31) \qquad 665 = (11)(5)$$
$$1\,990 = (33)(10) \qquad 27^2 = (12)(9).$$

Bild 81 zeigt das Ergebnis in Keilschrift.

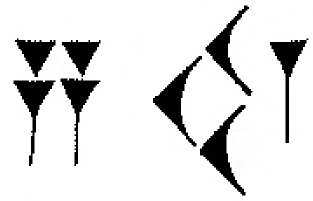
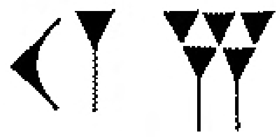
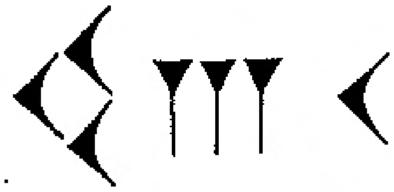
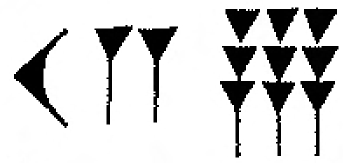
271: 

Bild 81

665: 

1990: 

$27^2 =$ 

Heute verwendet man als Schreibweise im Sexagesimalsystem oft Kommas und ein Semikolon. Letzteres entspricht dem Komma im Dezimalsystem. Die Zahl 1 658,25 im Dezimalsystem schreibt man dann im Sexagesimalsystem folgendermaßen:

$$1\,658{,}25 = (27)\cdot 60^1 + (38)\cdot 60^0 + (15)\cdot 60^{-1}$$
$$1\,658{,}25 = 27{,}38;\,15.$$

Umgekehrt erhält man z. B. für 15,7,23;3 im Sexagesimalsystem

$$15{,}7{,}23;3 = 15\cdot 60^2 + 7\cdot 60^1 + 23\cdot 60^0 + 3\cdot 60^{-1}$$
$$15{,}7{,}23;3 = 54\,000 + 420 + 23 + 0{,}05$$
$$= 54\,443{,}05 \text{ im Dezimalsystem.}$$

Diese Schreibweise wird in den folgenden Aufgaben an entsprechender Stelle verwendet.

Aus dem Zusammenhang mußte man in alten Aufzeichnungen oft erkennen, ob es sich (s. Bild 82) um $13\cdot 60^1 + 21$, $13\cdot 60^0 + 21\cdot 60^{-1}$ oder $13\cdot 60^2 + 21\cdot 60^1$ handelt.

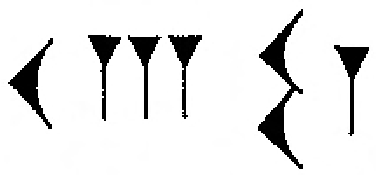


Bild 82

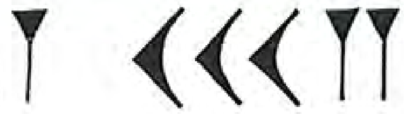
Als Restbestand des babylonischen Sexagesimalsystems hat sich bis heute die Unterteilung des vollen Winkels in 360 Grad zu je 60 Minuten mit je 60 Sekunden sowie die Einteilung der Stunde in 60 Minuten mit je 60 Sekunden erhalten. Ebenso ist die Verbindung zu 1 Seemeile $= \frac{1}{60}$ Breitengrad, 1 Jahr $= \frac{60}{5}$ Monate $= 12$ Monate und 1 Schock $= 60$ Stück zu erkennen.

2

a) Schreiben Sie die folgenden Sexagesimalzahlen im dekadischen System (s. Bild 84)!

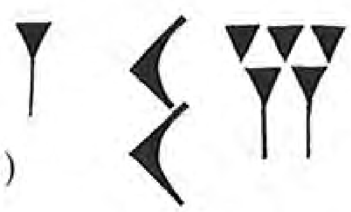
Bild 83
Rollsiegel (Gipsabguß). Das Bild zeigt die Abrollung eines Rollsiegels des Ur-Sîn, Sohn des Lu-Nanna aus Uruk mit Keilschriftzeichen (Neusumerische Zeit, ca. 2100–1950 v. u. Z.)
Mit freundlicher Genehmigung des Deutschen Archäologischen Instituts, Abteilung Bagdad, Berlin
Foto: Werner Reinhold, Leipzig

Rollsiegel wurden im 3. Jahrtausend in Mesopotamien eingeführt und dienten als wichtige Kontrolle bei der Aufbewahrung und Verteilung von Waren. Mit ihrer Hilfe überprüfte man die Vollständigkeit von Gütern und Behältnissen oder die Unversehrtheit von Warenlagern. Ein über den Verschluß von Gefäßen oder Kästen oder über die Verriegelung eines Raumes gelegter Tonklumpen wurde gesiegelt und vereinfachte so die Überprüfung. Später verwendete man Siegel als Sachzeugen von Rechtsgeschäften, insbesondere bei Käufen und Darlehen usw. Auf den dabei ausgestellten Urkunden rollten die Vertragspartner und die anwesenden Zeugen ihre Siegel ab.

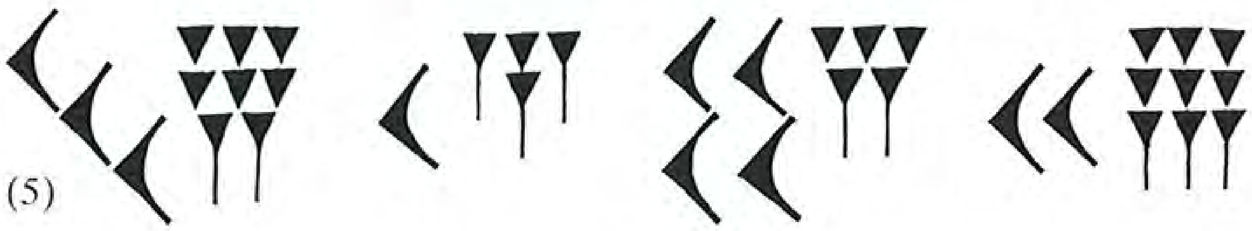
(1) 

(2) 

Bild 84

(3) 

(4) 

(5) 

b) Übertragen Sie die folgenden Dezimalzahlen in das Sexagesimalsystem, und zeichnen Sie in Keilschrift (6) 90; (7) 115; (8) 700; (9) 1010; (10) 800 000!

3

Der Mathematiker Kurt Vogel, München, stellte 1959 in seinem Buch »Vorgriechische Mathematik« (Teil II) u. a. einen altbabylonischen Text vor, der dem folgenden Gleichungssystem entspricht:

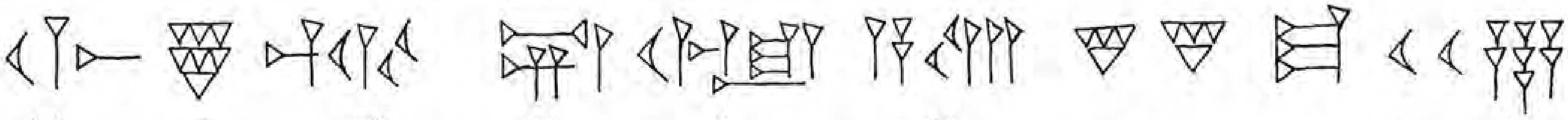
(1) $\frac{x}{7} + xy = 27$ (sexagesimal)

(2) $y = 0;30.$

$0;30 = 30 \cdot 60^{-1} = 0{,}5$ (dezimal)

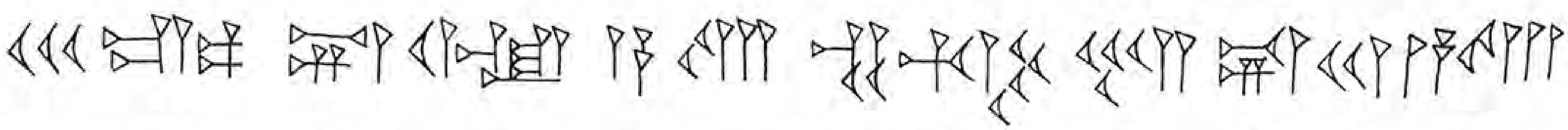
Die fachwissenschaftliche Bearbeitung ergibt folgendes Bild:

$\frac{x}{7} + xy = 27 \quad y = 0;30$



igi 7 gál	uš	ù	a-šá	gar-gar-	ma	27
$\frac{1}{7}$	Länge (= x)	und	Fläche (= xy)	addiert	und so (ist es)	27
sebi'at	šiddim	ù	eqlam	akmur	-ma	
ein Siebentel	(der) Länge	und	(die) Fläche	ich habe addiert		27

Bild 85



30	sag	uš	ù	a-šà	en-nam	42	uš	21	a-šà
0;30	Breite · Länge (= y)		und	Fläche	was?	42	Länge	21	Fläche
30	pūtum	šiddum	ù	eqlum	minum	42	šiddum	21	eqlum
0,30	(ist die) Breite	Länge	und	Fläche	was (ist es)?	42	(ist) die Länge	21	(ist) die Fläche

Unter dem Keilschrifttext ist der Text in sumerischer und in deutscher Sprache angefügt.

Die quadratischen Gleichungen der Babylonier

Berechnen Sie x und y in der oben gebotenen Gleichung!

4

Aus einer Vielzahl der auf Tontäfelchen gefundenen formalen Texte bieten wir eine Auswahl. In der Aufgabe sind die Zahlen im Sexagesimalsystem angegeben. Die entsprechenden Zahlenwerte im Dezimalsystem findet der Leser am Anfang jeder Lösung.

Erst im Jahre 1930 wurde von den Mathematikern H. S. Schuster und O. Neugebauer die erstaunliche Entdeckung gemacht, daß die Babylonier quadratische Gleichungen kannten.

a) Berlin (VAT 8 520,1)

(1) $xy = 1$

(2) $x - \frac{1}{13}(x+y) \cdot 6 = 0;30$

Bild 86

Unser Bild zeigt das Tal des mittleren Euphrat bei Lidar.
Mit freundlicher Genehmigung der Freien Universität Berlin, Seminar für Vorderasiatische Altertumskunde
Foto: H. Kühne, Berlin

Bild 87

Die älteste Bibliothek der Menschheit entstand vor fast 4000 Jahren im Land der Sumerer. Sie bestand aus mehr als 2000 Schrifttafeln, die wichtige Gesetze, dazu Märchen, Sagen, Lieder und auch wissenschaftliche Texte enthielten. Unser Bild zeigt – als Rekonstruktionszeichnung – ein Tafelregal aus dem Königspalast in Ebla (um 2500 v. u. Z.).

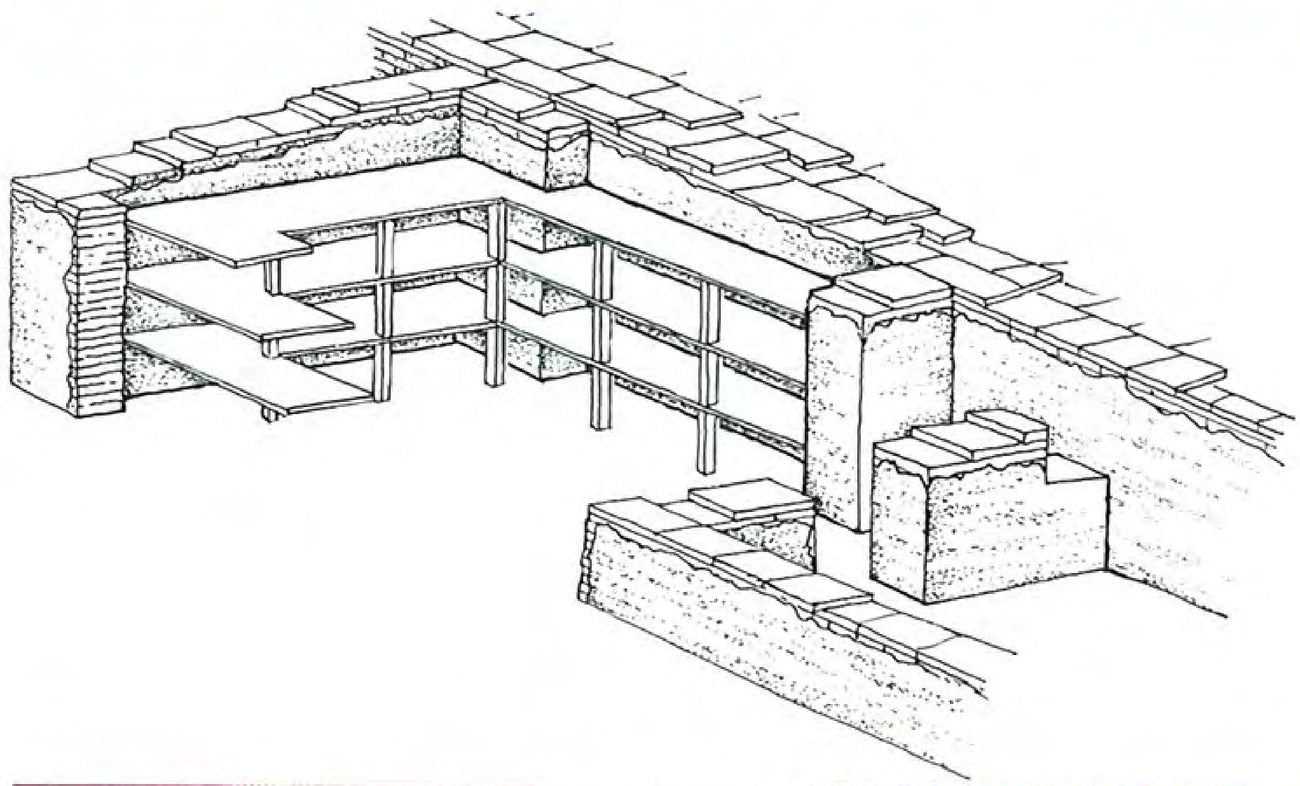


Bild 88

Ausgrabungsfeld in Tell Schech Hamad am Chabur. Fund eines Archivs.
Mit freundlicher Genehmigung der Freien Universität Berlin, Seminar für Vorderasiatische Altertumskunde

b) Strasbourg (SKT 363,3)
(1) $x^2 + y^2 = 52{,}5$
(2) $x = z + 20$
(3) $y = 0;40z + 5$

c) London (BM 13901,2)
$x^2 - x = 14{,}30$

d) London (13901,17)
(1) $x^2 + y^2 + z^2 = 10{,}12;45$
(2) $y = \frac{x}{7}$
(3) $z = \frac{y}{7}$

e) New Haven (YBC 6504,1)
(1) $xy - (x - y)^2 = 8{,}20$
(2) $x - y = 10$

Rechnen Sie!

5

In den folgenden Aufgaben sind die Zahlen im Dezimalsystem angegeben.

a) (1) $x \cdot y = 60$
(2) $x - y = 7$

b) (1) $x + y = \frac{13}{2}$
(2) $x \cdot y = \frac{15}{2}$

c) (1) $xy + x - y = 183$
(2) $x + y = 27$

d) (1) $x^2 + y^2 = 1\,300$
(2) $x - y = 10$

e) (1) $x + y = xy$
(2) $x + y + xy = 9$

f) Welches n genügt der Gleichung $n^2 + n^3 = 1\,452$?

g) $x^2 - \frac{2}{3}x = \frac{7}{12}$

h) In der »Asiatic Collection« des Orientalischen Instituts der Universität Chicago liegt unter der Nr. 24 194 die folgende anspruchsvolle Aufgabe – als Ausgangspunkt für weitere gleicher Art:

$$(1)\quad x + \left(\left[\left[\left\{\frac{5}{4}[x + (x - y)] + 6\right\}\frac{1}{8} + 15\right]\frac{1}{11} + x\right)\frac{1}{8} = 34$$

$$(2)\qquad xy = 600.$$

Bei gewissenhafter Arbeit gelangt man – ebenso wie die Babylonier vor rund 4 000 Jahren – zur Lösung $x = 30$ und $y = 20$.

Rechnen Sie!

6

Oft lösten die Babylonier quadratische Gleichungen (auch kubische Gleichungen) mit Hilfe einer Tabelle:

x \ N	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	5	6	7	8	9	10
3	10	11	12	13	14	15
4	17	18	19	20	21	22
5	26	27	28	29	30	31

Für das Lösen der Gleichung $x^2 + 6 = 5x$ bedeutet dies: Das um 6 vermehrte Quadrat der Eingabe x muß mit dem Fünffachen der Eingabe übereinstimmen. Im vorliegenden Beispiel also

$2^2 + 6 = 10 = 5 \cdot 2$ und
$3^2 + 6 = 15 = 5 \cdot 3$ bzw. $x_1 = 2$ und $x_2 = 3$.

Die Gleichung $x^2 + 4 = 5x$ ist mit Hilfe der angeführten Tabelle zu lösen.

Geometrische Probleme bei den Babyloniern

7

Der anspruchsvolle Text AO 8 862,3, im Louvre zu Paris aufbewahrt, lautet: »Länge, Breite. Ich habe Länge und Breite multipliziert und so eine Fläche gebildet. Zweitens habe ich das, was die Länge über die Breite hinausgeht, mit der Summe aus Länge und meiner Breite multipliziert; ich habe (es) zu meiner Fläche addiert; es ist 1,13,20. Schließlich habe ich Länge und Breite addiert; es ist 1,40.«

Berechnen Sie Länge und Breite!

Verwenden Sie das von den Babyloniern aufgestellte Gleichungssystem!

	sexagesimal	dezimal
(1)	$xy + (x-y)(x+y) = 1{,}13{,}20$	$xy + (x-y)(x+y) = 4\,400$
(2)	$x + y = 1{,}40$	$x + y = 100$

(*Anmerkung:* Es war damals nicht immer üblich, die Maßeinheit anzugeben. Diese ergibt sich in jedem Fall aus dem Zusammenhang. Hier und in einigen der folgenden Aufgaben wird deshalb auch darauf verzichtet.)

8

In New Haven (USA) wird das altbabylonische Täfelchen Nr. YBC 7 289 aufbewahrt (s. Bild 89). Es wird in Bild 90 eine Um-

Bild 89

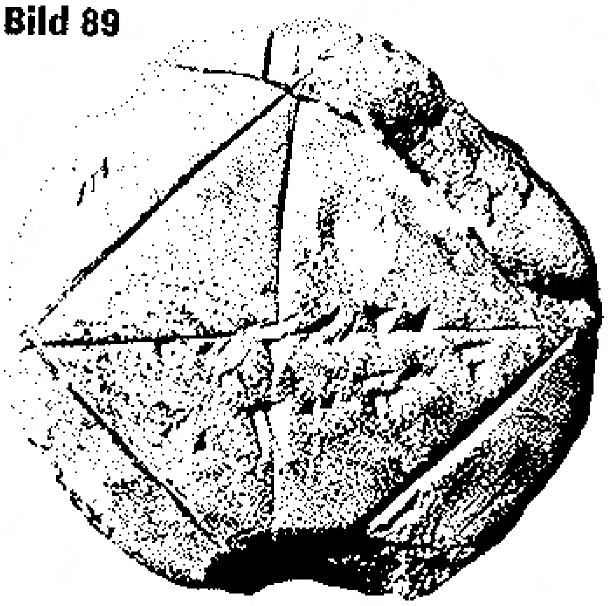


Bild 90

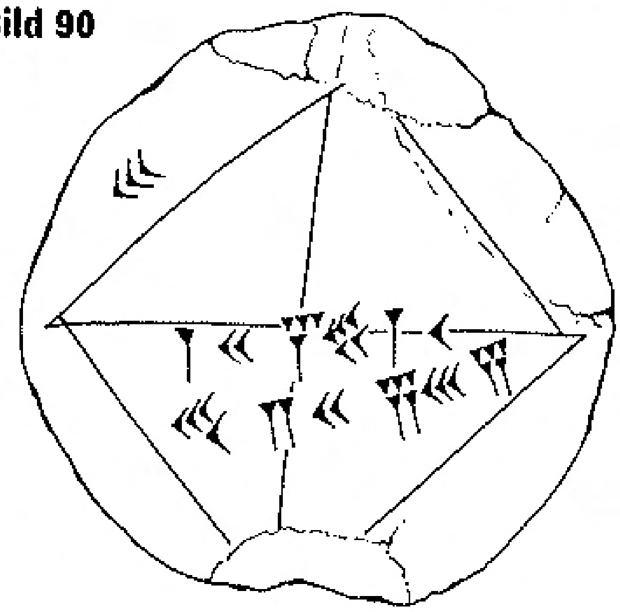
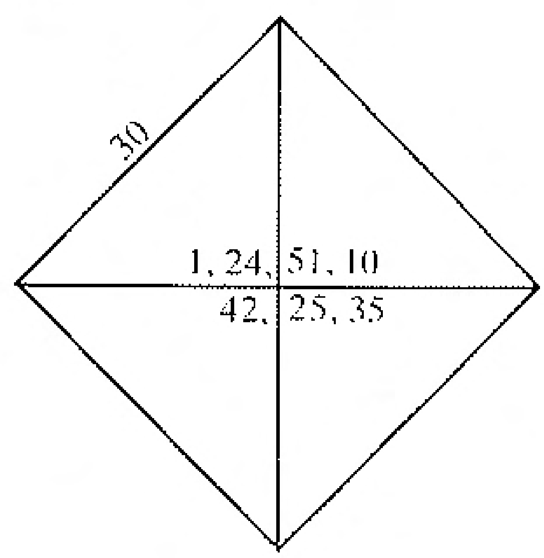


Bild 91



zeichnung in Schwarzweiß gezeigt, und im Bild 91 sind die Keilschriftzeichen in indisch-arabische Zahlzeichen übertragen. Wir erkennen die Seite des Quadrates mit $a = 30$, den Wert für $\sqrt{2}$ mit 1;24,51,10 und den Wert für den Durchmesser $d = a\sqrt{2}$ mit 42;25,35.

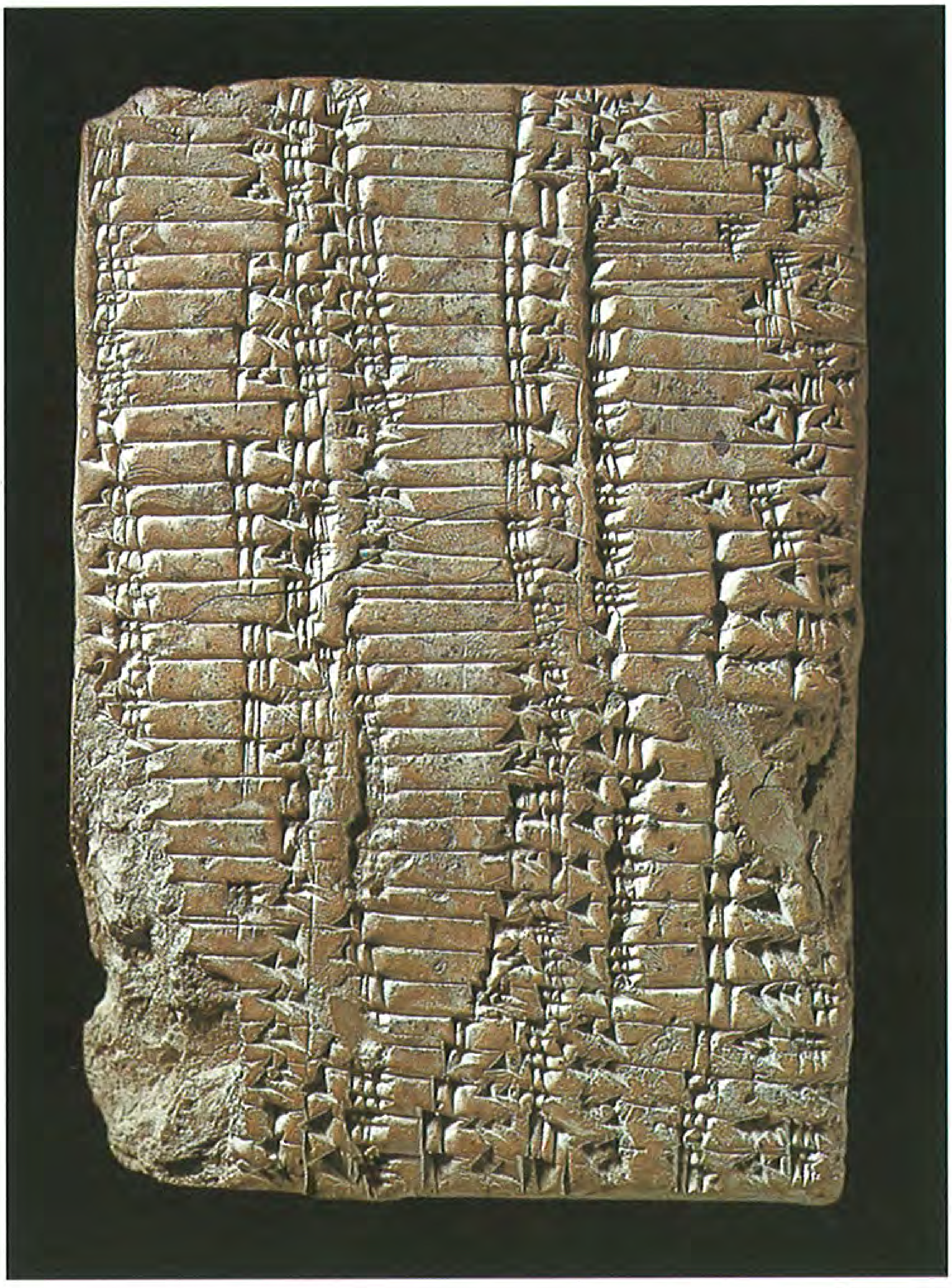


Bild 92
Vorderseite einer Tontafel mit Zahlenreihen, aus Nippur
Mit freundlicher Genehmigung der Hilprecht-Sammlung der Universität Jena
Foto: G. Schörlitz, Jena

Welchem Zahlenwert entsprechen die babylonischen Zahlenangaben in Bild 90 in unserem Dezimalsystem? Die Genauigkeit, mit der die Babylonier den Wert für $\sqrt{2}$ errechnet haben, erkennt man, wenn man diesen mit dem Wert auf dem Taschenrechner vergleicht.

Bild 93
Rückseite der Tontafel aus Nippur

9

Für Quadratwurzeln, die keine vollständigen Quadrate (d. h. keine Quadratzahlen) sind, verwendeten die Babylonier die Formel

$$\sqrt{N = \sqrt{a^2 + r} \approx a + \frac{r}{2a}},$$

wobei a^2 ein vollständiges Quadrat ist. Dazu dient die folgende geometrische Erläuterung (s. Bild 94).

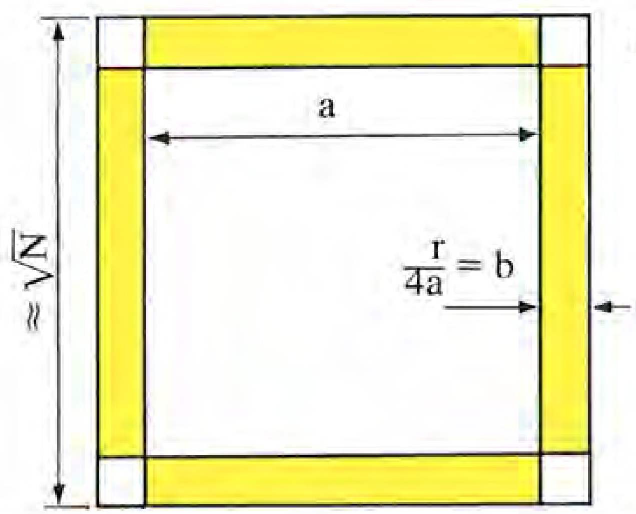


Bild 94

$N^2 \approx a^2 + r$. Nun ist $r \approx 4ab$ und demzufolge $b \approx \frac{r}{4a}$. Weiterhin ist $\sqrt{N} = a + 2b$ und schließlich $\sqrt{N} \approx a + \frac{r}{2a}$.

Berechnen Sie nach dieser Formel

a) $\sqrt{10}$ und

b) $\sqrt{27}$!

Vergleichen Sie das Resultat mit dem Ergebnis auf Ihrem Taschenrechner!

10

Das Bild 95 zeigt eine Tontafel mit pythagoreischen Zahlentripeln. Es ist der Keilschrifttext mit der Katalognummer 332 der »Plimpton-Sammlung« der Columbia-Universität New York (aus der Zeit um 1900 bis 1600 v. u. Z.; 22,7 cm × 8,8 cm). Prof. Jöran Friberg, Göteborg, einer der führenden Erforscher babylonischer Mathematik, veröffentlichte dazu 1981 eine Transliteration. Umgeschrieben wurde der Tafeltext in indisch-arabische Ziffern von dem Münch-

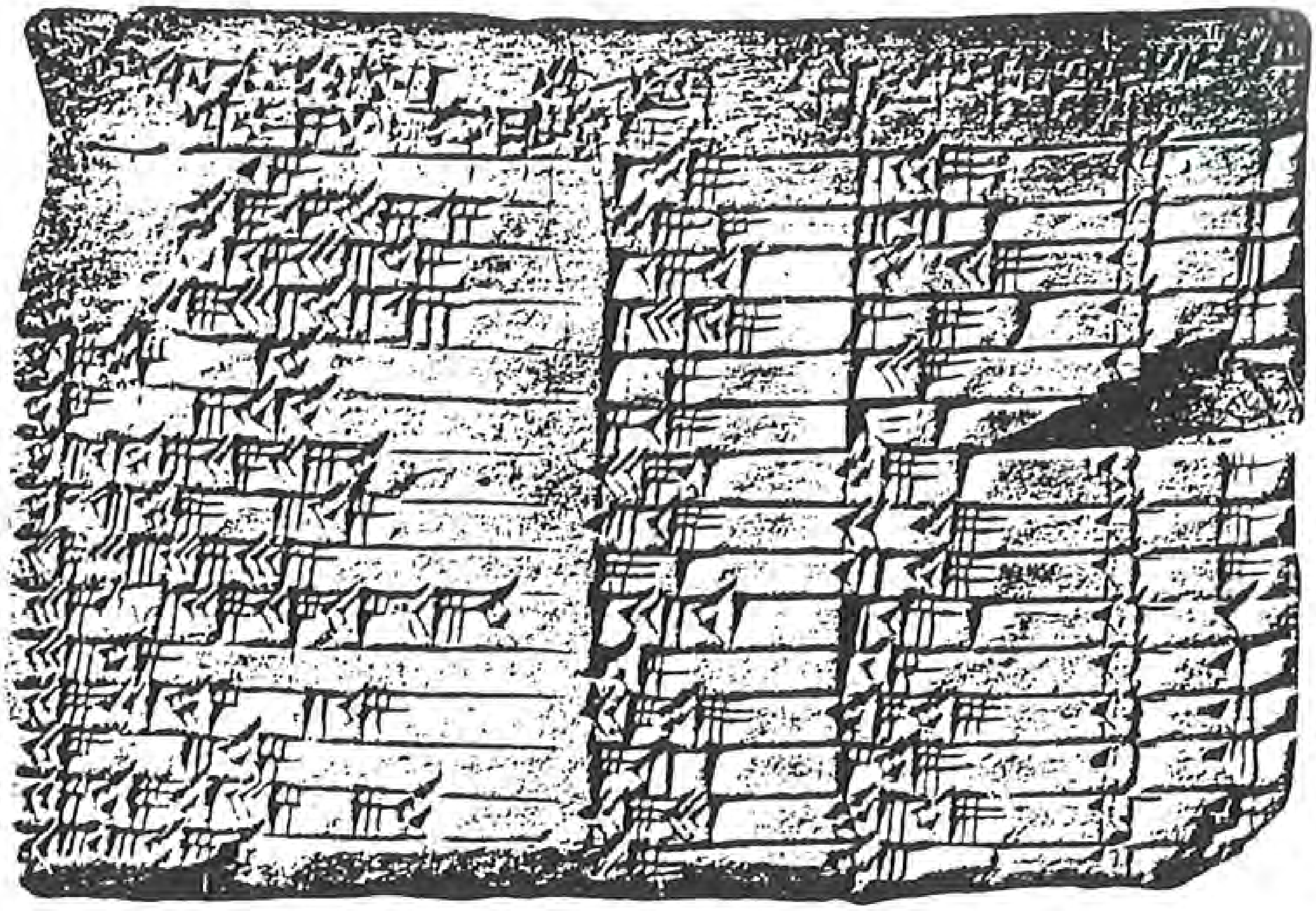


Bild 95
Tontafel Nr. 332 der »Plimpton-Sammlung« der Columbia-Universität New York

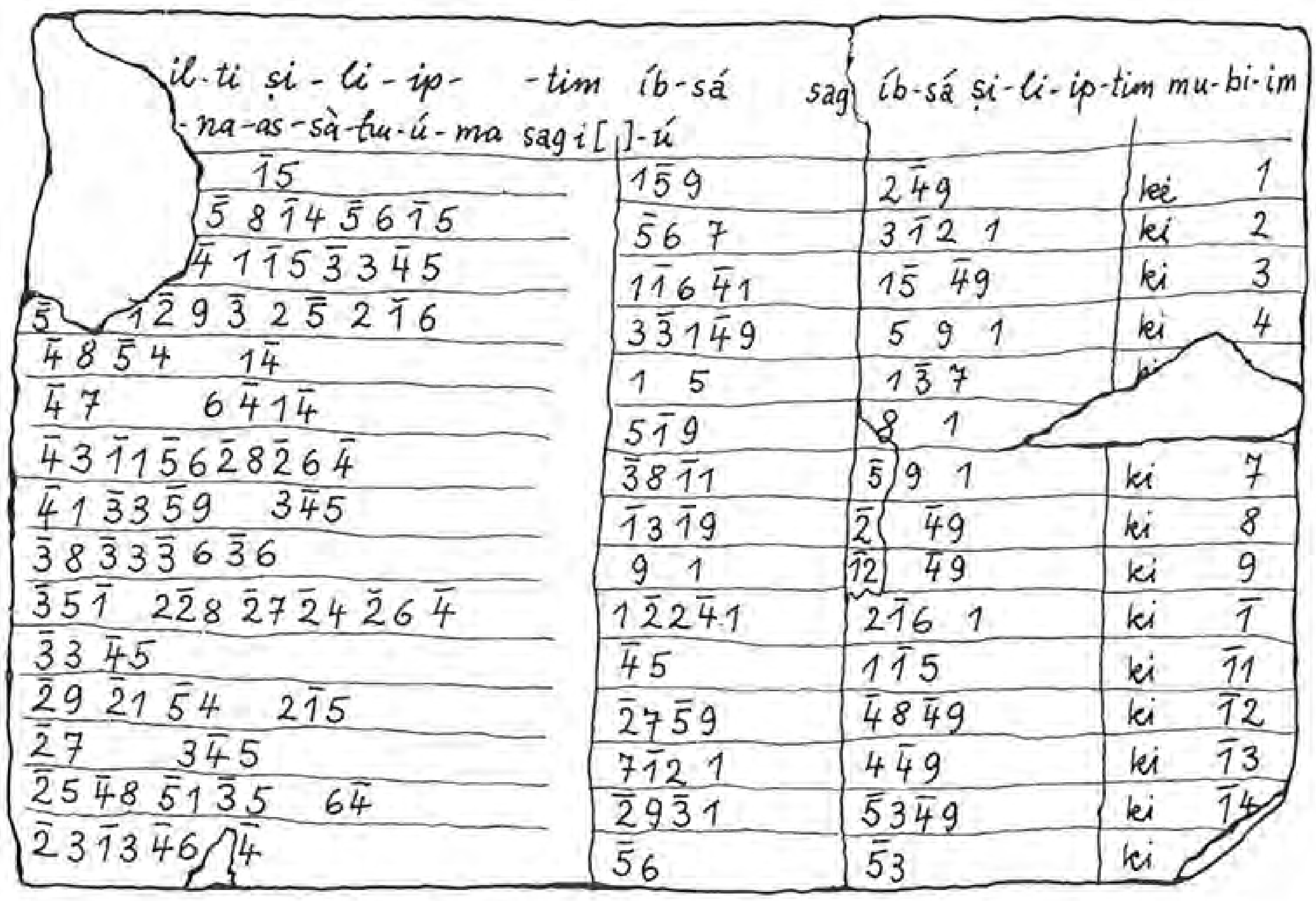


Bild 96
Transliteration der Tontafel, umgeschrieben in arabische Ziffern

ner Mathematikprofessor Kurt Vogel, München 1959 (s. Tabelle 1). Die Spalten links sowie ganz rechts, d.h. die im Text fehlende Kathete *a*, sind nachgetragen.

Für den Leser wurde die Tabelle umgesetzt (s. Tabelle 2) und eine Aufgabe formuliert:

a	b	d
120	119	169
3 456	3 367	4 825
4 800	4 601	6 649
13 500	12 709	18 541
72	65	97
360	319	481
2 700	2 291	3 541
960	799	1 249
600	481	769
6 480	4 961	8 161
60	45	75
2 400	1 679	2 929
240	161	285
2 700	1 771	3 229
45	28	53

Tabelle 2

Zeile	$\frac{b^2}{a^2}$	b	d	Nummer	a
3	[59,0,]15	1,59	2,49	1	2,0
4	[56,56,]58,14,50,6,15	56,7	1,20,25	2	57,36
5	[55,7,]41,15,33,45	1,16,41	1,50,49	3	1,20,0
6	53,10,29,32,52,16	3,31,49	5,9,1	4	3,45,0
7	48,54,1,40	1,5	1,37	5	1,12
8	47,6,41,40	5,19	8,1	6	6,0
9	43,11,56,28,26,40	38,11	59,1	7	45,0
10	41,33,45,14,3,45	13,19	20,49	8	16,0
11	38,33,36,36	8,1	12,49	9	10,0
12	35,10,2,28,27,24,26,40	1,22,41	2,16,1	10	1,48,0
13	33,45	45	1,15	11	1,0
14	29,21,54,2,15	27,59	48,49	12	40,0
15	27,0,3,45	2,41	4,49	13	4,0
16	25,48,51,35,6,40	29,31	53,49	14	45,0
17	23,13,46,4[0]	28	53	15	45

Tabelle 1

Die angeführten Zahlen a, b, d erfüllen die Gleichung $a^2 + b^2 = d^2$. Ein solches Zahlentripel (a, b, d) nennt man ein »Pythagoreisches Zahlentripel«. Ohne Beweisführung soll nun erläutert werden, wie sich weitere pythagoreische Zahlentripel finden lassen.

Es gilt

$$a = x^2 - y^2,\ b = 2xy \text{ und}$$
$$d = x^2 + y^2, \text{ wobei } x > y$$

und x und y positive ganze Zahlen sind.
Dann ist $a^2 + b^2 = d^2$.
Beispiel: $x = 7$, $y = 4$.
Dann ist $a = x^2 - y^2 = 49 - 16 = 33$, $b = 2xy = 2 \cdot 7 \cdot 4 = 56$ und $d = x^2 + y^2 = 49 + 16 = 65$.
Demzufolge ist

$$a^2 + b^2 = d^2,$$
$$33^2 + 56^2 = 65^2,$$
$$1\,089 + 3\,136 = 4\,225.$$

Welche pythagoreischen Zahlentripel (a, b, d) lassen sich für $b = 360$ finden?

11

»Es ist eine Mauer von der Höhe $h_1 = 10$ und der Breite $b = 1$ gegeben, auf der eine hölzerne Stange von der Länge $h_2 = 1$ steht (s. Bild 97).

Es wird gefragt, wie weit man sich vom Fuß der Mauer entfernen muß, damit man die Spitze der Stange sehen kann.«

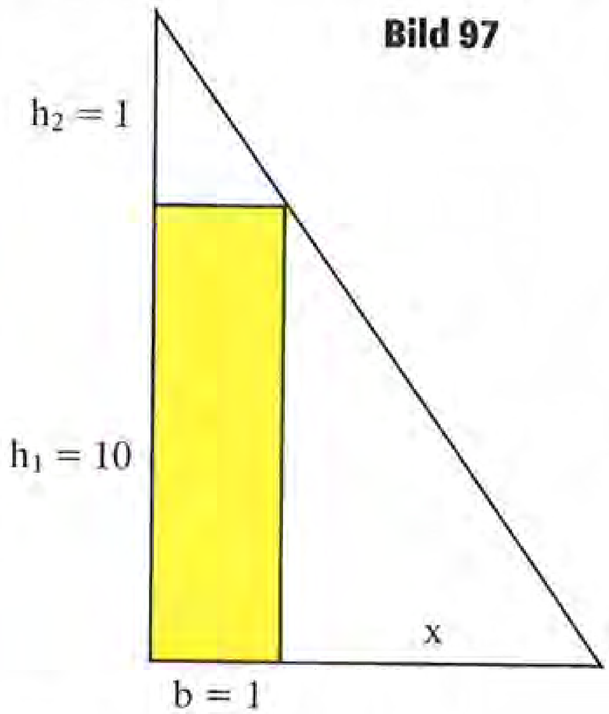


Bild 97

12

Originalfassung:

»Ich fand einen Stein; ich habe ihn nicht gewogen. Ich habe $\frac{1}{7}$ und $\frac{1}{11}$ addiert, er wog eine Mine.« (1 Mine = 60 Gin; 1 Gin = 180 Še)

In moderner Schreibweise: Ich habe einen Körper mit unbekannter Masse. Wenn ich zur Masse des Körpers $\frac{1}{7}$ dieser Masse und dann $\frac{1}{11}$ dieser Summe addiere, beträgt die Summe der Masse 1 Mine.

Welche Masse hat der Stein?

13

Aus der Seleukidenzeit (um 250 v. u. Z.) liegt im Louvre in Paris ein Text, der eine geometrische Reihe beinhaltet.

Es heißt dort kurz: »Steige von 1 bis 10 mit 2 auf.«

Gemeint ist die Reihe $1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^9$. Die dazu angegebene Rechenvorschrift lautet:

»Du sollst addieren und findest 8,32 ($= 8 \cdot 60 + 32 = 512$), subtrahiere 1, gibt 8,31 ($= 8 \cdot 60 + 31 = 511$), addiere 8,31 zu 8,32 und es ist 17,3 ($= 17 \cdot 60 + 3$).«

Offenbar hatten die Babylonier für die Berechnung der Summe noch keine Formel. Wie berechnet man heute eine derartige Summe?

14

a) Gegeben sei ein Rechteck mit den Seiten $a = 4$ und $b = 3$.

Berechnen Sie die Diagonale mit Hilfe der Formel $d = \frac{a}{2} + b = \frac{b}{3} + a$!

b) Berechnen Sie d, wenn $d + a = 6$ und $d + b = 8$!

c) Man kennt in einem Rechteck $a + b + d = s$ und $A = ab$. Gegeben sei $s = 12$ und $A = 12$.

Berechnen Sie die Länge von d!

Bild 98
Rest der Burg von Samsat (Samosata) am Euphrat. Im Hintergrund das obermesopotamische Plateau
Mit freundlicher Genehmigung der Freien Universität Berlin, Seminar für Vorderasiatische Altertumskunde

15

Aus einem altbabylonischen Text aus Susa (18. oder 17. Jh. v. u. Z.):

»Die Breite eines Rechteckes sei $\frac{3}{4}$ der Länge, die Diagonale sei 40. Welches sind Länge und Breite?«

Der Text sagt: Setze 1 als Länge, 0;45 als Breite (Sexagesimalbruch). Dann folgt die Rechnung

$$\sqrt{1^2 + 0;45^2} = 1;15,$$

und die Länge wird durch

$$\frac{1}{1;15} \cdot 40 = 32$$

angegeben.

Berechnen Sie die gestellte Aufgabe mit Hilfe einer Gleichung!

16

Die Diagonale eines (rechteckigen) Tores mit den Seiten $a = 40$ und $b = 10$ berechneten die Babylonier auch mit der Formel

$$d = \sqrt{a^2 + b^2} \approx a + \frac{b^2}{2a}.$$

a) Berechnen Sie d mit Hilfe dieses Näherungsverfahrens!

b) Rechnen Sie mit heutigen Mitteln, und vergleichen Sie!

17

In einem Text aus Tell Driba's, einer Vorstadt von Bagdad (um 1700 v. u. Z.), findet sich folgende Aufgabe:

Berechnen Sie die Seiten eines Rechtecks mit der Fläche 45 und der Diagonale 75! (Die gebotenen Zahlenangaben für A und d führen zu einem praxisfremden Ergebnis. Die von einem Schreiber seinen Schülern gestellte Aufgabe diente vor allem der Übung im Lösen von Gleichungen.)

18

Eine Aufgabe aus Susa aus altbabylonischer Zeit (1700 v. u. Z.):

»(1) $\frac{1}{4}$ Breite + Länge = 7 Handbreiten,

(2) Länge + Breite = 10 Handbreiten.«
(1 Handbreite = 5 Finger)

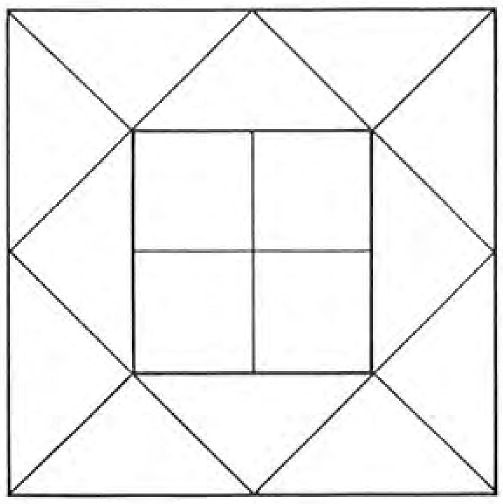
In moderner Fassung: Addiert man $\frac{1}{4}$ der Breite eines Rechtecks zu seiner Länge, so erhält man 7 Handbreiten. Die Summe von Länge und Breite ist 10 Handbreiten.

a) Wie viele Handbreiten beträgt die Länge, wie viele die Breite?

b) Wie viele Finger sind das jeweils?

19

Bild 99



Ein Quadrat mit der Seitenlänge a ist in 12 kongruente Dreiecke und vier kongruente Quadrate geteilt (s. Bild 99).

Gesucht sind die Flächeninhalte von Dreieck und Quadrat.

20

Man berechne die Diagonale d in einem gleichschenkligen Trapez (s. Bild 100) mit den Schenkeln a und den Parallelseiten b und c. Ohne Verwendung der Trigonometrie rechneten die Babylonier:

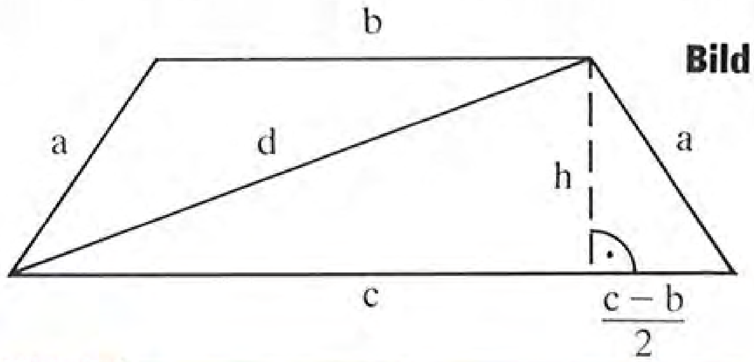


Bild 100

Bild 101
Schöpfrad am Ufer des Tigris
Foto: W. Wallwitz, Jena

Bild 102
Luftbild von der ausgegrabenen Grundfläche eines der Türme des alten Babylon
Mit freundlicher Genehmigung des Ministeriums für Information, Bagdad

$$h^2 = a^2 - \left(\frac{c-b}{2}\right)^2 \quad \text{und} \quad d^2 = h^2 + \left(c - \frac{c-b}{2}\right)^2, \quad \text{also}$$

$$d^2 = a^2 + bc.$$

Berechnen Sie die Länge der Diagonale nach diesem Prinzip, wenn $a = 5;\ b = 2;\ c = 8$!

21

Ein rechtwinkliges Trapez $ABCD$ wurde durch eine zur Grundseite $\overline{AB}$ parallele Strecke $\overline{EF}$ der Länge $y = 52\frac{1}{2}$ in zwei Trapeze $ABFE$ und $EFCD$ mit den Flächeninhalten $A_1 = 2\,531\frac{1}{4}$ und $A_2 = 843\frac{3}{4}$ unterteilt. Für das Verhältnis der beiden Abschnitte $\overline{AE}$ und $\overline{ED}$ des zur Grundseite $\overline{AB}$ senkrechten Schenkels $\overline{AD}$ gilt dabei $\overline{AE}:\overline{ED} = 5:1$.

Es sind die Längen der beiden Schenkelabschnitte $\overline{AE}$ und $\overline{ED}$ zu berechnen (s. Bild 103).

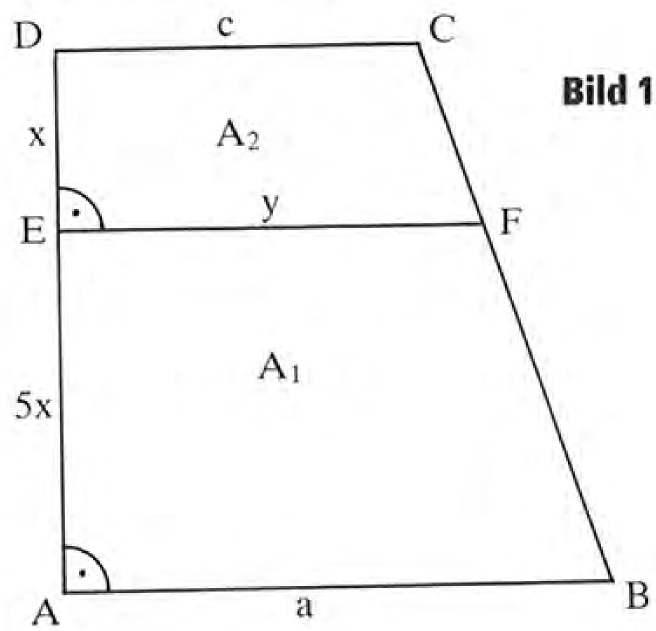
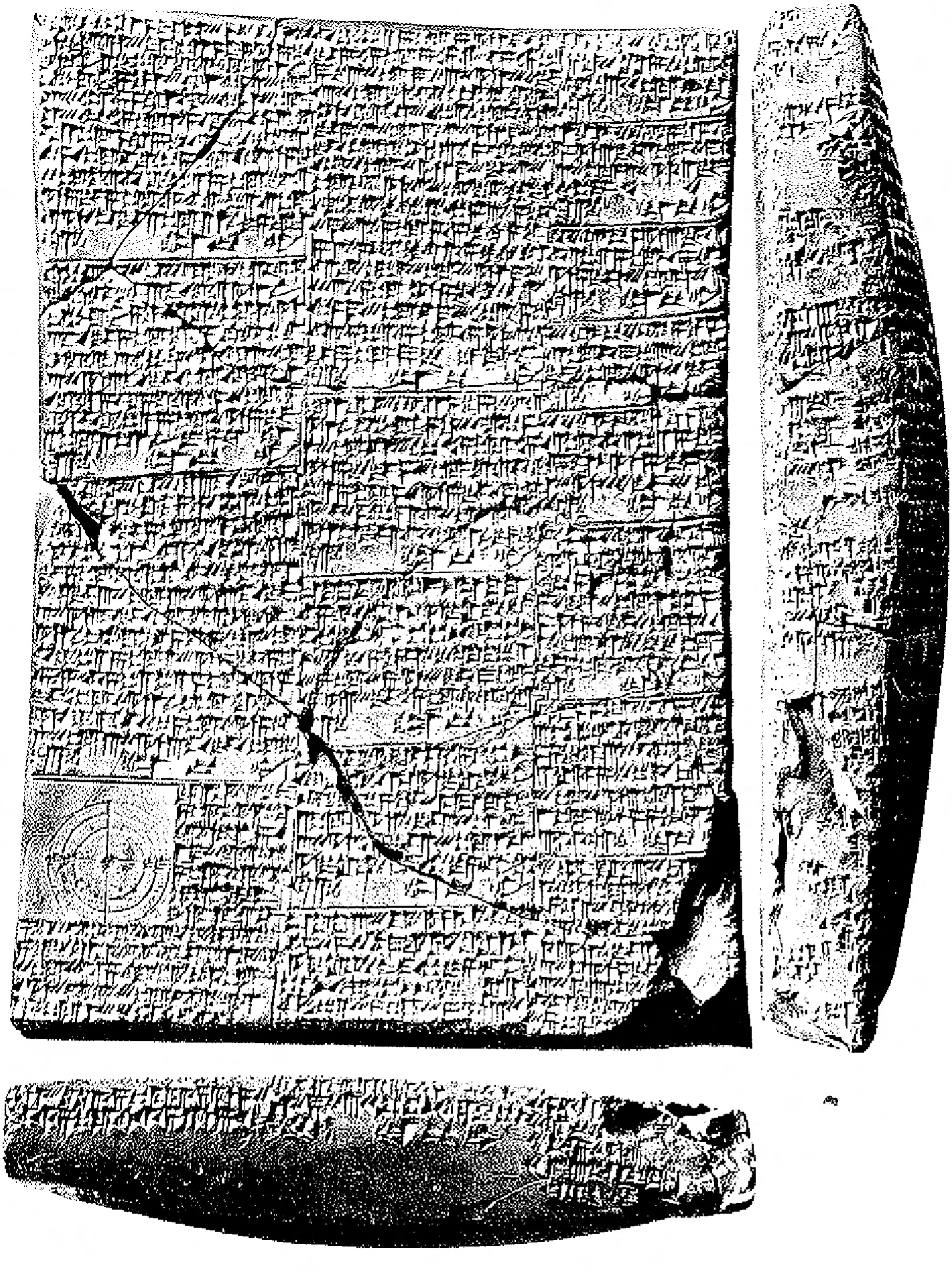


Bild 103

22

Der gut erhaltene mathematische Keilschrifttext BM 85 194, aufbewahrt im Britischen Museum zu London, enthält 16 Aufgaben – durch Striche unterteilt – wie die Berechnung von Dämmen, Tempelfundamenten, Wassergräben und Brunnenziegeln. Links unten im Bild 104 wird die Breite der Grabensohle eines ringförmigen Walls mit trapezförmigem Querschnitt berechnet. Die berühmte, so gut erhaltene Tontafel wird daher »Ringwall« genannt.



Gegeben sei ein Trapez $ABCD$ mit $\overline{AB} \| \overline{CD}$, das durch die Strecke $\overline{EF}$ in zwei Parallelstreifen zerlegt wird. Wir setzen $\overline{CD} = b_1$, $\overline{EF} = b_2$, $\overline{AB} = b_3$, $\overline{BF} = l_2$, $\overline{CF} = l_1$ und bezeichnen mit A_1 die Fläche des Trapezes $EFCD$ und mit A_2 die Fläche des Trapezes $ABFE$ (s. Bild 105).

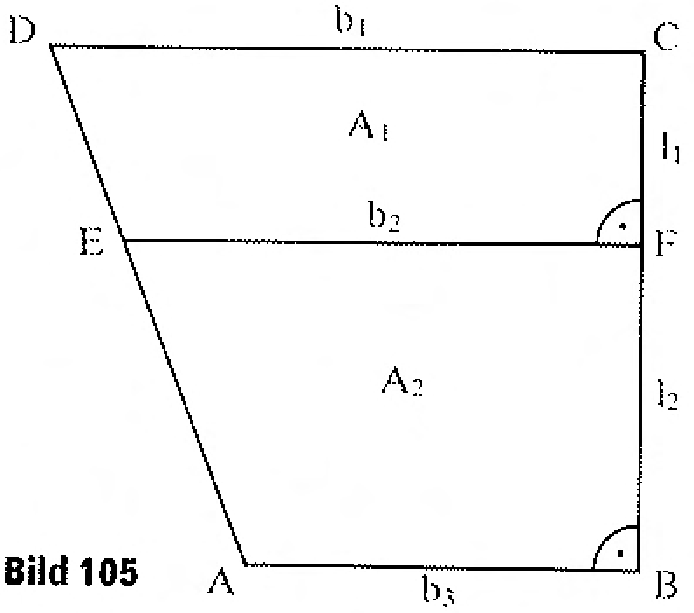


Bild 105

Gegeben sind: A_1, A_2, $l_1 : l_2 = a$, $b_1 - b_3 = c$.
Gesucht sind: b_1, b_2, b_3, l_1, l_2.

23

Die folgende Aufgabe zeigt einmal mehr, mit welch anspruchsvollen Problemen sich die Babylonier befaßten. Sie war als Lehr- und Übungsbeispiel gedacht $\left(\text{mit } a = 1 \text{ und } b = 138\frac{8}{9}\right)$, kann also nicht als konkretes praktisches Beispiel betrachtet werden.

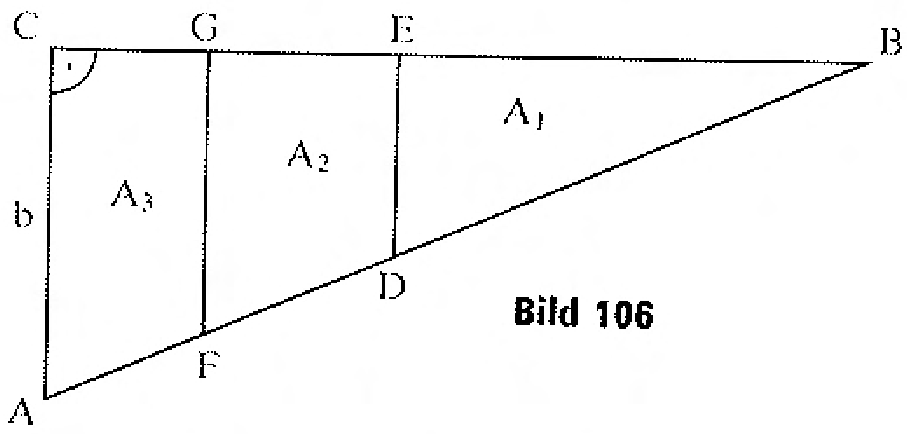


Bild 106

In moderner Fassung lautet die Aufgabe: Ein Stück Land in Form eines rechtwinkligen Dreiecks ABC, dessen Katheten $\overline{BC}$ und $\overline{AC}$ die Längen a und b haben, soll unter drei Brüdern zu gleichen

Bild 104
Der Keilschrifttext BM 85194.
Er enthält eine Reihe mit dem Bauwesen zusammenhängender thematischer Probleme, wie die Berechnung von Tempelfundamenten, Wassergräben, Dämmen. In der linken unteren Ecke ist ein ringförmiger Wall mit trapezförmigem Querschnitt dargestellt.
Mit freundlicher Genehmigung des Britischen Museums, London

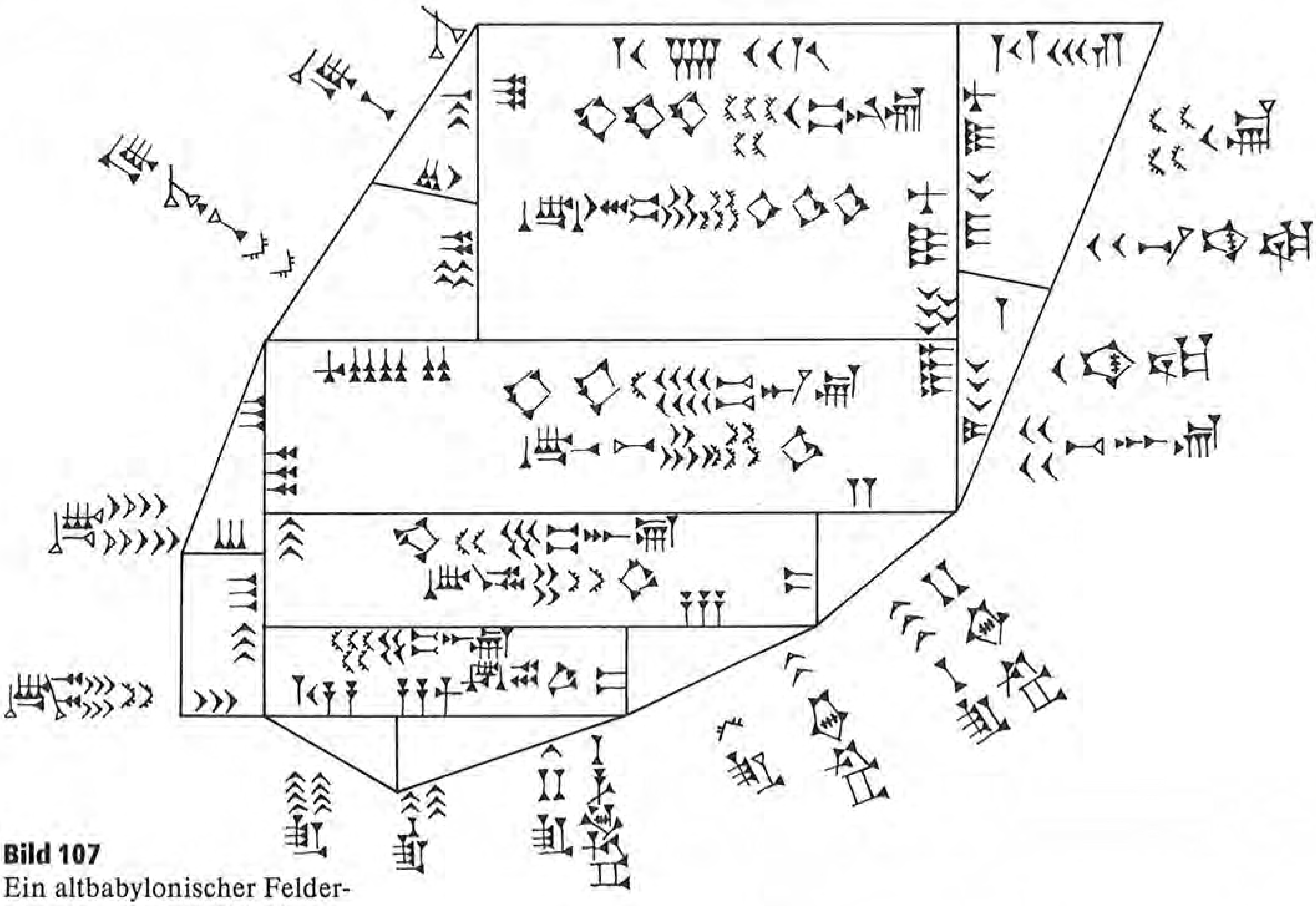


Bild 107
Ein altbabylonischer Felderplan aus der Zeit Ibi-Sins (um 1900 v. u. Z.). Er zeigt, wie man ein unregelmäßiges Feld in Rechtecke, Dreiecke und Trapeze zerlegt, um seine Fläche berechnen zu können.

Bodenanteilen so aufgeteilt werden, daß ein rechtwinkliges Dreieck *DBE* und zwei rechtwinklige Trapeze *FDEG* und *AFGC* entstehen.

Es sind die Längen x, y, z der Strecken $\overline{EB}$, $\overline{GE}$, $\overline{CG}$ durch die Länge a der Kathete $\overline{BC}$ auszudrücken (s. Bild 106).

24

Die Summe der Flächen zweier Äcker, auf denen zusammen 1 100 Scheffel Getreide geerntet wurden, beträgt 30.

Es ist die Fläche jedes Ackers zu bestimmen, wenn bekannt ist, daß auf 30 (Flächeneinheiten) des ersten Ackers 1 200 Scheffel und auf 30 (Flächeneinheiten) des zweiten Ackers 900 Scheffel Getreide geerntet wurden.

25

Gegeben sei ein gleichschenkliges Dreieck *ABC* mit der Grundlinie 60 und den Schenkeln 50.

a) Konstruieren Sie den Umkreis des Dreiecks!

b) Berechnen Sie die Länge des Umkreisradius!

26

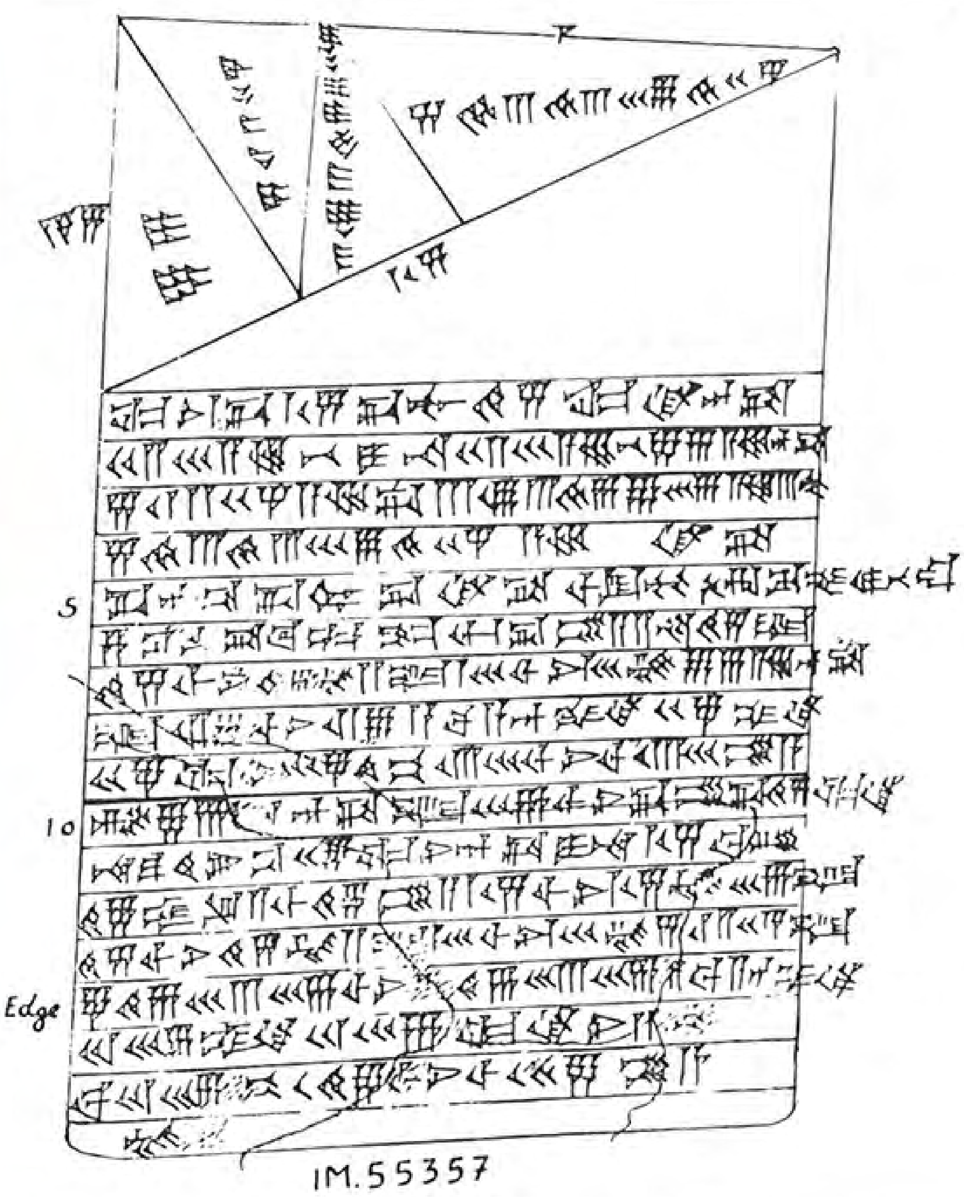
In einem rechtwinkligen Dreieck mit der Fläche 3 000 Sar ist eine Parallele von 40 Gar Länge zur kleineren Kathete gezogen. Ihr Abstand von dieser Kathete beträgt $33\frac{1}{3}$ Gar.

Berechnen Sie die Längen der beiden Katheten!

(Hinweis: 1 Sar = 1 Gar^2. Gar war eine Längeneinheit. Die daraus abgeleitete Flächeneinheit hatte einen eigenen Namen, nämlich Sar.)

27

Unser Bild 108 zeigt den im Irak-Museum in Bagdad (IM 55 375) verwahrten Text, veröffentlicht erst im Jahre 1950.



Bilder 108/109
Schrifttafel aus gebranntem Ton, altbabylonisch, frühes 2. Jt. v. u. Z., Fundort Tell Harmal, Höhe 10 cm
Mit freundlicher Genehmigung des Ministeriums für Information, Bagdad

Die zur Zeichnung (Bild 109/110) gestellte Aufgabe lautet:

In einem rechtwinkligen Dreieck ABC ist die Höhe $\overline{BD}$ gezogen, dazu $\overline{DE} \perp \overline{BC}$ und $\overline{EF} \perp \overline{AB}$. Gegeben und in der Zeichnung eingetragen sind $a_1 = 60$ (»Länge«), $b_1 = 45$ (»obere Breite«) und die Hypotenuse $c_1 = 75$ (»lange Länge«). Gefragt wird nach der »oberen«, der »abgeschnittenen« und der »unteren Länge« sowie nach der »Senkrechten«. (Dabei ist unklar, welche Senkrechte gemeint ist.)

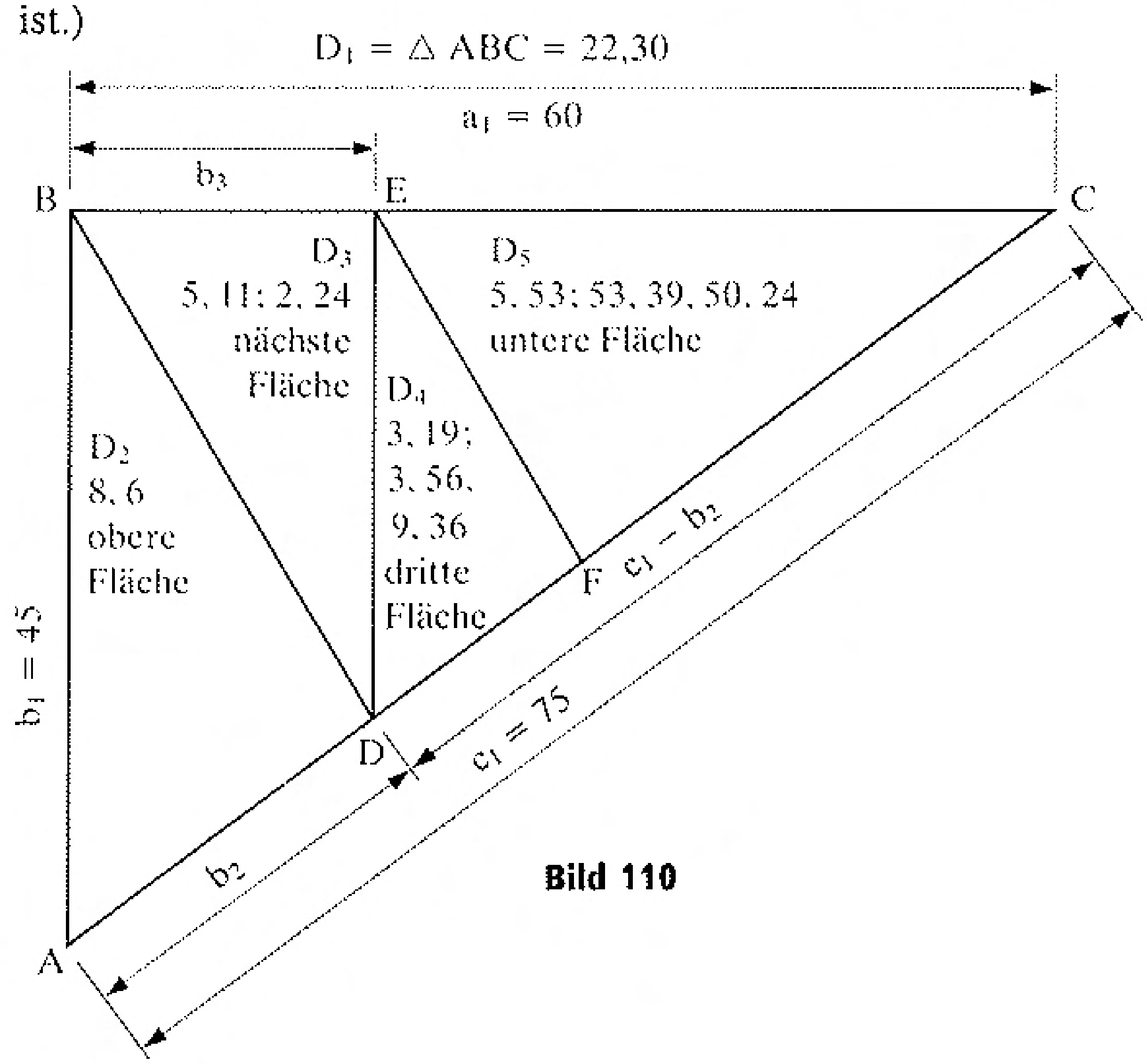


Bild 110

Es sind noch gegeben bzw. in die Figur eingeschrieben die Fläche $D_1 = 22{,}30$, die Fläche $D_2 = 8{,}6$, die Fläche $D_3 = 5{,}11;2{,}24$, die Fläche $D_4 = 3{,}19;3{,}56{,}9{,}36$ und die Fläche $D_5 = 5{,}53;53{,}39{,}50{,}24$. (Alle Maßzahlen sind in sexagesimaler Schreibweise entsprechend dem babylonischen Zahlensystem angegeben.)

Zuerst wird die Breite b_2 des Dreiecks ACD berechnet. Dabei wird die Rechenvorschrift

$$b_2 = \sqrt{\frac{1}{a_1} \cdot b_1 \cdot 2 \cdot D_2}$$

angegeben.

Da die gesamte Berechnung auf Beweise verzichtet, auch mitten im Rechengang abbricht, soll hier nicht weiter darauf eingegangen werden.

a) Beweisen Sie die Richtigkeit der obengenannten Rechenvorschrift!

b) Prüfen Sie nach, ob die Summe der Flächeninhalte

$D_2 + D_3 + D_4 + D_5$

gleich der Fläche D_1 ist!

Rechnen Sie in die dezimale Schreibweise um!

28

Gerechte Teilung eines Dreiecks unter zwei Brüdern: Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit der Hypotenuse $\overline{AB}$, das durch eine parallele Strecke $\overline{DE} = x$ zur Kathete $\overline{AB} = b = 30$ so geteilt werden soll, daß $A_1 - A_2 = 420$ und $h_2 - h_1 = 20$ gilt, wobei A_1 der Flächeninhalt und h_1 die Höhe des rechtwinkligen Trapezes $CAED$, A_2 der Flächeninhalt und h_2 die Kathete $\overline{BD}$ des rechtwinkligen Dreiecks EBD sind (s. Bild 111).

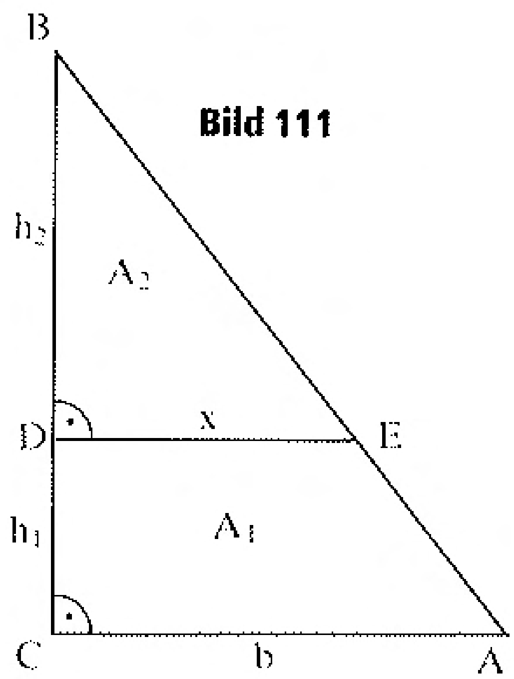


Bild 111

29

Rund um die Zahl π:

(1) Als Maß für den Umfang eines Kreises verwendeten die Babylonier im 2. Jahrtausend v. u. Z. den Umfang eines in den Kreis einbeschriebenen regelmäßigen Sechsecks.

(2) In Ägypten war man (fast zu gleicher Zeit) der Ansicht, daß die Fläche eines Kreises mit der Fläche eines Quadrates übereinstimmt, dessen Seite 8/9 des Durchmessers des Kreises beträgt.

(3) Der Grieche Archimedes fand, daß sich die Fläche eines Kreises zum Quadrat seines Durchmessers wie 11:14 verhält.

a) Welche Näherungswerte für π würden sich in (1), (2) bzw. (3) ergeben?

b) Vergleichen Sie diese Werte mit dem des Taschenrechners für π!

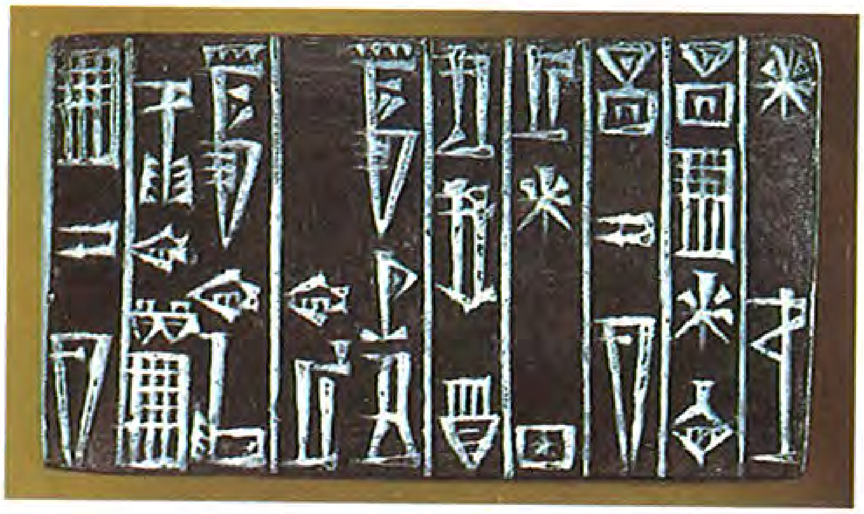


Bild 112
Steininschrift des Königs Ur-Nammu von Ur. (Höhe 12,2 cm, um 2040 v. u. Z., Gipsabguß, als Souvenir im Vorderasiatischen Museum der Staatlichen Museen zu Berlin käuflich erwerbbar). Der Keilschrifttext berichtet vom Bau des Tempels der Göttin Irisin.
Foto: Werner Reinhold, Leipzig

Bild 113
Uruk: Irigal. Ištar-Tempel aus hellenistischer Zeit. Ausgrabungsarbeiten an einem Durchgang.
Mit freundlicher Genehmigung des Deutschen Archäologischen Instituts, Abteilung Bagdad, Berlin

Aus dem babylonischen Alltag

30

Auf einer Tontafel befindet sich die Aufgabe, das Volumen eines Kegelstumpfes zu berechnen. Bis heute hat sich diese »Faustregel« noch erhalten. Sie lautet:

$$V \approx \frac{\pi h}{2}(r_1^2 + r_2^2).$$

Der so berechnete Wert ist stets größer als der genaue Wert von V.

Zeigen Sie das, wenn $h = 8$ cm, $r_1 = 5$ cm und $r_2 = 3$ cm ist!

31

Das Bild 114 zeigt die Seitenansicht eines Belagerungsdammes mit folgenden Maßen:

Bereits erreichte Dammhöhe $h = 36$; Mauerhöhe $m = 45$; die Fläche des Dreiecks ABC beträgt $A_D = 900$.

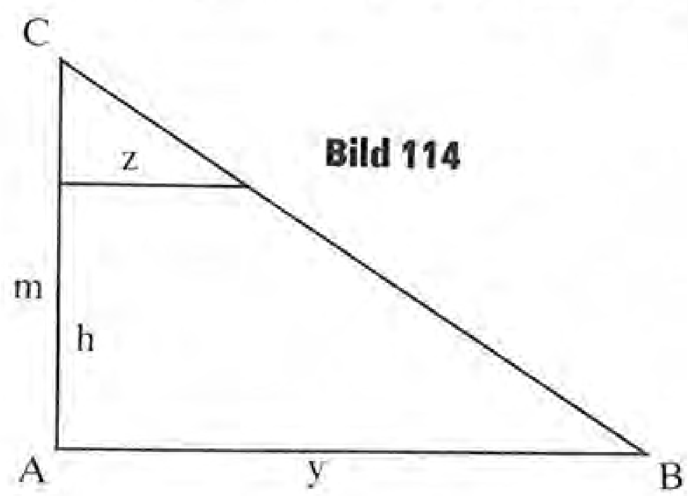


Bild 114

a) Berechnen Sie die Länge des Dammes (y) und

b) die Länge des noch »einzustampfenden Stückes« (z)!

32

Berechnung des Arbeitslohnes. Das Beispiel stammt aus einem babylonischen Text, aufbewahrt in New Haven (USA), der 31 gleichartige Aufgaben enthält: Es soll eine quaderförmige Grube ausgehoben werden. Die Maße sind: Länge $a = 5$ Gar; Breite $b = 1\frac{1}{2}$ Gar; Tiefe $c = \frac{1}{2}$ Gar. Die tägliche Arbeitsnorm eines Arbeiters beträgt 24 Kubikellen. Der tägliche Arbeitslohn eines Arbeiters ist 6 Še Silber. (1 Gar = 12 Ellen; 180 Še = 1 Schekel; 1 Še ca. 47 mg). Gefragt ist

a) die Grundfläche der Grube (in Quadratellen),

b) das Volumen der Grube (in Kubikellen),

c) die Anzahl der Tagewerke, die das Ausheben der Grube erfordert,

d) der für das Ausheben der Grube erforderliche gesamte Arbeitslohn.

33

Die Babylonier benutzten u. a. folgende Längen- und Raummaße:

Längenmaße: 1 Elle $\approx$ 0,5 m; 1 Gar = 12 Ellen $\approx$ 6 m,

Flächenmaße: 1 Gar^2 = 1 Sar = 144 Quadratellen $\approx 36\ \text{m}^2$,

Raummaße: 1 (Raum)Sar = 1 Gar^2Ellen = 144 Kubikellen $\approx 18\ \text{m}^3$.

Ein quaderförmiger Damm von 6 Ellen Höhe wird in 9 Tagen von 30 Arbeitern errichtet. Dabei beträgt die tägliche Arbeitsnorm für einen Arbeiter $\frac{1}{6}$ (Raum)Sar $\approx 3\ \text{m}^3$.

Berechnen Sie die Länge und Breite des Dammes in Gar, wenn Länge und Breite zusammen $6\frac{1}{2}$ Gar sind!

34

Im Vorderasiatischen Museum in Berlin ist der Text VAT 7528 aufbewahrt. Er lautet:

»Ein kleiner Kanal. 6 Gis seine Länge.

2 Ellen obere Weite, 1 Elle untere Weite.

$1\frac{1}{2}$ Ellen seine Tiefe. $\frac{1}{3}$ Sar Erde die Leistung.

18 Leute. Die Tage sind was?

---

11 Tage (und) ein 4-tel (sind) die Tage.«

Text aus heutiger Sicht: Es soll ein kleiner Kanal ausgehoben werden. Seine Länge beträgt 6 Gis, die Breite an der Kanalsohle 1 Elle, die Breite an der Oberkante 2 Ellen, die Tiefe $1\frac{1}{2}$ Ellen.

Wenn ein Arbeiter an einem Tag $\frac{1}{3}$ (Raum)Sar aushebt, wie lange dauert die Arbeit, wenn dafür 18 Arbeiter eingesetzt werden können?

(1 Elle $\approx$ 0,5 m; 1 Gis $\approx$ 720 Ellen $\approx$ 360 m; 1 (Raum)Sar $\approx$ 18 m^3)

35

Eine Aufgabe aus der Seleukidenzeit (um 250 v. u. Z.) lautet: Es sei ein Rohr zuerst senkrecht an eine Mauer gelehnt, dann wird die Spitze um 3 Ellen gesenkt, so daß sich der Fuß des Rohres um 9 Ellen von der Mauer entfernt.

Fertigen Sie eine Skizze an, und berechnen Sie die Länge des Rohres!

36

Sehne und Segment: Der Umfang sei 60, der »Pfeil« 2 (s. Bild 115).

Bild 115

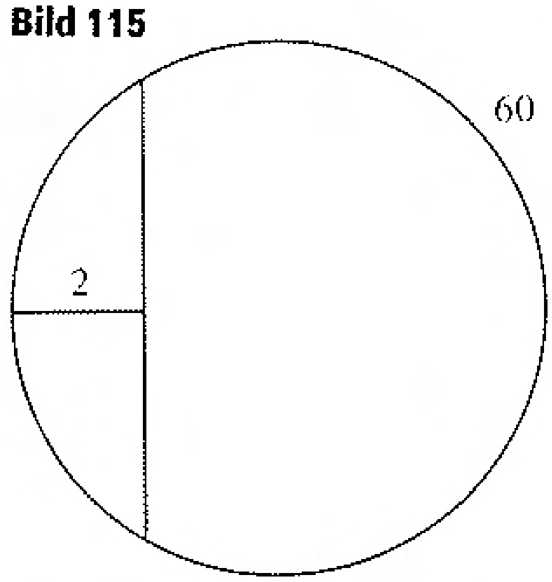
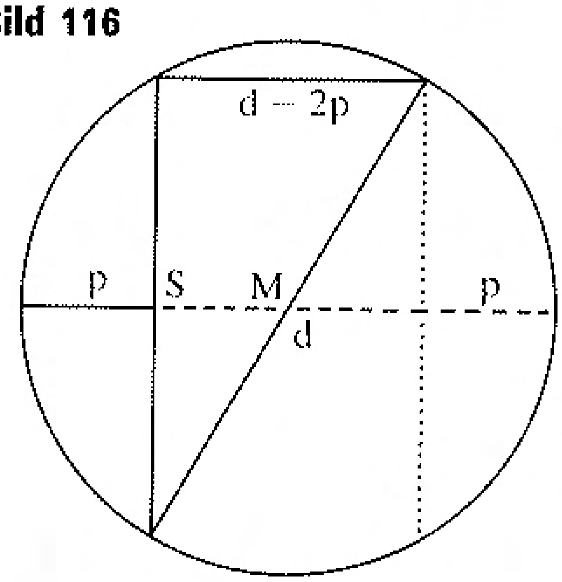


Bild 116



An der ergänzenden Figur (s. Bild 116) können wir die einzelnen Rechenschritte der Babylonier verfolgen.

$$d = 60 : \pi;\ d = 20;\ 2p = 4;\ d - 2p = 20 - 4 = 16;\ d^2 = 400;$$
$$\times (d-2p)^2 = 256;\ s = \sqrt{d^2 - (d-2p)^2} = \sqrt{144} = 12.$$

(Hierbei wird für $\pi = 3$ ein grober Näherungswert verwendet.)

Rechnen Sie mit heutigen Mitteln! Wie lang ist die Sehne?

37

Ganz- und Halbsteine: Zur Zeit Nebukadnezars II. von Babylon (gest. 562 v. u. Z.) wurden zum Bau von Mauerwerk vorwiegend

zwei verschiedene Größen von Mauersteinen verwendet. Es waren dies Ganzsteine und Halbsteine. Deren Abmessungen waren sinnvoll festgelegt. Ein Ganzstein hatte die Maße
$\frac{2}{3}$ Elle $\cdot \frac{2}{3}$ Elle $\cdot \frac{1}{6}$ Elle. Ein Halbstein hatte die Maße
$\frac{2}{3}$ Elle $\cdot \frac{1}{3}$ Elle $\cdot \frac{1}{6}$ Elle.

Diese Mauersteine wurden besonders für repräsentative Sichtflächen mit farbigen Glasuren versehen. Die Tonmasse für die Steine wurde in Holzformen gefüllt, durch Feststampfen verdichtet und

Bild 117
Ausgrabung zur Prozessionsstraße von Babylon
Mit freundlicher Genehmigung der Staatlichen Museen zu Berlin

Bild 118
Babylon, Zikkurat. Südwestseite des Kerns aus Lehmziegeln, der heute von einem mit Grundwasser gefüllten Graben umgeben ist. Dieser enthielt die Außenschale des Tempelturmes aus gebrannten Ziegeln, die im Laufe der Zeit zur Wiederverwendung geraubt wurden.
Mit freundlicher Genehmigung des Deutschen Archäologischen Instituts, Abteilung Bagdad, Berlin

glattgestrichen. Nach der Trocknung in der Sonne erfolgte der erste Brennprozeß. Auf die so erhaltenen Rohziegel wurden die Glasuren aufgetragen. Die Glasurmasse, die pulverisiert auf die Ziegel aufgetragen und dann eingebrannt wurde, bestand aus Pflanzenasche, Mineralien und Farbstoffen. Zur Darstellung eines Löwen (s. Bild 119) gehörten 46 verschiedene Formziegel in 11 übereinanderliegenden Schichten. Die Fugen zwischen den Steinen haben eine Breite von 0,1 bis 0,6 cm.

a) Geben Sie die Abmessungen der Steine in cm (gerundet) an, wenn eine babylonische Elle etwa 50 cm entsprach!

b) Zeichnen Sie das Schrägbild einer (oben offenen) Holzform für einen Halbstein in einem geeigneten Maßstab!

c) Berechnen Sie die Volumina der beiden Typen in dm^3, wobei eine Elle = 50 cm zu setzen ist!

d) Berechnen Sie die Masse der beiden Typen, wenn die Dichte des Tons mit $1{,}21\ kg/dm^3$ anzunehmen ist!

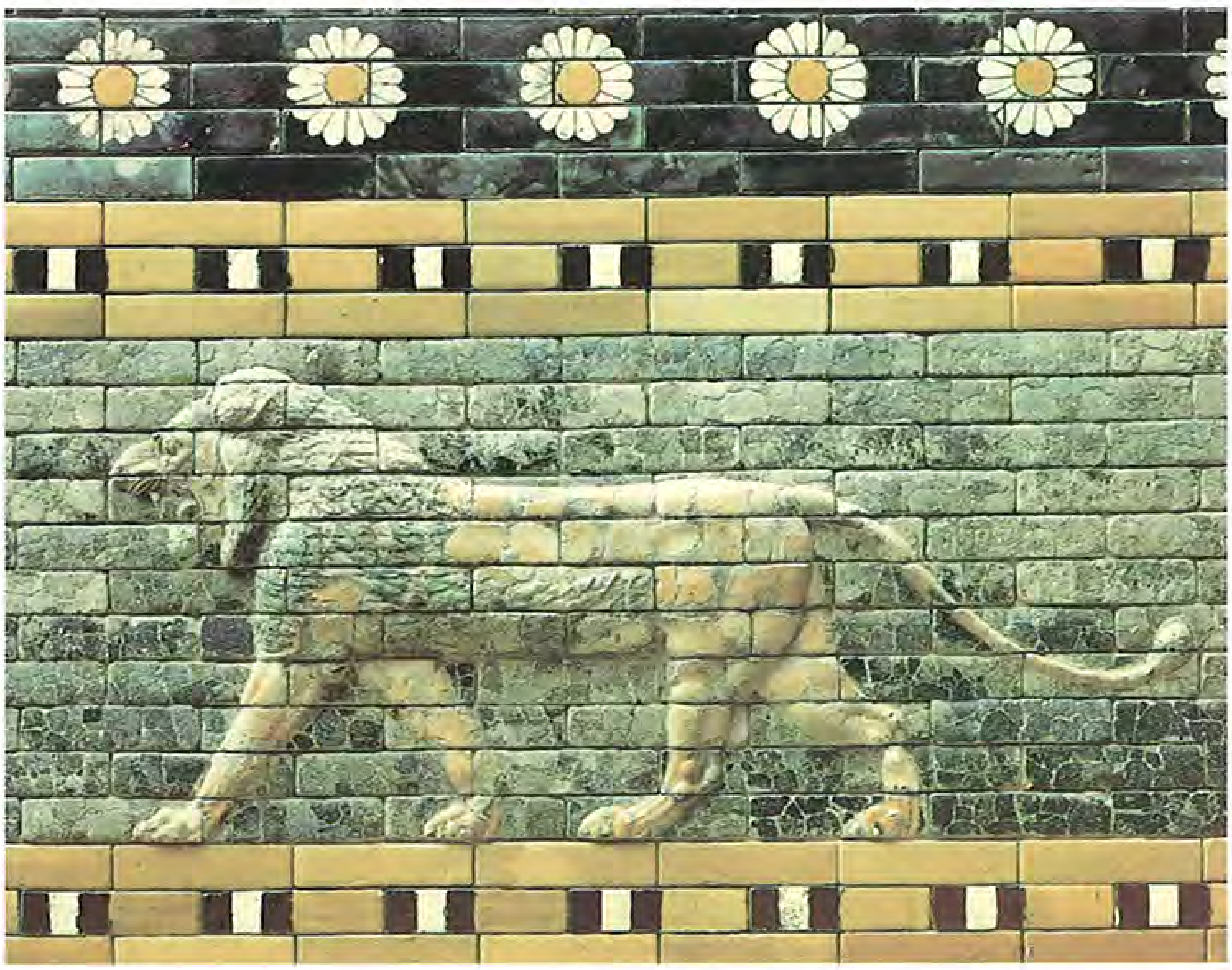
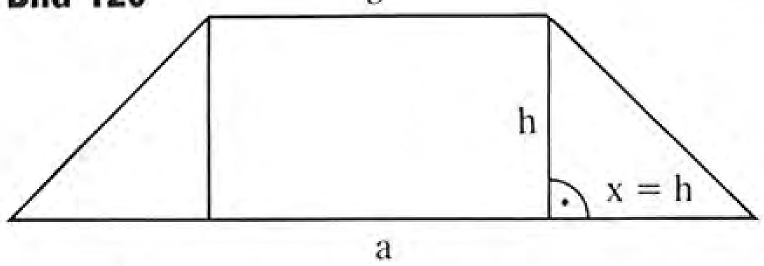


Bild 119
Babylon, Ištar-Tor. Reliefziegel mit Schmelzfarben von der Prozessionsstraße in Babylon (Neubabylonisches Reich). Die Herstellung von farbigen Glasuren beruhte auf dem Gebrauch empirisch gewonnener Kenntnisse über das Verhalten von Mineralien.
Mit freundlicher Genehmigung der Staatlichen Museen zu Berlin, Vorderasiatisches Museum

38

Bei einem »Ziegelbau« in Gestalt eines quadratischen Pyramidenstumpfes sind gegeben: die Grundkante $a = 20$ Gar, die Höhe 6 Ellen und die Neigung der Seitenflächen 1:1 (s. Bild 120).

Bild 120



Welches Volumen hat dieser Pyramidenstumpf in Kubikellen? (1 Gar = 12 Ellen)

39

Aus der mathematischen Schule von Me-Turan. In Tell Haddad im Irak wurde u. a. ein alter babylonischer Text (Haddad 104) mit zehn mathematischen Aufgaben gefunden. In diesen geht es um die Berechnung von Rauminhalten, Fassungsvermögen für Getreide sowie um Arbeitsleistungen der Menschen. Die Zahlen und Berechnungen sind im Sexagesimalsystem ausgeführt, aber wegen des Fehlens der Null nicht immer eindeutig.

Als Beispiele sollen die ersten beiden Aufgaben in gekürzter Form dienen.

a) In einem zylindrischen Gefäß mit einem Durchmesser von 50 cm sollen Körner aufbewahrt werden.

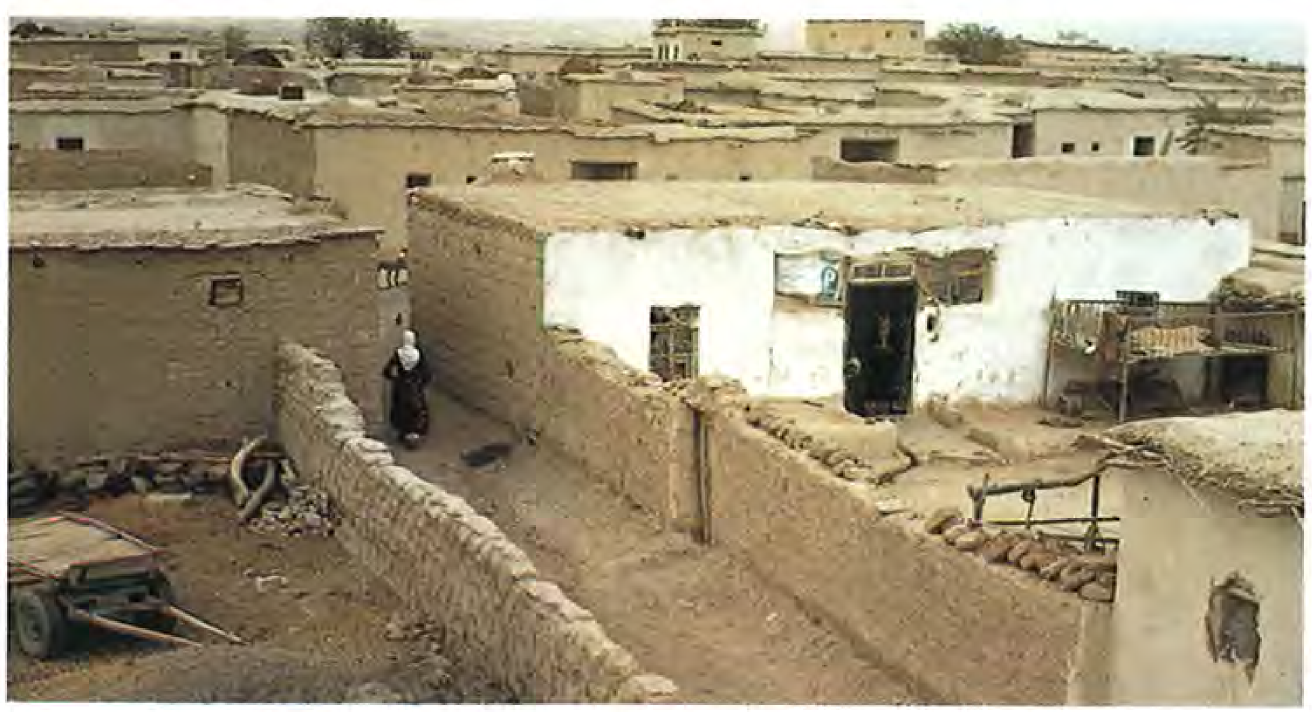


Bild 121
Unser Bild zeigt ein Dorf am mittleren Euphrat (in Lehmziegelbauweise). In der heißen Jahreszeit schläft die Familie in einem Hochbett im Hof.
Mit freundlicher Genehmigung der Freien Universität Berlin, Seminar für Vorderasiatische Altertumskunde

Berechnen Sie seinen Rauminhalt, wenn die Höhe gleich dem Durchmesser ist!

b) Ein Behälter hat die Form eines Kegelstumpfes. Sein oberer Durchmesser beträgt 17 cm, sein unterer 51 cm und die Höhe 3 m.

(1) Berechnen Sie sein Fassungsvermögen!

(2) Das Volumen in dieser Aufgabe wurde damals durch eine aufwendige Rechnung ermittelt und könnte heute speziell mit der

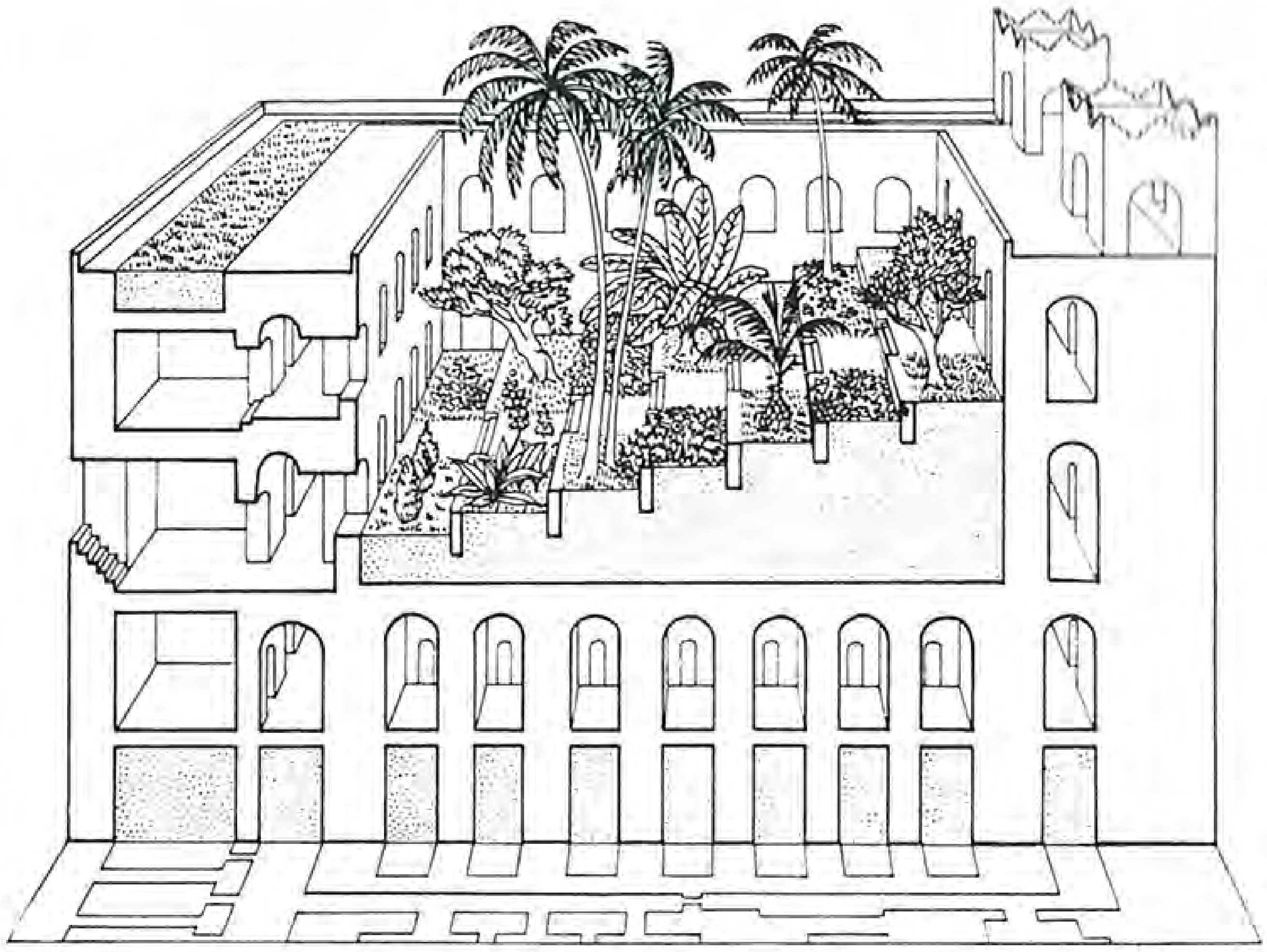


Bild 122
Darstellung der »Hängenden Gärten« der Semiramis nach Angaben des Bauhistorikers Koldeway (1855–1908)

Königin Semiramis war eine assyrische Herrscherin, die um 820 v. u. Z. lebte. Nach ihr wurden die »Hängenden Gärten« benannt, die seither als ein Wunder der Antike gelten, geschaffen unter der Herrschaft des Nebukadnezar II. Zeitgenossen berichten, daß sie »in unermeßlicher Breite terrassenförmig in die Höhe ragten, mit Stauden, Bäumen und bunten Blumen bepflanzt und mit allem, was das Auge wohlerfreut«. Das Bemerkenswerteste an den Hängenden Gärten war die Bewässerung. Durch ein ausgeklügeltes Rohrleitungssystem wurde das Wasser nach oben gepreßt und von dort auf die Blüten und Pflanzen gesprüht. Gleichzeitig hielt man den wie Ackerland bestellten Boden auf den einzelnen Terrassenabsätzen auch von unten feucht. So standen die Gärten das ganze Jahr über in üppiger Pracht. Allein das war ein Wunder für sich, weil es in dieser Gegend oftmals Dürrekatastrophen gab, ein Beispiel genialer Bewässerungstechnik und Hydrokultur.

Näherungsformel

$$V = \frac{\pi h (d + 3d)^2}{16} = \pi h d^2$$

angegeben werden.

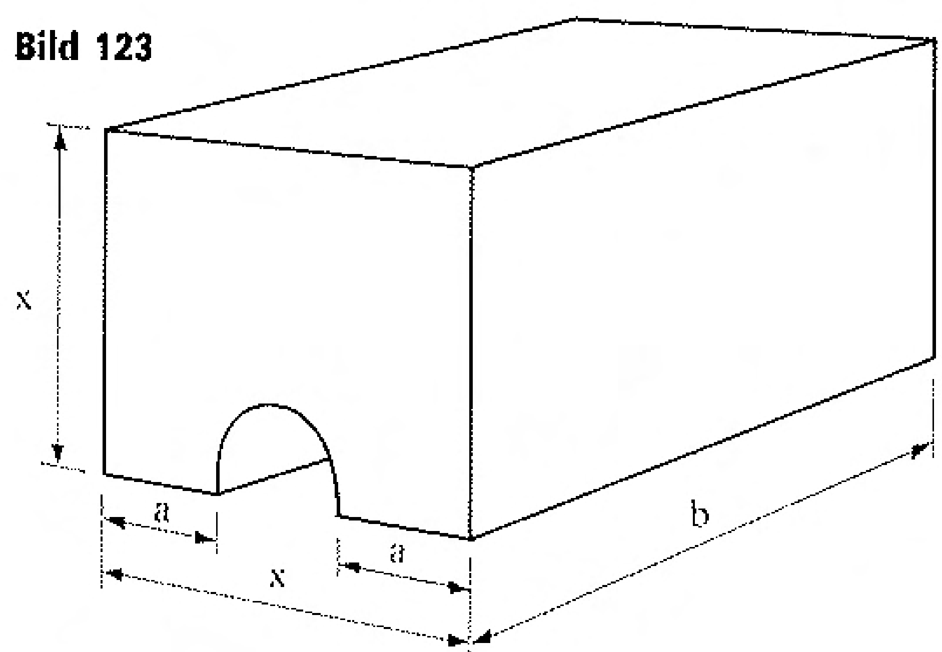
Berechnen Sie den relativen Fehler zwischen der heutigen exakten und der damaligen angenäherten Formel!

40

Von einem Quader $V = x^2 b$ ist ein Halbzylinder mit dem Basisdurchmesser $(x - 2a)$ weggenommen worden (s. Bild 123).

Bestimmen Sie das Volumen des Restkörpers, wenn $x = 6$ Ellen; $b = 12$ Ellen; $a = 2$ Ellen beträgt!

Bild 123



41

Ein Becher besteht aus einer Mischung von Gold und Kupfer. Gold- und Kupferanteil verhalten sich zueinander wie 1:9. Das Gewicht des Bechers beträgt 1 Mine.

Berechnen Sie, aus wieviel Gold und Kupfer der Becher besteht

a) in Gin,

b) in Gramm!

(Hinweis: 1 Mine = 60 Gin = 505 Gramm; 1 Gin = 8,417 g)

42

Auf einem in Strasbourg aufbewahrten Täfelchen heißt es: Zehn Brüder sollen 100 Schekel unter sich so verteilen, daß jeder folgende Bruder $1\frac{3}{5}$ Schekel weniger erhält als der vor ihm bedachte Bruder. Der achte der Brüder erhielt 6 Schekel.

Wieviel Schekel erhielt jeder dieser zehn Brüder?

43

In der alten persischen Erzählung »Die Geschichte Moradbaks«, die in der Sammlung »Tausendundein Tag« enthalten ist, stellt ein Weiser einem jungen Mädchen die folgende Aufgabe und erwähnt dabei, daß solche Aufgaben von den indischen Philosophen gestellt werden:

»Eine Frau geht in einen Garten, um Äpfel zu ernten. Der Garten hat vier Tore; jedes wird von einem Mann bewacht. Die Frau gibt dem Hüter des ersten Tores die Hälfte der gepflückten Äpfel. Als sie beim zweiten anlangt, gibt sie dem zweiten Wächter die Hälfte der übriggebliebenen Äpfel. Ebenso verfährt sie beim drit-

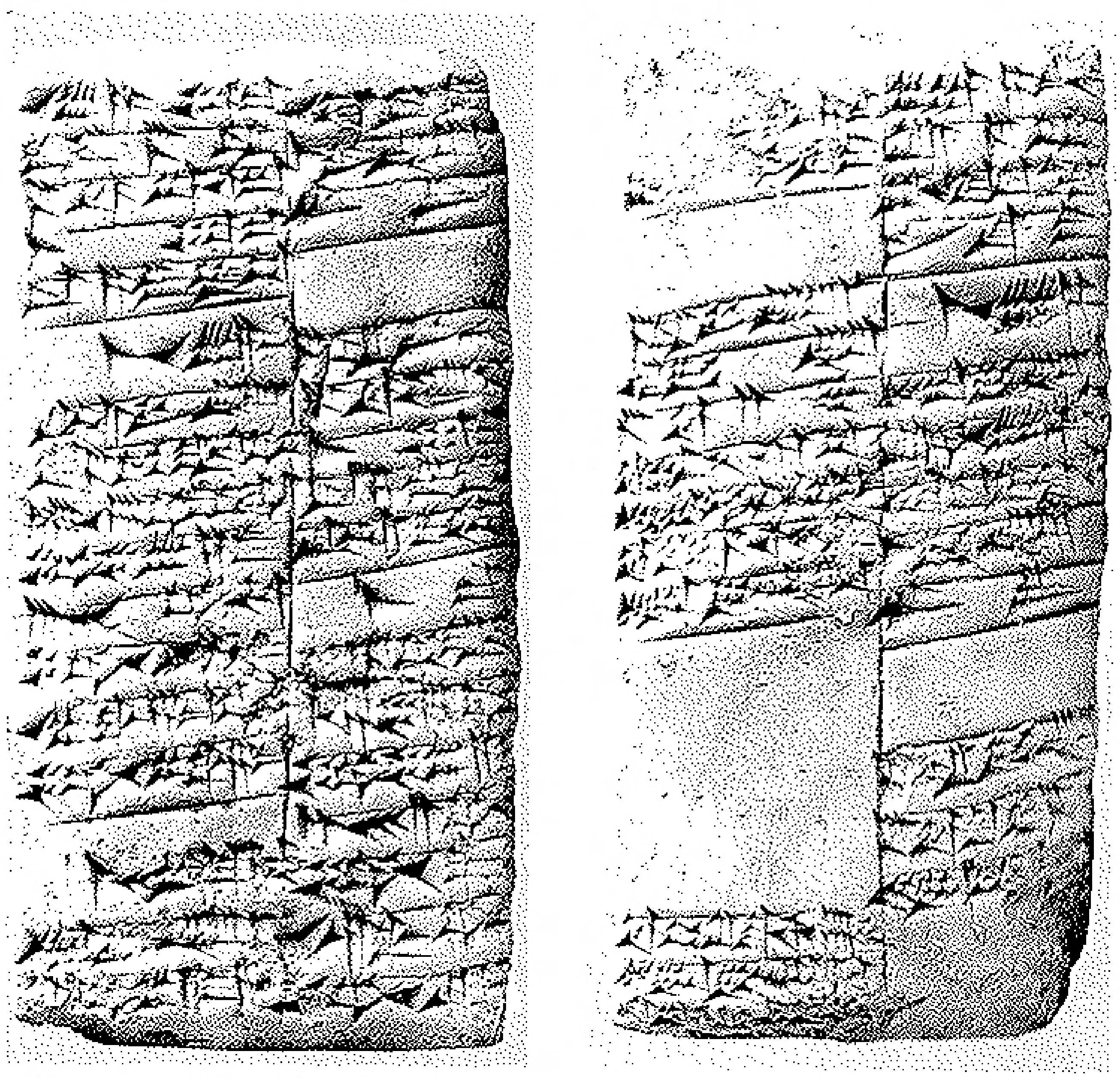


Bild 124
Zwei Seiten der vierkolumnigen Tafel Nr. W. 20472,126, enthält eine Aufstellung über Getreidelieferung zur Bierbereitung
Mit freundlicher Genehmigung des Deutschen Archäologischen Instituts, Abteilung Bagdad, Berlin

ten. Endlich teilt sie noch mit dem vierten, so daß ihr schließlich nur zehn Äpfel bleiben.

Nun fragt man, wieviel Äpfel sie geerntet hat.«

44

Versuchen Sie, die Tabelle zu vervollständigen, indem Sie die fehlende Anzahl der Tiere einsetzen!

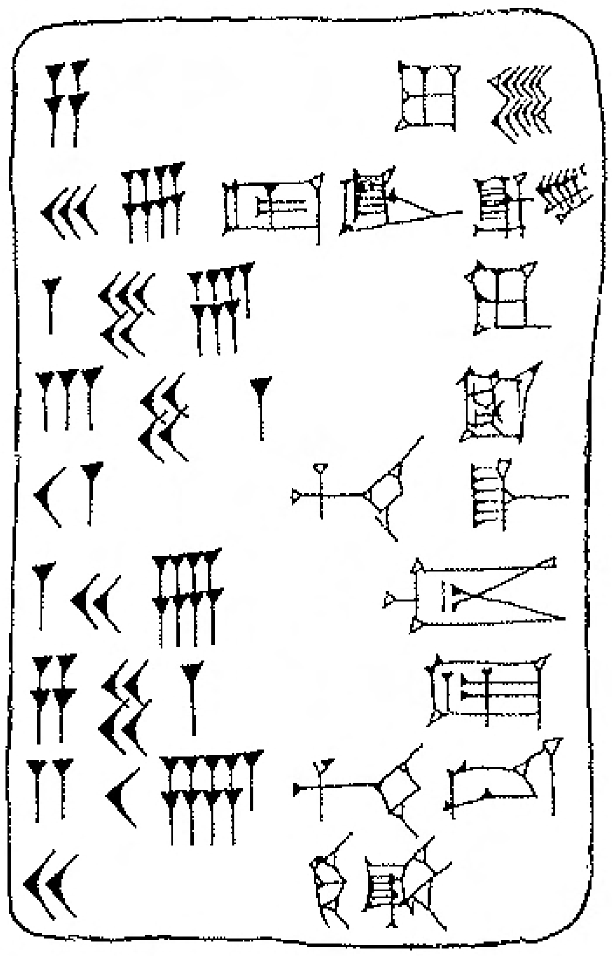


Bild 125
Sumerische Tontafel (um 2000 v. u. Z.) mit einer Liste von Kleinvieh, dessen Anzahl in Keilschrift-Ziffern festgehalten ist

4	Masthammel
	Kleine Lämmer
	Hammel
	Schafe
	Böcke
	Ziegen
	Lämmer
	Jungziegen
	Zicklein

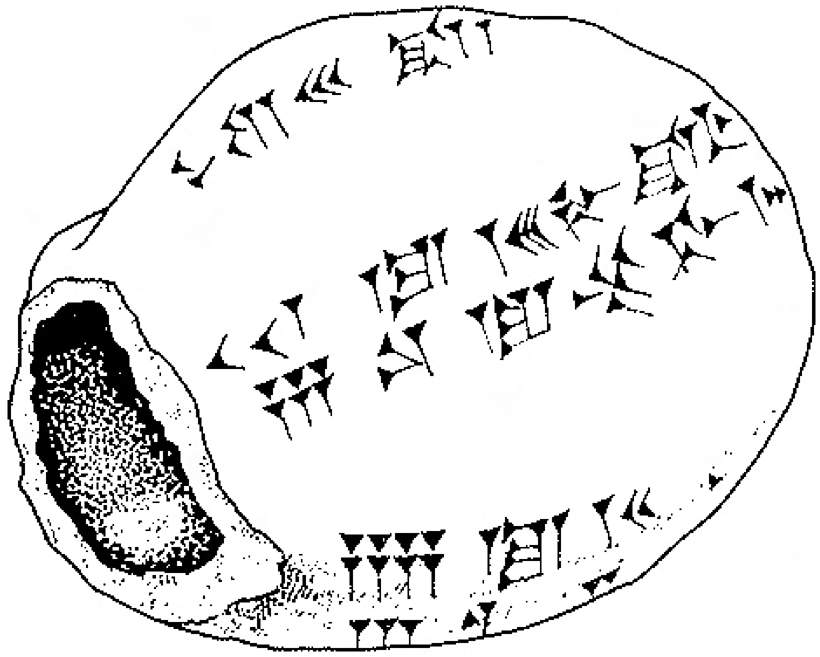
45

Vom Zufall zur Erkenntnis. Im Harvard Semitic Museum, Cambridge (USA), liegt unter der Katalognummer SMN eine hohle, eiförmige Tonbörse (4,6×6,2×5,0 cm). Sie wurde 1928/29 von einer amerikanischen Expedition für Orientforschung bei Ausgrabungen in den Ruinen des Palastes von Nuzi, südwestlich von Mosul (Irak), gefunden.

Auf ihrer Außenfläche trägt sie eine Keilinschrift (s. Bild 126). Ins Deutsche übersetzt lautet sie:

Gegenstände, Hammel und Ziegen betreffend
21 Mutterschafe
6 weibliche Lämmer
8 erwachsene Hammel

Bild 126
Eiförmige Tonbörse



4 männliche Lämmer
6 Mutterziegen
1 Bock
(2) Jungziegen

Aus diesem Text ersehen wir, daß es sich um 48 Tiere handelt.

Als man die Tonbörse öffnete, fand man in ihr 48 kleine, kugelförmige Gegenstände aus gebranntem Lehm. (Leider gingen diese durch Unachtsamkeit verloren.)

Zunächst maß man dieser Entdeckung keinerlei Bedeutung zu. Durch ein unvorhergesehenes Ereignis fanden Wissenschaftler die Funktion dieser kleinen Gegenstände in der Börse heraus. Der französische Historiker G. Guitel schrieb in einem seiner Bücher (Paris 1975) von einem ihm vorliegenden Bericht eines Mitglieds einer anderen als der oben zitierten amerikanischen Expedition. Dieses Dokument lautet: »Ein Expeditionsdiener war auf den Markt geschickt worden, um Hühner einzukaufen; aus Versehen wurden diese Hühner nach seiner Rückkehr im Hühnerstall untergebracht, ehe sie gezählt worden waren. Nun war dieser Diener vollkommen ungebildet, er konnte nicht zählen und deshalb auch nicht sagen, wie viele Hühner er gekauft hatte. Es wäre unmöglich gewesen, ihm diesen Einkauf zu bezahlen, wenn er nicht eine Anzahl Kieselsteine vorgewiesen hätte, die er beiseite gelegt hatte, einen für jedes Huhn, wie er erklärte.«

Was kann man in bezug auf diesen Einkaufsauftrag und dem Vorhandensein von 48 kleinen Kügelchen in der Tonbörse aus dem 15. Jh. v. u. Z. schlußfolgern?

Die Lösungen

Es ist sonderbar, daß nur
außerordentliche Menschen die Entdeckungen machen,
die hernach so leicht und simpel scheinen.
Dieses setzt voraus, daß, die simpelsten, aber
wahren Verhältnisse der Dinge zu bemerken,
sehr tiefe Kenntnisse nötig sind.

Georg Christoph Lichtenberg
(1742–1799)

Bild 127
Die Statue des Gudea, eines Herrschers von Lagasch (Südirak, um 2150 v. u. Z.) mit sumerischen Schriftzeichen. 45 × 22 cm; Material: dunkelgrüner Diorit

1

An die Stelle der im Bild gezeigten Zeichen setzen wir zur Vereinfachung der Darstellung Buchstaben, etwa so:

Vorderseite	$v\,v$	z	Rückseite	z
	w	v		$v\,v\,v\,v$
	x			y
	$y\,y$	$y\,y\,y$		

Damit erhalten wir die Darstellung

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & (1) & & (2) & & (3) & & (4) & & (5) \\
\hline
 & z & + & v & & & & & + & 3y \\
+ & (& & 2v & + & w & + & x & + & 2y) \\
\hline
= & z & + & 4v & & & & & + & y
\end{array} \qquad (1)$$

Das ergibt $v = w + x + 4y$. (2)

Weiterhin sind gegeben $z > v > w > x > y$. (3)

$z > 4v$ (4)

$x > 3y$ (5)

und $z = av$; $v = bw$; $w = cx$; $x = dy$. (6)

Aus (2) folgt mit Hilfe von (6) $bcd = cd + d + 4$ oder $d[c(b-1)-1] = 4$ mit den ganzzahligen Lösungen $d = 2$ und

$d = 4$. Wegen (5) kann $d = 2$ ausgeschlossen werden, und mit $d = 4$ ist $x = 4y$.

Wegen $c > 1$ bleibt nur $c = 2$ und somit $b = 2$ übrig. Wegen (6) erhalten wir deshalb $v = 16y$, $w = 8y$, $x = 4y$, also $v : w : x = 4 : 2 : 1$. Wegen (4) und (6) gilt $z > 4v$ und $z = av$, also $av > 4v$ bzw. $a > 4$ und somit $z > 64y$. Insgesamt erhalten wir $z > 64y$, $v = 16y$, $w = 8y$, $x = 4y$.

2

(1) 1,32; $= 1 \cdot 60^1 + (30 + 2) \cdot 60^0 = 60 + 32 = 92$

(2) 1,41,16; $= 1 \cdot 60^2 + (40 + 1) \cdot 60^1 + (10 + 6) \cdot 60^0$
$= 3\,600 + 2\,460 + 16 = 6\,076$

(3) 1,25; $= 1 \cdot 60^1 + (20 + 5) \cdot 60^0 = 60 + 25 = 85$

(4) 2,23,19; $= 2 \cdot 60^2 + 23 \cdot 60^1 + 19 \cdot 60^0 = 8\,599$

(5) 38,14,45,29; $= 38 \cdot 60^3 + 14 \cdot 60^2 + 45 \cdot 60^1 + 29 \cdot 60^0$
$= 8\,208\,000 + 50\,400 + 2\,700 + 29 = 8\,261\,129$

$$\left.\begin{array}{ll} (6) & 90 = 1 \cdot 60^1 + 30 \cdot 60^0 \\ (7) & 115 = 1 \cdot 60^1 + (50 + 5) \cdot 60^0 \\ (8) & 700 = 11 \cdot 60^1 + 40 \cdot 60^0 \\ (9) & 1\,010 = 16 \cdot 60^1 + 50 \cdot 60^0 \\ (10) & 800\,000 = 3 \cdot 60^3 + 42 \cdot 60^2 + 13 \cdot 60^1 + 20 \cdot 60^0 \end{array}\right\} \text{(s. Bild 128)}$$

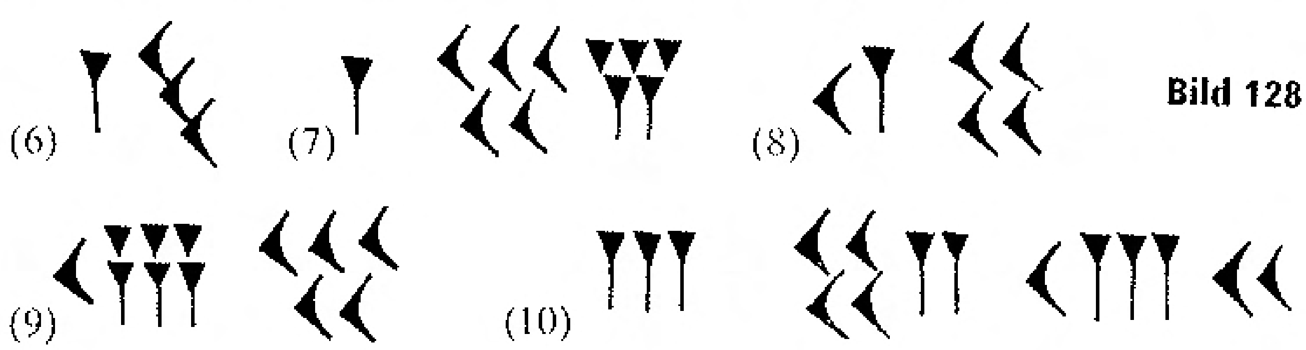


Bild 128

3

$$\frac{x}{7} + xy = 27$$

$$y = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{7} + \frac{x}{2} = 27$$

$$x = 42; \quad y = \frac{1}{2}$$

4

a) (1) $x - \frac{1}{13}(x + y) \cdot 6 = \frac{1}{2}$

(2) $xy = 1$

$$14x^2 - 13x = 12$$

$$x = \frac{3}{2}; \quad y = \frac{2}{3}$$

(Die Babylonier kannten nur positive Wurzeln.)

b) (1) $x^2 + y^2 = 3\,125$
(2) $x = z + 20$
(3) $y = \frac{2}{3} z + 5$

Aus (2) folgt $z = x - 20$. In (3) eingesetzt ergibt das $y = \frac{2}{3}(x - 20) + 5$. Dies in (1) eingesetzt, erhält man

$$x^2 + \left(\frac{2}{3}x - \frac{25}{3}\right)^2 = 3\,125.$$

Hieraus folgt $x = 50$; $y = 25$; $z = 30$.

c) $x^2 - x = 870$; $x = 30$

d) (1) $x^2 + y^2 + z^2 = 612\frac{3}{4}$
(2) $y = \frac{x}{7}$
(3) $z = \frac{y}{7}$

$$x^2 + \left(\frac{x}{7}\right)^2 + \left(\frac{x}{49}\right)^2 = \frac{2\,451}{4}$$

$x = 24\frac{1}{2}$; $y = 3\frac{1}{2}$; $z = \frac{1}{2}$

e) (1) $xy - (x - y)^2 = 500$
(2) $x - y = 10$

$x = 30$; $y = 20$

5

a) Aus $x = y + 7$ und $xy = 60$ folgt $(y + 7)y = 60$. $y^2 + 7y - 60 = 0$; $y = 5$; $x = 12$

b) $x = 5$; $y = \frac{3}{2}$ c) $x = 15$; $y = 12$

d) $x = 30$; $y = 20$ e) $x = 3$; $y = \frac{3}{2}$

f) $n^2 \cdot (n + 1) = 11^2 \cdot 12$; $n = 11$ (Wir erkennen: Die Babylonier wählten einen einfachen Zahlenzusammenhang.)

g) $x = 1\frac{1}{6}$

h) Stellen Sie die Gleichung etwas um:

$$\left[\left\{\frac{5}{4}(2x - y) + 6\right\}\frac{1}{8} + 15\right]\frac{1}{11} + x = 8(34 - x).$$

Nach Auflösung der Klammern und Ordnen erhält man

$$\frac{10 + 11\cdot 32 + 8\cdot 11\cdot 32}{11\cdot 32}x - \frac{5}{11\cdot 32}y = \frac{8\cdot 11\cdot 32\cdot 34 - 15\cdot 32 - 24}{11\cdot 32}$$

und weiter $3\,178x - 5y = 95\,240$. Ferner gilt $y = \frac{600}{x}$ und demzufolge $3\,178x - \frac{3\,000}{x} = 95\,240$ bzw. $3\,178x^2 - 95\,240x = 3\,000$

Hieraus ergibt sich

$$\left(x - \frac{23\,810}{1\,589}\right)^2 = \frac{1\,500}{1\,589} + \frac{23\,810^2}{1\,589^2} = \left(\frac{23\,860}{1\,589}\right)^2$$

mit $x = 30$ und $y = 20$.

6

$1^2 + 4 = 5 = 5\cdot 1;\quad 4^2 + 4 = 20 = 5\cdot 4;\quad x_1 = 1;\quad x_2 = 4$

7

$$\begin{array}{lrl}
(1) & xy + (x-y)(x+y) & = 4\,400 \\
(2) & x + y & = 100 \\
\hline
 & xy + x^2 - y^2 & = 4\,400 \\
 & y & = 100 - x \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
x(100-x) + x^2 - (100-x)^2 & = & 4\,400 \\
x^2 - 300x + 14\,400 & = & 0
\end{array}$$

$x_1 = 240;\quad y_1 = -140$ (entfällt, da negativ)
$x_2 = 60;\quad y_2 = 40$

Die Fläche hat eine Länge von 60 und eine Breite von 40.

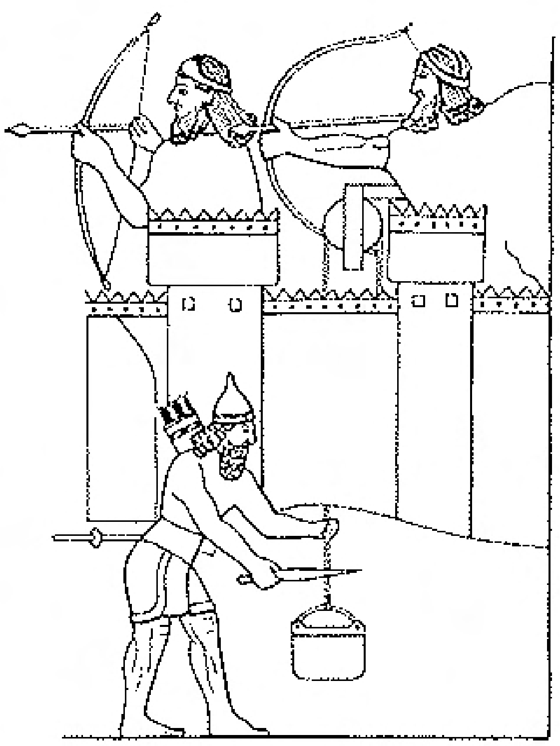


Bild 129
Eine einfache Rolle zur Versorgung der Kämpfer auf den Türmen als Vorstufe zum Flaschenzug (assyrisches Relief, um 800 v. u. Z.)

8

$$\sqrt{2} = 1;24,51,10 = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = 1 + \frac{89\,470}{60^3}$$

$\sqrt{2} \approx 1{,}414\,212\,963 \quad (\text{TR } \sqrt{2} = 1{,}414\,213\,562)$

$$d = a\sqrt{2} = 42;25,35 = 42 + \frac{25}{60} + \frac{35}{60^2} = 42 + \frac{1\,535}{3\,600} = 42{,}426\,388$$

9

a) $\sqrt{10} = \sqrt{3^2 + 1} \approx 3 + \frac{1}{6} = \frac{19}{6} \approx 3{,}167$ (TR: $\sqrt{10} = 3{,}162\,277\,7$)

b) $\sqrt{27} = \sqrt{5^2 + 2} \approx 5 + \frac{2}{10} = 5{,}2$ (TR $\sqrt{27} = 5{,}196\,152\,4$)

10

Man zerlegt $b = 360$ in $b = 2xy = 2 \cdot 180$ mit $xy = 180$ und erhält für x und y die ganzzahligen Werte in der folgenden Tabelle mit den pythagoreischen Zahlentripeln (a, b, d):

x	y	x^2	y^2	a	b	d
180	1	32 400	1	32 399	360	32 401
90	2	8 100	4	8 096	360	8 104
60	3	3 600	9	3 591	360	3 609
45	4	2 025	16	2 009	360	2 041
36	5	1 296	25	1 271	360	1 321
30	6	900	36	864	360	936
20	9	400	81	319	360	481
18	10	324	100	224	360	424
15	12	225	144	81	360	369

Es lassen sich 9 pythagoreische Zahlentripel bilden.

11

Nach dem Strahlensatz gilt

$$\frac{x + b}{b} = \frac{h_1 + h_2}{h_2}.$$

Dann ist

$$\frac{x + 1}{1} = \frac{10 + 1}{1} \text{ bzw. } x = 10.$$

Man muß sich 10 (Längeneinheiten) vom Fuß der Mauer entfernen.

12

x sei die Masse des Steins. Dann gilt

$$x + \frac{x}{7} + \frac{1}{11} \cdot \left(x + \frac{x}{7}\right) = 1,$$

$$77x + 11x + 7x + x = 77, \quad x = \frac{77}{96}.$$

$$\frac{77}{96}\text{ Minen} = \frac{77 \cdot 60 \cdot 180}{96}\text{ Še} = 8\,662{,}5\text{ Še}$$

Daraus folgt, daß der Stein eine Masse von $\frac{2}{3}$ Minen, 8 Gin, $22\frac{1}{2}$ ŠE hat.

13

Mit $a_1 = 1$ und $n = 10$ gilt

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = 1 \cdot \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} = 2^{10} - 1 = 1\,023.$$

14

a) Es gilt

$d = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$. Aus $d = \frac{a}{2} + b = \frac{4}{2} + 3 = 5$ und $d = \frac{b}{3} + a = \frac{3}{3} + 4 = 5$ folgt das gleiche Ergebnis.

b) Es gilt $d^2 = (6 - d)^2 + (8 - d)^2$; $d^2 - 28d + 100 = 0$; $d = 14 - 4\sqrt{6}$; denn $d = 14 + 4\sqrt{6}$ entfällt, da dann a negativ wird. Also gilt $d \approx 4{,}2$.

c) Es gilt $a^2 + b^2 = d^2$, also $a^2 + 2ab + b^2 = d^2 + 2ab$; $(a + b)^2 = d^2 + 2ab$. Daraus folgt $(a - d)^2 = d^2 + 2ab$, also $(12 - d)^2 = d^2 + 2 \cdot 12$; $d = 5$.

Die Länge von d beträgt 5.

15

Es sei x die Länge, also $\frac{3x}{4}$ die Breite des Rechtecks. Dann gilt

$$x^2 + \left(\frac{3x}{4}\right)^2 = 40^2; \quad x^2 + \frac{9}{16}x^2 = 1\,600; \quad x = 32.$$

Die Länge des Rechtecks beträgt 32, die Breite 24.

16

a) $d \approx a + \dfrac{b^2}{2a} = 40 + \dfrac{10^2}{2 \cdot 40} = 41{,}25$

b) $d = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{40^2 + 10^2} \approx 41{,}23$

17

Aus $ab = 45$ bzw. $2ab = 90$ und $a^2 + b^2 = 75^2$ folgt

$a^2 + 2ab + b^2 = 5\,715$; $(a + b)^2 = 5\,715$; $a + b = 3\sqrt{635}$, also

$b = 3\sqrt{635} - a$ und somit $a(3\sqrt{635} - a) = 45$;

$$a^2 - 3\sqrt{635} \cdot a + 45 = 0; \quad a = \frac{3\sqrt{635}}{2} \pm \sqrt{\frac{5\,535}{4}};$$

$$a \approx 38 \pm 37 \cdot a_1 \approx 75; \; b_1 \approx \frac{3}{5}; \; a_2 \approx 1; \; b_2 \approx 45.$$

Die Seiten des Rechtecks betragen entweder 75 und $\frac{3}{5}$ oder 1 und 45 (Längeneinheiten).

18

a) Bezeichnet man die Länge der Handbreiten mit a und die Breite der Handbreiten mit b, so gilt

(1) $a + \frac{b}{4} = 7$; (2) $a + b = 10 \cdot b = 4$; $a = 6$.

Die Länge beträgt 6 Handbreiten, die Breite 4 Handbreiten.

b) Somit ist die Länge $6 \cdot 5$ Finger $= 30$ Finger, die Breite $4 \cdot 5 = 20$ Finger.

19

Jedes der kongruenten Dreiecke ist jedem der kongruenten Quadrate flächengleich. Da es 16 Teilfiguren sind, gilt

$$A_D = A_Q = \frac{a^2}{16}.$$

20

Es gilt

$$h^2 = a^2 - \left(\frac{c-b}{2}\right)^2; \quad d^2 = h^2 + \left[c - \left(\frac{c-b}{2}\right)\right]^2;$$

$$d^2 = a^2 + \left(\frac{c+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{c-b}{2}\right)^2; \quad d^2 = a^2 + bc.$$

Dann ist $d^2 = 5^2 + 2 \cdot 8 = 41$; $d \approx 6{,}4$.

Die Länge der Diagonale beträgt etwa 6,4 (Längeneinheiten).

21

Für die Flächeninhalte der Trapeze *EFCD*, *ABFE*, *ABCD* gilt

$$\frac{1}{2}\cdot(c+y)\cdot x = A_2;\quad \frac{1}{2}\cdot(a+y)\cdot 5x = A_1;$$

$$\frac{1}{2}\cdot(a+c)\cdot 6x = A_1 + A_2.$$

Daraus folgt

$$x = \frac{2\cdot A_2}{c+y} = \frac{3\,375}{2c+105};$$

$$x = \frac{2\cdot A_1}{a+y} = \frac{2\,025}{2a+105};\quad x = \frac{2\cdot(A_1+A_2)}{6\cdot(a+c)} = \frac{1\,125}{a+c}.$$

Hieraus folgt weiter $x = 15$, also $\overline{AE} = 75$ und $\overline{ED} = 15$ (Längeneinheiten).

22

Die Aufgabe führt auf ein Gleichungssystem mit 5 Unbekannten b_1, b_2, b_3, l_1, l_2.

(1) $A_1 = \frac{1}{2}\, l_1(b_1 + b_2)$

(2) $A_2 = \frac{1}{2}\, l_2(b_2 + b_3)$

(3) $l_1 = a\cdot l_2$

(4) $b_1 - b_3 = c$

(5) $l_2(b_1 - b_2) = l_1(b_2 - b_3)$

Mittels linearer Substitution erhalten wir aus (1), (2) und (4)

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{a\cdot(b_1+b_2)}{b_2+b_1-c};\quad A_1\cdot b_1 + A_1\cdot b_2 - A_1\cdot c = a\cdot A_2\cdot b_1$$
$$+\, a\cdot A_2\cdot b_2;\quad (A_1 - a\cdot A_2)\cdot b_1 + (A_1 - a\cdot A_2)\cdot b_2 = A_1\cdot c.$$

Aus (3) und (5) folgt $b_1 - b_2 = a\cdot(b_2 - b_1 + c)$;

$$b_1 - b_2 = a\cdot b_2 - a\cdot b_1 + ac;\quad (a+b)\cdot b_1 - (a+1)\cdot b_2 = ac.$$

Daraus folgt weiter

$$b_1 + b_2 = \frac{A_1 \cdot c}{A_1 - a \cdot A_2}; \quad b_1 - b_2 = \frac{a \cdot c}{a+1};$$

$$2 \cdot b_1 = \frac{A_1 \cdot c}{A_1 - a \cdot A_2} + \frac{a \cdot c}{a+1}; \quad b_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{A_1 \cdot c}{A_1 - a \cdot A_2} + \frac{a \cdot c}{a+1}\right);$$

$$b_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{A_1 \cdot c}{A_1 - a \cdot A_2} - \frac{a \cdot c}{a+1}\right);$$

$$b_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{A_1 \cdot c}{A_1 - a \cdot A_2} + \frac{a \cdot c}{a+1}\right) - c;$$

$$l_1 = \frac{2 \cdot A_1}{b_1 + b_2}; \quad l_2 = \frac{2 \cdot A_2}{b_2 + b_3};$$

$$l_1 = \frac{2(A_1 - a \cdot A_2)}{c}; \quad l_2 = \frac{2(A_1 - a \cdot A_2)}{ac}.$$

Bild 130
Assyrischer Schreiber (rechts) mit Griffel und Tontafel, links daneben aramäischer Schreiber mit Pergament bzw. Papyrus (nach einer Wandmalerei aus Tell Ahmar, entstanden etwa um 800 v. u. Z.). Eine wichtige Rolle spielten die babylonischen Schreiber. Als Schüler wurden sie »Söhne des Tafelhauses« genannt. Hatten sie die Unterstufe mit Erfolg durchlaufen, durften sie sich »Kleinschreiber« nennen und nach vollständiger Ausbildung »Tafelschreiber«.

23

Aus $A = \frac{ab}{2}$ und $A_1 + A_2 + A_3 = \frac{ab}{2}$ und $A_1 = A_2 = A_3$ folgt

$$A_1 = A_2 = A_3 = \frac{ab}{6}.$$

Nun gilt $x^2 : a^2 = \frac{ab}{6} : \frac{ab}{2} = 1 : 3$, also

$x = \frac{a}{3}\sqrt{3}$. Daraus folgt weiter $(x+y)^2 : a^2 = \frac{ab}{3} : \frac{ab}{2} = \frac{2}{3}$, also

$x + y = \frac{a\sqrt{6}}{3}$; $\quad y = \frac{a\sqrt{6}}{3} - \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{a}{3}\sqrt{3}\,(\sqrt{2} - 1)$, und somit

$z = a - x - y$, also

$$z = a - \frac{a}{3}\sqrt{3} - \left(\frac{a}{3}\sqrt{6} - \frac{a}{3}\sqrt{3}\right) = \frac{a}{3}(3 - \sqrt{6}).$$

24

Angenommen der Flächeninhalt des ersten Ackers beträgt x, der des zweiten Ackers also $(30 - x)$, dann gilt

$$x\frac{1\,200}{30} + (30 - x) \cdot \frac{900}{30} = 1\,100; \quad 40x + 900 - 30x = 1\,100,$$

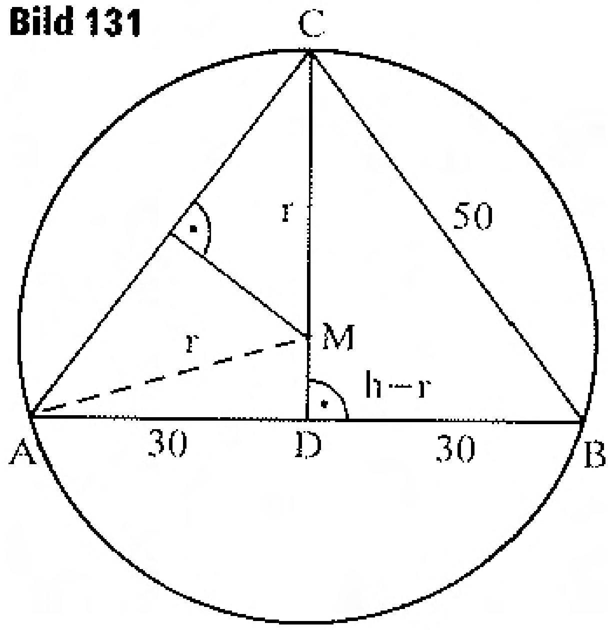
also $x = 20$.

Der erste Acker hat einen Flächeninhalt von 20, der zweite von 10 (Flächeneinheiten).

25

a) Wir zeichnen die Höhe $\overline{CD}$ zur Basis $\overline{AB}$ und die Mittelsenkrechte von $\overline{AC}$, die $\overline{CD}$ in M schneidet. Dann ist $\overline{AM}$ der Umkreisradius des Dreiecks ABC (s. Bild 131).

Bild 131



b) Nach dem Satz des Pythagoras gilt $h^2 = 50^2 - 30^2 = 1\,600$; $h = 40$ und $r^2 = (40 - r)^2 + 30^2$; $r^2 = 1\,600 - 80r + r^2 + 900$; $80r = 2\,500$; $r = 31{,}25$.

Die Länge des Umkreisradius beträgt 31,25 (Längeneinheiten).

26

Es gilt (s. Bild 132) $\dfrac{ab}{2} = 3\,000$, also $b = \dfrac{6\,000}{a}$, und $\dfrac{a}{b} = \dfrac{e}{b-d}$;

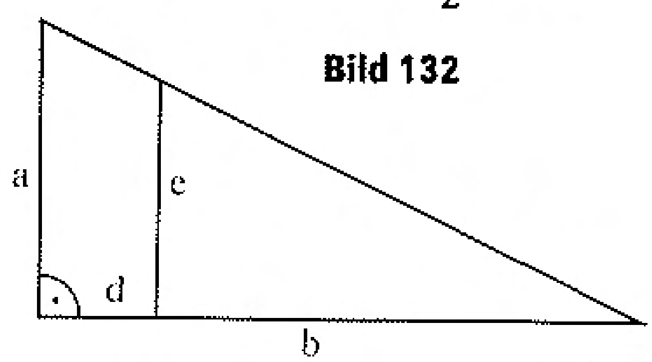


Bild 132

$ab - ad = be$, also $6\,000 - \dfrac{100a}{3} = \dfrac{6\,000 \cdot 40}{a}$.

Daraus folgt $a^2 - 180a + 7\,200 = 0$, also
$a_1 = 120$ und $b_1 = 50$ bzw. $a_2 = 60$ und $b_2 = 100$. Wegen $a < b$ gilt nur $a = 60$ Gar und $b = 100$ Gar.

27

a) Es gilt $D_2 = \frac{b_2 \cdot \overline{CD}}{2}$; (1) und

$b_2 : \overline{CD} = b_1 : a_1$. (2)

Aus (1) erhält man $\overline{CD} = \frac{2 \cdot D_2}{b_2}$, und dies in (2) eingesetzt ergibt

$b_2 = b_1 \frac{2 \cdot D_2}{a_1 \cdot b_2}$ und schließlich $b_2^2 = \frac{2 \cdot b_1 \cdot D_2}{a_1}$.

Also ist

$$b_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot b_1 \cdot D_2}{a_1}}.$$

b) Die Berechnung $D_1 = D_2 + D_3 + D_4 + D_5$ ergibt

(sexagesimal)	(dezimal)
$D_2 = 8 \cdot 60 + 6$	$= 486$
$D_3 = 5 \cdot 60 + 11 + \frac{2}{60} + \frac{24}{60^2}$	$= 311{,}04$
$D_4 = 3 \cdot 60 + 19 + \frac{3}{60} + \frac{56}{60^2} + \frac{9}{60^3} + \frac{36}{60^4}$	$= 199{,}0656$
$D_5 = 5 \cdot 60 + 53 + \frac{53}{60} + \frac{39}{60^2} + \frac{50}{60^3} + \frac{24}{60^4}$	$= 353{,}8944$
$D_1 = 21 \cdot 60 + 89 + \frac{58}{60} + \frac{119}{60^2} + \frac{59}{60^3} + \frac{60}{60^4}$	
$D_1 = 22{,}30$	$= 1\,350$

Die Summe der Flächeninhalte ist gleich 1 350 (Flächeneinheiten).

28

Wegen $h_2 = h_1 + 20$ und $A_1 = A_2 + 420$ gilt

$\frac{1}{2}(x + 30)h_1 = \frac{1}{2} \cdot x \cdot (h_1 + 20) + 420$, also $x = \frac{3}{2} \cdot h_1 - 42$.

Nach dem Strahlensatz gilt

$\frac{x}{30} = \frac{h_1 + 20}{2h_1 + 20}$, also $x = \frac{15(h_1 + 20)}{h_1 + 10}$.

Durch Gleichsetzen erhält man $\frac{3}{2} \cdot h_1 - 42 = \frac{15(h_1 + 20)}{h_1 + 10}$;

$h_1^2 - 28h_1 - 480 = 0$, also

$h_1 = 40$ und somit $h_2 = 60$.

Daraus folgt weiter $x = \frac{3}{2} \cdot 40 - 42$; $x = 18$.

Die Länge der parallelen Strecke beträgt 18 (Längeneinheiten).

29

a) (1) Der Umfang eines regelmäßigen Sechsecks beträgt $6r$. Dann folgt aus $6r = 2\pi r$ für $\pi = 3$.

(2) Die Fläche des Quadrates beträgt $\left(\frac{8}{9} \cdot d\right)^2$. Dann folgt aus $\left(\frac{8}{9} \cdot d\right)^2 = \frac{\pi}{4} d^2$ für $\pi = 3{,}160\,493\,8$.

(3) Nach Archimedes müßte gelten: $\pi \frac{d^2}{4} : d^2 = 11 : 14$.

Daraus folgt $\pi = \frac{22}{7} = 3{,}\overline{142\,857}$.

b) Wert nach dem Taschenrechner: $\pi = 3{,}141\,592\,7$.

30

Berechnung nach der Babylonischen Faustregel:

$$V \approx \frac{\pi h}{2}(r_1^2 + r_2^2) \approx \frac{\pi \cdot 8}{2}(5^2 + 3^2)\ \text{cm}^3 \approx 4\pi \cdot 34\ \text{cm}^3 \approx 427\ \text{cm}^3.$$

Berechnung aus heutiger Sicht:

$$V = \frac{\pi h}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) = \frac{\pi \cdot 8}{3}(25 + 15 + 9)\ \text{cm}^3 \approx 410\ \text{cm}^3.$$

31

a) $A = \frac{m \cdot y}{2}$; $\quad y = \frac{2A}{m} = \frac{2 \cdot 900}{45} = 40$

b) $m : (m - h) = y : z$; $\quad z = \frac{(m-h)y}{m} = \frac{(45 - 36)40}{45} = 8$

Die Länge des Dammes beträgt 40 und die Länge des Restes 8 (Längeneinheiten).

32

Wir verwandeln in Ellen: Länge $a = 60$ Ellen; Breite $b = 18$ Ellen; Tiefe $c = 6$ Ellen

a) Die Grundfläche ergibt sich aus $A = a \cdot b = 60 \cdot 18$ Quadratellen $= 1\,080$ Quadratellen.

b) Das Volumen ist dann $V = a \cdot b \cdot c = 1\,080 \cdot 6$ Kubikellen $= 6\,480$ Kubikellen.

c) Die Anzahl der Tagewerke beträgt
$$\frac{6\,480 \text{ Kubikellen}}{24 \text{ Kubikellen/Tag}} = 270 \text{ Tagewerke.}$$

d) Den gesamten Arbeitslohn erhält man aus $270 \cdot 6$ Še $= 1\,620$ Še $= 9$ Schekel.

33

Die Gesamt-Arbeitsleistung der Arbeiter entsprechend ihrer täglichen Arbeitsnorm ist $9 \cdot 30 \cdot \frac{1}{6}$ (Raum)Sar $= 45$ (Raum)Sar. Das ist das Volumen des Dammes. Seine Grundfläche ist dann $A = 45$ (Raum)Sar : 6 Ellen; $A = \dfrac{45 \cdot 144 \text{ Kubikellen}}{6 \text{ Ellen}}$ $= 100$ Quadratellen.

Wegen $A = x \cdot y$ und $x + y = 6\frac{1}{2}$ Gar $= 78$ Ellen gilt $xy = 1\,080$ und $x + y = 78$, also $y = 78 - x$ und $x(78 - x) = 1\,080$;
$x^2 - 78x + 1\,080 = 0$; $x_1 = 60$; $x_2 = 18$. Daraus folgt weiter
$y_1 = 78 - 60 = 18$ und $y_2 = 78 - 18 = 60$.

Der Damm hat also eine Länge von 60 Ellen $= 5$ Gar und eine Breite von 18 Ellen $= 1\frac{1}{2}$ Gar.

34

Das Volumen des Grabens berechnet man nach $V = A_T \cdot l$ mit
$A_T = \frac{2+1}{2} \cdot \frac{3}{2}$ Quadratellen $= \frac{9}{4}$ Quadratellen und
$l = 6 \cdot 720$ Ellen $= 4\,320$ Ellen. Dann ist $V = 2{,}25 \cdot 4\,320$ Kubikellen $= 9\,720$ Kubikellen.

Die Tagesleistung eines Arbeiters beträgt $\frac{1}{3}$ (Raum)Sar

$= 48$ Kubikellen. Die Tagesleistung von 18 Arbeitern beträgt $48 \cdot 18$ Kubikellen $= 864$ Kubikellen.

Man braucht $9\,720 : 864 = 11{,}25$ Tage.

35

Die Länge des Rohres sei x Ellen, dann gilt (s. Bild 133)

$$(x-a)^2 + b^2 = x^2; \quad x = \frac{a^2+b^2}{2a}; \quad x = \frac{3^2+9^2}{2 \cdot 3} \text{ Ellen}$$

$= 15$ Ellen. Das Rohr ist 15 Ellen lang.

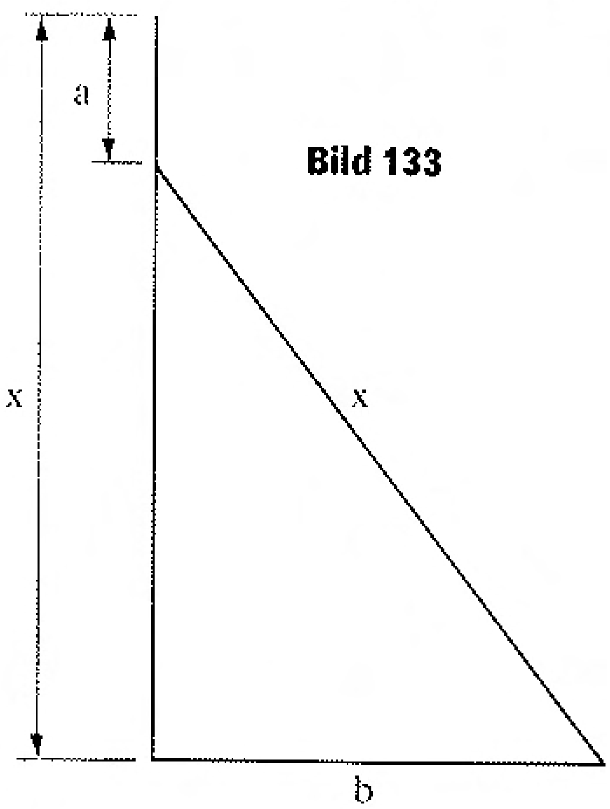


Bild 133

36

Nach dem Satz des Pythagoras gilt (s. Bild 134)

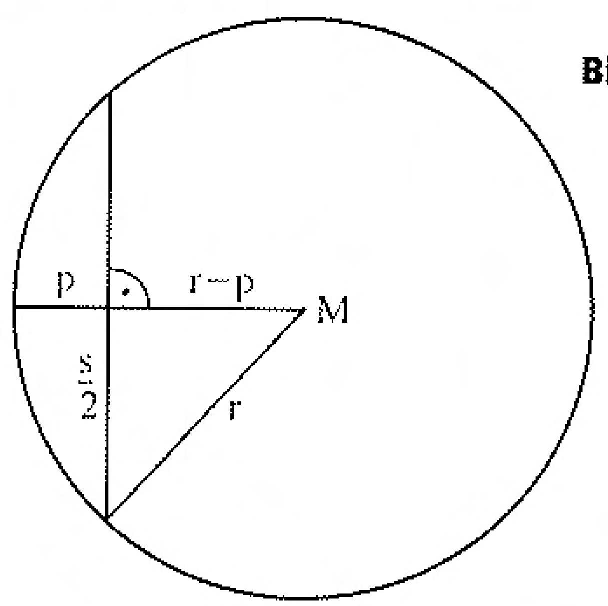


Bild 134

$$r^2 = (r-p)^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2; \quad r^2 = r^2 - 2pr + p^2 + \frac{s^2}{4};$$

$s = 2 \cdot \sqrt{p(2r - p)}$. Nun gilt $u = 2\pi r$, also $r = \frac{30}{\pi}$; daraus folgt

$$s = 2 \cdot \sqrt{2\left(\frac{60}{\pi} - 2\right)} \approx 11{,}70.$$

Die Sehne ist ca. 11,70 (Längeneinheiten) lang.

37

a) Die Abmessungen der Ganz- und Halbsteine sind
für den Ganzstein: 33 cm · 33 cm · 8 cm,
für den Halbstein: 33 cm · 16,5 cm · 8 cm.

b) (s. Bild 135)

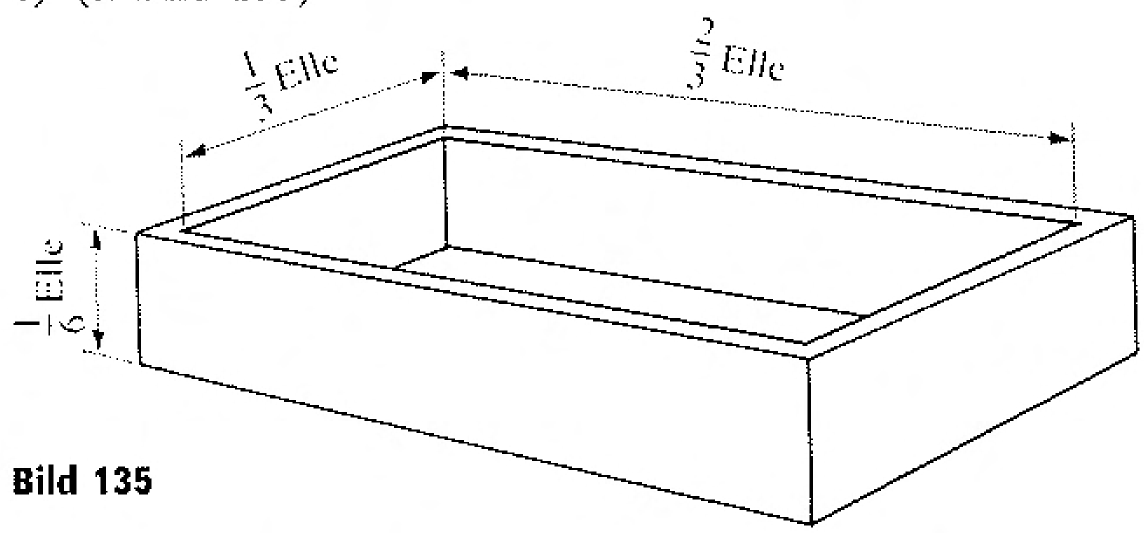


Bild 135

c) Ganzstein: $V = \left(\frac{2}{3} \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 \cdot \frac{1}{6} \cdot 5\right) \text{dm}^3 = 9\frac{7}{27}\,\text{dm}^3$

Halbstein: $V = 4\frac{17}{27}\,\text{dm}^3$

d) Ganzstein: $m = V \cdot \gamma = 9{,}26 \cdot 1{,}21$ kg $\approx 11{,}2$ kg
Halbstein: $m \approx 5{,}6$ kg

38

Es gilt $V = \frac{h}{3}(A_1 + A_2 + \sqrt{A_1 \cdot A_2}) = \frac{h}{3}(a^2 + b^2 + ab)$ und

$b = a - 2h$. Wegen $\frac{1}{2}$ Gar $= 6$ Ellen und 20 Gar $= 240$ Ellen folgt daraus $b = 228$ Ellen.

$$V = \frac{6}{3}(240^2 + 228^2 + 240 \cdot 228) \text{ Kubikellen;}$$

$$V = 328\,608 \text{ Kubikellen.}$$

39

a) $V = \frac{\pi d^2}{4} \cdot h$. Mit $h = d = 5$ cm gilt $V = \frac{\pi \cdot 5^3}{4}\,\mathrm{dm}^3 \approx 98\,\mathrm{cm}^3$.

Der Rauminhalt des Gefäßes beträgt etwa 98 dm³.

b)

(1) $V = \frac{\pi h}{12}(d_1^2 + d_1 d_2 + d_2^2)$. Mit $d_1 = 3d$ und $d_2 = d$ gilt

$$V = \frac{\pi h}{12}(9d^2 + 3d^2 + d^2) = \frac{13}{12}\pi h d^2;$$

$$V = \frac{13}{12} \cdot \pi \cdot 3 \cdot 0{,}17^2\,\mathrm{m}^3 \approx 0{,}295\,\mathrm{m}^3 \approx 300\,\mathrm{dm}^3.$$

Das Fassungsvermögen des Behälters beträgt rund 300 dm³.

(2) $\frac{13}{12}\pi h d^2 : \pi h d^2 = 13 : 12;$

$$\frac{13 - 12}{12} = \frac{1}{12} \approx 0{,}08; \text{ das sind } 8\,\%.$$

40

$$V_R = V_Q - \frac{1}{2} V_Z; \quad V_Q = x^2 b; \quad V_Z = \frac{\pi(x - 2a)^2 \cdot b}{4};$$

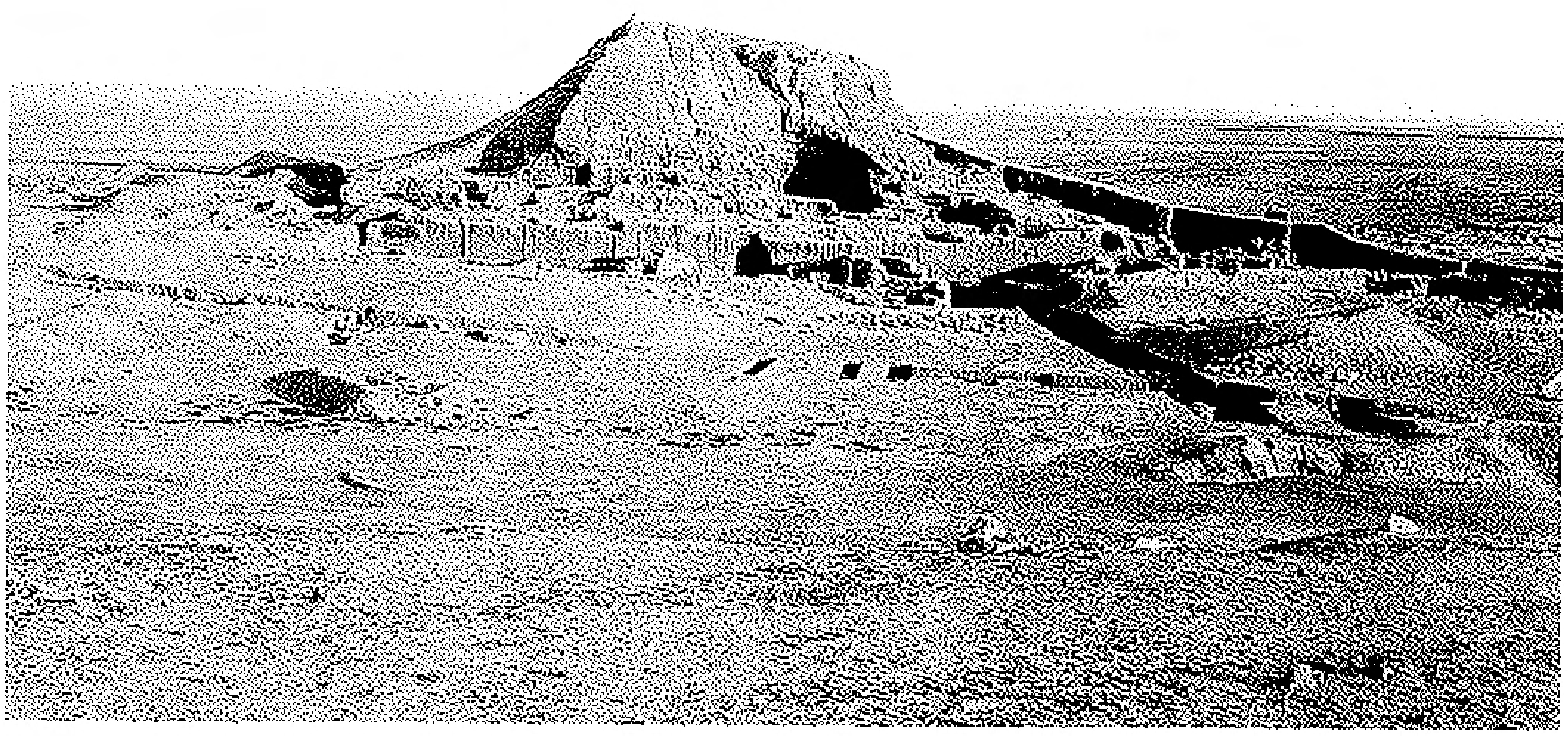


Bild 136
Ausgrabungsfeld Babylon. Archivfoto
Mit freundlicher Genehmigung der Staatlichen Museen zu Berlin

$$V_R = x^2b - \frac{\pi(x-2a)^2 \cdot b}{4} = \left[6^2 \cdot 12 - \frac{\pi(6-4)^2 \cdot 12}{4}\right] \text{ Kubikellen}$$
$$= 413{,}15 \text{ Kubikellen.}$$

Der Restkörper hat ein Volumen von 413,15 Kubikellen.

41

a) Aus $g : k = 1 : 9$ und $g + k = 60$ Gin folgt $g = 60 - k$ und $(60 - k) : k = 1 : 9$; $g = 6$ Gin und $k = 54$ Gin.
Der Becher enthält 6 Gin Gold und 54 Gin Kupfer.

b) $g = 6 \cdot 8{,}417\ g \approx 50{,}5\ g$; $\quad k = 54 \cdot 8{,}417\ g \approx 454{,}5\ g$.
Der Becher enthält 50,5 Gramm Gold und 454,5 Gramm Kupfer.

42

Angenommen der erste der Brüder erhielt x Schekel. Wegen $a_k = a_1 - (k-1)d$ gilt $6 = x - 7 \cdot \frac{8}{5}$, also $x = 17\frac{1}{5}$.

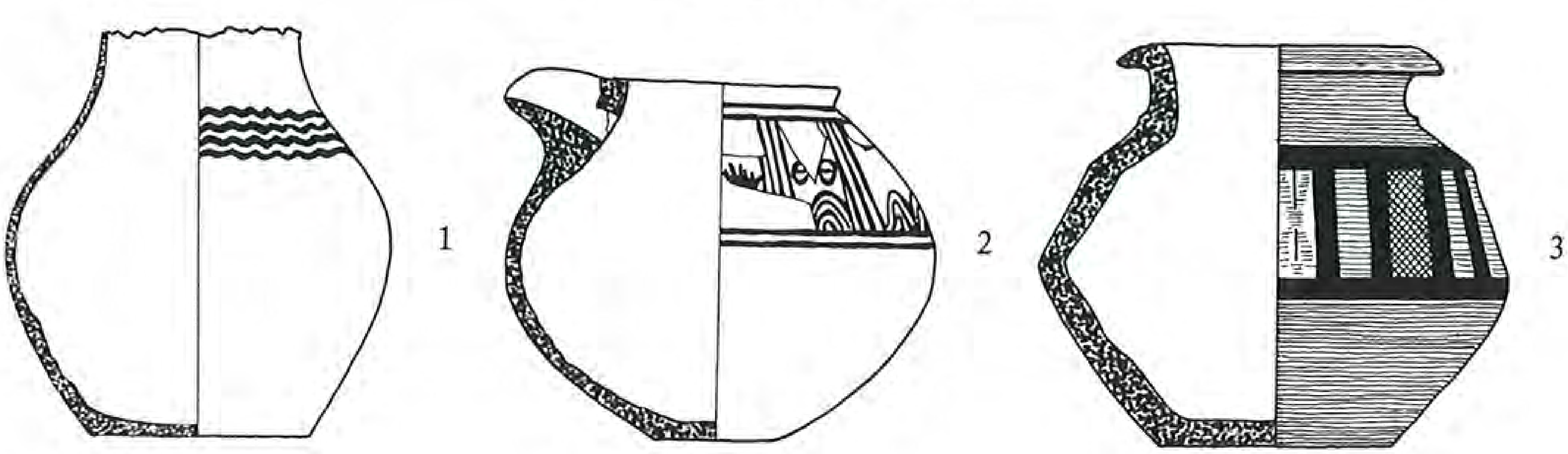
Die zehn Brüder erhielten $17\frac{1}{5}$, $15\frac{3}{4}$, 14, $12\frac{2}{5}$, $10\frac{4}{5}$, $9\frac{1}{5}$, $7\frac{3}{5}$, 6, $4\frac{2}{5}$ bzw. $2\frac{4}{5}$ Schekel.

43

Ist x die Anzahl der Äpfel, die die Frau geerntet hat, so erhält der erste Wächter $\frac{x}{2}$, der zweite $\frac{x}{4}$, der dritte $\frac{x}{8}$ und der vierte $\frac{x}{16}$ Äpfel. Nun gilt $\frac{x}{10} = 10$, also $x = 160$.

Die Frau hat 160 Äpfel geerntet.

Bild 137
Keramikvasen aus der Zeit um 3000 v. u. Z.



44

Anzahl der Tiere: 4 Masthammel, 38 kleine Lämmer, 117 Hammel, 221 Schafe, 11 Böcke, 88 Ziegen, 281 Lämmer, 139 Jungziegen, 20 Zicklein.

45

Das Einkerben von Holz oder Knochen bildet ebenso wie das Anlegen von Steinhäufchen oder Häufchen aus anderen Gegenständen den Ursprung des Zählens. Es ist also nicht erforderlich, über einen abstrakten Zahlbegriff zu verfügen, um Zählen zu können. Der Besitzer dieser Tonbörse konnte also jederzeit den Bestand seiner Herde feststellen, indem er für jedes Tier ein Steinchen beiseite legte, eine Art von Buchführung, die das Gedächtnis nicht beanspruchte.

Übrigens: Bis heute hat sich diese Art zu zählen erhalten, z. B. bei der »Fünferbündelung« auf der Rückseite von Bierdeckeln.

Bild 138
Mittlerer Euphrat mit Resten der römischen Wasserleitung für Samosata
Mit freundlicher Genehmigung der Freien Universität Berlin, Seminar für Vorderasiatische Altertumskunde

Literaturverzeichnis

Das nachfolgende Gesamtliteraturverzeichnis gibt dem Leser Standardliteratur für alle sechs Bände von »4000 Jahre Mathematik in Aufgaben«.

Das Bamberger Blockbuch (Reprint). Rechenbuch aus dem 15.Jh. München/New York/Paris 1980

Basmakowa, I.G.: Diophant und die diophantischen Gleichungen. Berlin 1974

Becker, O.: Das mathematische Denken der Antike. Göttingen 1957

Becker, O.: Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung. München 1964

Bell, E.T.: Die großen Mathematiker. Düsseldorf 1967

BI-Lexikon: *Kahnt, H./B.Knorr:* Alte Maße, Münzen und Gewichte. Leipzig 1986

BI-Lexikon: Herausg. *R.Koch:* Uhren und Zeitmessung. Leipzig 1987

Biermann, K.-R.: Die Mathematik und ihre Dozenten an der Berliner Universität, 1810–1920. Berlin 1973

Biographien hervorragender Naturwissenschaftler, Techniker und Mediziner. Von den 80 Bänden, im B.G.Teubner-Verlag Leipzig erschienen (seit 1967), seien genannt:
Wußing: C.F.Gauß. *Hoppe:* Johannes Kepler. *Schmutzer/Schütz:* G.Galilei. *Brentjes/Brentjes:* Ibn Sina. *Ilgauds:* N.Wiener. *Tobies:* F.Klein, *Thiele:* L.Euler. *Stolz:* O.Hahn und L.Meitner. *Hamel:* F.W.Bessel. *Grabow:* Simon Stevin. *Purkert/Ilgauds:* Georg Cantor. *Wußing:* Adam Ries.

Böschenstain, J.: Ain neu geordnet Rechenbuchlein mit den zyffern, Augsburg 1518 (Reprint). Dresden 1983

Bourbaki, N.: Elemente der Mathematikgeschichte. Göttingen 1971

Cantor, M.: Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. 4 Bände. New York/Stuttgart 1965

Conrad, W.: Vom Jakobsstab zur Satellitennavigation. Leipzig/Jena/Berlin 1979

Davis, P./H.Reuben: Erfahrung Mathematik. Basel/Boston/Stuttgart 1986

Deweß, M./G.Deweß: Summa summarum. Kostproben unterhaltsamer Mathematik. Leipzig 1987

Deubner, F.: ... Nach Adam Ries. Leben und Wirken des großen Rechenmeisters. Leipzig/Jena 1959

Dieudonné, J.: Geschichte der Mathematik 1700 bis 1900. Berlin 1985

Drinfel'd, G.I.: Quadratur des Kreises und Transzendenz von π. Berlin 1980

Euklid: Die Elemente. Buch I–XIII. Leipzig 1984

Fieder, R.: Streifzüge durch die Mathematik. Mathematikaufgaben aus 4 Jahrtausenden. Berlin 1984

Gauß, C.F.: Wissenschaftliches Tagebuch, 1796 bis 1814. Leipzig 1975

Gericke, H.: Mathematik in Antike und Orient. Berlin/Heidelberg/New York/Tokio 1984

Hankel, H.: Zur Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter. Hildesheim 1965

Heermann, Ch.: Von der Zahl zum Gesetz. 1974

Herrmann, D.B.: Vom Schattenstab zum Riesenspiegel. Berlin 1978

Hofmann, J.E.: Geschichte der Mathematik. Teil 1 bis 3. Berlin 1953 bis 1957

Hogben, L.: Die Entdeckung der Mathematik. Stuttgart 1963

Hülm, Ch./S. Pietzsch: Vom Kerbholz zum Computer. Aus der Geschichte der Rechentechnik. Berlin 1988

Ifrah, G.: Universalgeschichte der Zahlen. Frankfurt/M./New York 1987

Ignatjew, E.I.: Mathematische Spielereien (aus dem Jahre 1908). Leipzig/Moskau 1978

Jentsch, W.: Michael Stifel, Leipzig 1987

Juschkewitsch, A.P.: Geschichte der Mathematik im Mittelalter. Leipzig 1964

Kaden, F.: Kleine Geschichte der Mathematik. Berlin 1987

Kaiser, H./W.Nöbauer: Geschichte der Mathematik für den Schulunterricht. Wien/München 1984

Kleffe, H.: Menschen messen Jahr und Tag. Berlin 1985

Klein, F.: Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19.Jahrhundert. Reprint in einem Band. Berlin/Heidelberg/New York 1979

Kolosow, A.A.: Kreuz und quer durch die Mathematik. Interessante mathematische Probleme – wie sie entstanden, wie sie gelöst wurden, was sie für die heutige Mathematik bedeuten. Berlin 1963

Konforowitsch, A.G.: Guten Tag, Herr Archimedes. Unterhaltsame Mathematikaufgaben vom Altertum bis zur Gegenwart. Leipzig 1986

Krysicki, W.: Zählen und Rechnen einst und jetzt. Leipzig 1968

Kuhrt, H./A.Kutschmar: Baustilfibel. Berlin 1984

Lietzmann, W.: Der Pythagoreische Lehrsatz. Leipzig 1968

Lietzmann, W.: Riesen und Zwerge im Zahlenreich. Leipzig 1969

Lietzmann, W.: Altes und Neues vom Kreis. Leipzig 1966

Life (Autorenkollektiv): Wunder der Wissenschaft: Die Mathematik. Niederlande 1969

Mainzer, K.: Geschichte der Geometrie. Mannheim/Wien/Zürich 1980

Menninger, K.: Zahlwort und Ziffer. Eine kleine Kulturgeschichte der Zahlen. Göttingen 1958

Meschkowski, H.: Problemgeschichte der Mathematik. 2 Bände. Mannheim/Wien/Zürich 1979/81

Miller, M.: Gelöste und ungelöste mathematische Probleme. Leipzig 1973

Neugebauer, O.: Vorlesungen über Geschichte der antiken mathematischen Wissenschaften; Bd.1 Vorgriechische Mathematik. Berlin/Heidelberg/New York 1969

Nikiforowski, W.A./L.F.Freiman: Wegbereiter der neuen Mathematik. Leipzig/Moskau 1976

Padelt, E.: Mit dem Meßrad um die Welt. Kleine Geschichte von der Kunst des Messens. Berlin 1989

Pieper, H.: Heureka – Ich hab's gefunden. 55 historische Aufgaben der Elementarmathematik mit Lösungen. Berlin 1988

Popp, W.: Geschichte der Mathematik im Unterricht. 2 Bde. München 1968

Resnikoff, H.L./R.O.Wells Jr.: Mathematik im Wandel der Zeiten. Braunschweig/Wiesbaden 1983

Schäfer, J.Ch.: Die Wunder der Rechenkunst. Eine Zusammenstellung der rätselhaftesten und belustigendsten arithmetischen Kunstaufgaben. Berlin 1985

Schreiber, P.: Die Mathematik und ihre Geschichte im Spiegel der Philatelie. Leipzig 1980

Schröder, E.: Dürer – Kunst und Geometrie. Berlin 1980

Smogorschewski, A.S.: Lobatschewskische Geometrie. Leipzig 1978

Struik, D.J.: Abriß der Geschichte der Mathematik. Berlin 1976

Thiele, R.: Die gefesselte Zeit. Spiele, Spaß und Strategien meist aus historischer Sicht. Leipzig 1984

Autorenkollektiv: Streifzüge durch die Mathematik. 2 Bde. Leipzig 1965/66

Szabo, A.: Anfänge der griechischen Mathematik. Budapest/Berlin 1969

Tietze, H.: Gelöste und ungelöste mathematische Probleme aus alter und neuer Zeit. München 1982

Tropfke, J.: Geschichte der Elementarmathematik. Bd.1 bis 7, Berlin 1980

Vogel, K.: Vorgriechische Mathematik. 2 Bde. Hannover/Paderborn 1958/59

Vogel, K.: Chiu Chang Shu. Neun Rechenbücher arithmetischer Technik. Ein chinesisches Rechenbuch. Braunschweig 1968

Vogel, K./H.Hunger: Ein byzantisches Rechenbuch des 15.Jahrhunderts. 100 Aufgaben aus dem Codex Vindobonensis, Wien 1963

Waerden, B.L. van der: Erwachende Wissenschaft. Ägyptische, babylonische und griechische Mathematik. Basel/Stuttgart 1956

Wagner, U.: Das Bamberger Rechenbuch von 1483 (Reprint). Berlin 1988

Wußing, H. (Autorenkollektiv): Geschichte der Naturwissenschaften. Leipzig 1983

Wußing, H.: Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik. Berlin 1979

Wußing, H./H.Remane: Wissenschaftsgeschichte en miniature. Berlin 1989

Wußing, H./W.Arnold: Biographien bedeutender Mathematiker. Berlin 1989

Zilch, R.: Auf Mark und Pfennig. Berlin 1986

Sechs Bände zum Lesen und Lösen

Johannes Lehmann, Jahrgang 22, tritt mit 23 Jahren in den Schuldienst ein. Sein Herz schlägt für die Mathematik; er leitet Hobby-Matheclubs, Begabtenseminare, engagiert sich als Mathe-Mentor für die Unterhaltungsmathematik im Unterricht; er kurbelt die ersten deutschen Mathematik-Olympiaden an und demonstriert in über 1 800 Vorträgen, wie man Probleme der Schulmathematik kurzweilig präsentiert. Zwanzig Jahre lang steht er der mathematischen Schülerzeitschrift »alpha« als Chefredakteur vor und gilt mit neun Büchern als angesehener Promotor der Unterhaltungsmathematik.
Foto: W. Reinhold, Leipzig

Ein Abenteuer für Geist und Hand, das war die Mathematik für Gelehrte, Techniker und Handelsfahrer aller Zeiten.

Im Babylonischen Reich und im alten Ägypten entdeckten Priester, Schreiber und Architekten die ersten Zahlensysteme und Rechenmethoden für den Alltag.

Die Griechen erfanden den Beweis, sie gaben der Mathematik das Fundament. Ihre großartige Geometrie bewundern wir noch heute. In den Jahrhunderten römischer Dominanz stand die Mathematik im Dienste von Wirtschaft, Verwaltung und Verkehr der Eroberer. Ein beschwerliches Zahlensystem dämpfte die mathematische Entwicklung.

Über die Seidenstraße lief ein reger Kulturaustausch. Auch mathematische Kostbarkeiten gingen zwischen China, Indien und Arabien hin und her. Die Europäer erbten später im Gefolge von Handel und Krieg die Früchte orientalischer mathematischer Hochkultur.

Das Zeitalter der geographischen Entdeckungen und Eroberungen begründete den europäischen Wohlstand, ermöglichte den Ausbau von Welthandel, bürgerlicher Bildung und Manufakturwirtschaft. Die Mathematik verließ die Klosterenge und ging über die Rechen- und Schulmeister auf See und in die Handwerksbetriebe.

Astronomie und Physik initiierten nun die Naturwissenschaften und ihren mathematischen Welterfolg, die Mechanik. Es schlug die Geburtsstunde der akademischen Berufsmathematiker wie Bernoulli, Euler und Gauß.

Unser geschichtliches Aufgaben-Abenteuer endet mit volkstümlichen Problemen der heutzutage hochdifferenzierten Mathematik. Leute wie Klein, Cantor, Steinhaus oder Einstein kommen zu Wort; sie waren die akademischen Lehrer einer neuen Generation mathematischer Talente. Unsere reich bebilderte historische Mathematikaufgabensammlung ist in Europa einmalig.

Und so heißen die sechs Bände:

So rechneten Ägypter und Babylonier
So rechneten Griechen und Römer
So rechneten Chinesen, Inder und Araber
So rechneten Mönche, Rechen- und Schulmeister
So rechneten Künstler und Gelehrte
So rechnete unser Jahrhundert