Teil 1

So rechneten Ägypter ~~und Babylonier~~

Johannes Lehmann

Urania

4000 JAHRE MATHEMATIK IN AUFGABEN

Teil 1

So rechneten die Ägypter

Aus technischen Gründen ist

Teil 2

So rechneten die Babylonier

eine eigene Datei

Johannes Lehmann

So rechneten Ägypter und Babylonier

Reinhardt Becker Verlag

J. Lehmann - So rechneten Ägypter und Babylonier
ISBN 3-930640-10-4

Titelfotos:
Die Pyramiden von Giseh (Gisela Boldt, Leipzig)
Die Statue des Gudea, eines Herrschers von Lagesch
(Archiv des Autors)

Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme
Lehmann, Johannes:
4000 Jahre Mathematik in Aufgaben / Johannes Lehmann. –
Leipzig ; Jena ; Berlin : Urania-Verl.
ISBN 3-332-00522-7
NE: Lehmann, Johannes: Viertausend Jahre Mathematik

Bd. 1. So rechneten Ägypter und Babylonier. – 1. Aufl. – 1994
ISBN 3-332-00523-5

ISBN 3-332-00523-5

1. Auflage 1994

Urania-Verlag Leipzig · Jena · Berlin, 1994
Zeichnungen: K.-H. Barnekow, Leipzig
Buchgestaltung: Dietmar Senf, Helmut Tracksdorf, Leipzig
Satz und Druck: INTERDRUCK Leipzig GmbH
Printed in Germany

Inhalt

Zum Geleit

Staunen – wundern – mitmachen!

Als Schüler einer Oberrealschule in Leipzig lernte ich im Mathematikunterricht ein Lehrbuch kennen und schätzen, das ich noch heute besitze und hüte. Es war der »Lietzmann« (1. Auflage 1912), ein ausgereiftes, altbewährtes Buch für die Hand des Schülers. Das Lehrbuch beschäftigt sich unter anderem mit Aufgaben aus der Physik, der Astronomie, mit Bewegungsaufgaben, Prozent- und Zinsrechnungen, Scherzen und Rätseln. Letztere weckten immer wieder von neuem mein besonderes Interesse. Bis heute hat sich die Vorliebe für diese heitere Art der Mathematik erhalten. Dies zeigen zudem meine neun Bücher zur Unterhaltungsmathematik. So betrachtete ich es auch als Chefredakteur der mathematischen Schülerzeitschrift »alpha« als einen Schwerpunkt, unterhaltsame Aufgaben oder Beiträge zu schaffen. Die Leser zeigten sich dankbar dafür.

In »meinem Lietzmann« gab es zudem durch alle Schuljahre fortschreitende Kapitel zum Thema »Aufgaben aus alter Zeit«. Dieses Gebiet hat mich besonders gefesselt und eigentlich mein ganzes Leben nicht mehr losgelassen.

Als ich am 13. Dezember 1945 als »Neulehrer« wieder in eine Schulstube trat, hatte ich den »Lietzmann« erneut unter dem Arm, denn neue Lehrbücher gab es noch nicht. Natürlich erinnerte ich mich an die »Rätsel und Scherze«, an die »Aufgaben aus alter Zeit«. Das Lösen historischer Aufgaben sowie die Geschichte der Mathematik fügte ich in meiner 40jährigen Lehrpraxis im Unterricht und als Leiter von Arbeitsgemeinschaften ein. Die Schüler begegneten meinem »Hobby« mit sichtbarem Wohlwollen. Da mein Vorrat an Aufgaben sehr bald nicht mehr reichte, begab ich mich auf ständige Suche nach mathematischen Aufgaben aus der Geschichte der Menschheit. Geradezu wahre Fundgruben boten drei Einrichtungen Leipzigs für mich: die Universitätsbibliothek, die Comenius-Bücherei und die Deutsche Bücherei. Im Ägyptischen Museum der Universität legte man mir ein Buch mit allen Aufgaben aus dem »Papyrus Rhind« vor. Auch im nahen und weiteren Umfeld fand ich viele Beispiele. So wuchs mein Fundus historischer Aufgaben, die ihren Platz fanden neben solchen Sammlungen wie »Ungleichungen«, »Gute Grundkenntnisse gefragt«, »Symmetrie«, »2 × 2 plus Spaß dabei«.

Auch im Rahmen der Lehrerweiterbildung, in Seminaren mit Studenten, bei Vorträgen als Gast der »Urania« fanden meine Ausführungen Resonanz. Sehr häufig wurde ich angesprochen, meine Sammlungen zu veröffentlichen. Der Urania-Verlag ebnete mir den Weg, eine Dokumentation historischer Aufgaben zu erstellen. Mein Ziel war es auch dabei, Verständnis für die Größe vergangener Kulturen zu fördern. 15 Jahre lang sammelte und ordnete ich. Den Ereignissen des Jahres 1989 ist es geschuldet, daß sich mir neue Quellen u. a. durch die Universitäten in Basel, München, Neapel, Paris, London und Cambridge erschlossen.

Aus über 1000 Aufgaben ernster und heiterer Natur, geringen und anspruchsvollen Niveaus, wählte ich rund 600 aus für Schüler, Lehrer, Studenten, für Hobbymathematiker, die es sind oder werden möchten – also für Unterricht und Freizeit gleichermaßen. Das Buch soll in erster Linie Freude am Denken und das Bewußtsein vermitteln, daß unser heutiger Erkenntnisstand nicht denkbar wäre ohne herausragende geistige Leistungen von Wissenschaftlern vergangener Generationen.

Mein Dank gilt all denen aus nah und fern, die mich bei der Arbeit am Buch unterstützten. Besonders seien meine langjährigen Freunde H. Begander, A. Körner, Th. Scholl, R. Thiele und natürlich der Verlagslektor K. Haase genannt, die mir stets mit tätiger Hilfe Beistand leisteten.

Nun ist es an Ihnen, werter Leser, historische Aufgaben zu lösen. Vielleicht sind sie Ansporn, selbst einmal auf die Suche zu gehen nach »Aufgaben aus alter Zeit«.

Johannes Lehmann

Leipzig, im Januar 1994

Bild 1
Teilansicht des Jubiläums-tempels bei Sakkara
Foto: Gisela Boldt, Leipzig

So rechneten die Alten Ägypter

Dr. R. Thiele und K. Haase

Entweder der Nil oder das Nichts, weiß ein altes ägyptisches Sprichwort. Es charakterisiert den Nil als Lebensnerv einer der ältesten Zivilisationen. Die Wasserregulierung in seiner fünf bis 20 Kilometer breiten äußerst fruchtbaren Schwemmlandebene bot seit unvordenklichen Zeiten die Lebensgrundlage der ägyptischen Gesellschaft. Sie bestimmte so offensichtlich Technik, Verwaltung, Politik, Religion, Kunst und Wissenschaft, daß bereits Hekataios von Milet, einer der frühesten Geschichtsschreiber, im Lande der Ägypter ein Geschenk des Nils sah.

Die atemberaubenden Kulturzeugnisse des alten Ägypten haben phantasievolle, dem Weltsinn nachspürende Geister seit eh und je angezogen. Die Pyramiden zählten zu den Sieben Wundern der antiken Welt. Einst bestaunte sie Thales von Milet – und brachte ägyptisches Wissen nach Griechenland. Etwa 2 500 Jahre später zogen sie Napoleon Bonaparte in ihren Bann, mit dessen Ägypten-Expedition die geheimnisvolle altägyptische Welt ins europäische Bewußtsein rückte und zur wissenschaftlichen Rekonstruktion inspirierte: Es entstand die moderne Ägyptologie.

Das Alter der ägyptischen Kultur entzieht sich beinahe unserer Anschauung: Als Menes (etwa 3 100 v. u. Z.) beide Reiche vereinigte, begann mit der Abfolge von 30 Herrscherdynastien eine nahezu ungebrochene geschichtliche Kontinuität. Nur dreimal, in den sogenannten Zwischenzeiten, bröckelte die einheimische Zentralgewalt, konnten fremde Kulturen die Herrschaft übernehmen.

Schon zur Zeit des Menes verfügten die Ägypter über eine Schrift, die Hieroglyphen, und ein Obelisk aus dieser Zeit offenbart uns ein gediegenes Zahlenverständnis, enthält er doch Zahlenangaben bis zur Million!

Unsere Einblicke in die altägyptische Mathematik haben eine der aufregendsten wissenschaftlichen Leistungen des 19. Jahrhunderts zur Voraussetzung, die Entschlüsselung der Hieroglyphen durch Jean François Champollion (1790–1832). Wir kennen zwar nur wenige Papyrusrollen mathematischen Inhalts, so den berühmten »Moskauer Papyrus« oder den »Papyrus Rhind«, die beide der Periode des »Mittleren Reiches« (2040–1875 v. u. Z.) entstammen. Das überlieferte Gesamtbild altägyptischer Geistesgeschichte be-

Bild 2
Bunt bebommeltes Kamel vor der Cheops-Pyramide (2551–2528 v. u. Z.). Sie besteht aus ca. 2,3 Millionen Quadern, jeder $2\frac{1}{2}$ Tonnen schwer.
Foto: Gisela Boldt, Leipzig

Bild 3
Der Sphinx von Giseh. Im Hintergrund die Cheops-Pyramide
Foto: Gisela Boldt, Leipzig

stärkt uns aber in folgendem Bild: Über fast viertausend Jahre hat sich die altägyptische Mathematik nicht verändert. Anders als die weltoffenen Reiche an Euphrat und Tigris, schloß sich Ägypten weitgehend von seiner Umwelt ab. Eine zentrale Verwaltung mit einem Gottkönig an der Spitze sicherte die Beständigkeit des gesellschaftlichen Lebens und Denkens in der Isolation und überstand, wie gesagt, auch anarchische Zwischenzeiten.

Wie haben die Ägypter über vier Jahrtausende gedacht und gerechnet? Nehmen wir zu einem Vergleich Zuflucht: beinahe wie heutzutage die Schüler der achten Klasse. Ein geringes Wissen? Täuschen Sie sich nicht – man kann damit eine Menge anfangen. Immerhin bauten die Ägypter in nur zwei Jahren mit 100 000 Menschen die Cheopspyramide, die mit fast 150 Metern bis ins europäische Mittelalter hinein das höchste Bauwerk der Erde blieb. Für den Koloß karrten sie rund zwei Millionen Quader aus Steinbrüchen vom anderen Nilufer heran. Die Grabkammerplatten, eine jede wiegt etwa 50 Tonnen (!), wurden sogar Hunderte Kilometer nilabwärts transportiert. Nicht nur die bautechnische Leistung ringt Bewunderung ab, auch die Logistik des Unternehmens beeindruckt.

Ist dies ein Grund für die vielerlei Mythen, die sich auch heutzutage um die Pyramiden ranken, manche davon ebenso zählebig wie mathematikhistorisch unsinnig? Haben die Alten Ägypter tatsächlich die Kreiszahl Pi in den Verhältnissen der Cheopspyramide verewigt? Welch eine Vision! Aber sie ist nachträglich aufgesetzt. Die von zeitgenössischen Cheops-Numerologen genannten Näherungswerte von Pi sind einfach zu gut für die Alten Ägypter. Die haben nämlich die Kreisfläche mit 64/81 des über dem Kreisdurchmesser errichteten Quadrats angegeben. Das führt zwar beachtlicherweise auf einen Rechenfehler von kleiner als 1 %, aber andererseits zu wesentlich ungenaueren Ergebnissen als den legendenstrickenden »Pyramidenforschern« recht sein kann. Und mit anderen Werten, als dem für Pi in Aufgabe 48 des »Papyrus Rhind« angegebenen, haben die Ägypter in den viertausend Jahren nicht gerechnet!

Das hieroglyphische Zahlensystem, das an Tempeln und Obelisken zu finden ist, benutzt sieben Zeichen, mit denen alle Zahlen bis 10 Millionen geschrieben werden konnten. Für das praktische Rechnen wurden die hieroglyphischen Zeichen auf eine Schreibschrift verkürzt. Viele neue Zahlzeichen entstanden. Dem Aufbau schematischer Rechenprozeduren ist dieser Prozeß, Verzifferung der Zahlzeichen genannt, nicht dienlich gewesen. Auch die altägyptische Bruchrechnung führte in eine Sackgasse, besser, man ging in eine Art Bezeichnungs-Falle: Die natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ... ließen sich notieren, durch Überstreichen dieser Zahlen bildete man einfach Kehrwerte – wir sagen heute Stammbrüche dazu. Mit der Zahlreihe 1, 2, 3, ... konnten die Ägypter also auch die Reihe der Stammbrüche $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ ... aufschreiben. Auf andere Brüche aber kamen sie nicht, die ließen sich mit den beschriebenen Notationsweisen einfach nicht hinschreiben. Natürlich forderte die Praxis der Verwaltungsbeamten, Baumeister oder Landvermesser auch den Umgang mit Verhältnissen, die wir beispielsweise durch $\frac{3}{4}$ ausdrücken. Und so ging man einen äußerst komplizierten Umweg: Jeder solche Bruch mußte von den ägyptischen Rechnern als Summe von Stammbrüchen dargestellt werden. In unserem Beispiel ist das einfach, nämlich $\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$. Der Umweg führt allerdings bereits bei relativ harmlosen Brüchen auf Stammbrüche mit Nennern nahe der Tausend.

Bild 4
Eine Aufnahme der Cheopspyramide, die die Größe der zum Bau verwendeten Quader zeigt.
Foto: G. Boldt, Leipzig

Versuchen Sie einmal, um die Rechenleistung der Alten Ägypter richtig zu würdigen, $\frac{2}{89}$ als Summe von Stammbrüchen auszudrükken. Wir geben Ihnen die Lösung am Schluß der Seite 75 an!

Im Anfang war das Wort – das ist uralte Weisheitslehre. Setzen wir für Wort das mathematische Wort – die sinnreiche Abkürzung, die Zahl, die Formel –, dann wird am Beispiel der ägyptischen Brüche klar, daß die Entwicklung des mathematischen Denkens bis hin zur Theorie von geeigneten Schreibweisen abhängt.

Auf eine mathematische Theorie in heutiger Bedeutung haben es die Alten Ägypter nicht gebracht. »Theorie als den Zitatenschatz für alle Eventualitäten« müssen sie aber gekannt haben, denn sie trainierten ihre Rechenkünste an reichlich unpraktischen, also wenig alltagsnahen Aufgaben, denn die Genauigkeit der Ergebnisse hatte keine praktische Bedeutung (wie in unserem Beispiel 2/89). Einige ihrer Probleme haben als »Probierstein des Geistes« die Jahrtausende überlebt, wie etwa folgende Aufgabe, in der hemmungslos, bloß des Zähltrainings wegen, »Äpfel und Birnen« zusammengerechnet werden: In jedem der sieben Häuser sind sieben Katzen, von denen jede sieben Mäuse fängt, von denen jede sieben Ähren gefressen hat, was einem Verlust von je sieben Scheffeln pro Ähre entspricht – summa summarum 16 807.

Sie finden diese Aufgabe noch heute mit denselben Zahlen in einem englischen Kinderreim.

Wenn Sie sich nun altägyptischen Aufgaben hingeben, dann lassen Sie Ihren Taschenrechner beiseite. Verlassen Sie sich ganz auf Ihre grauen Zellen, seien Sie in wenigstens dieser Hinsicht ganz Altägypter. Das ist nur fair!

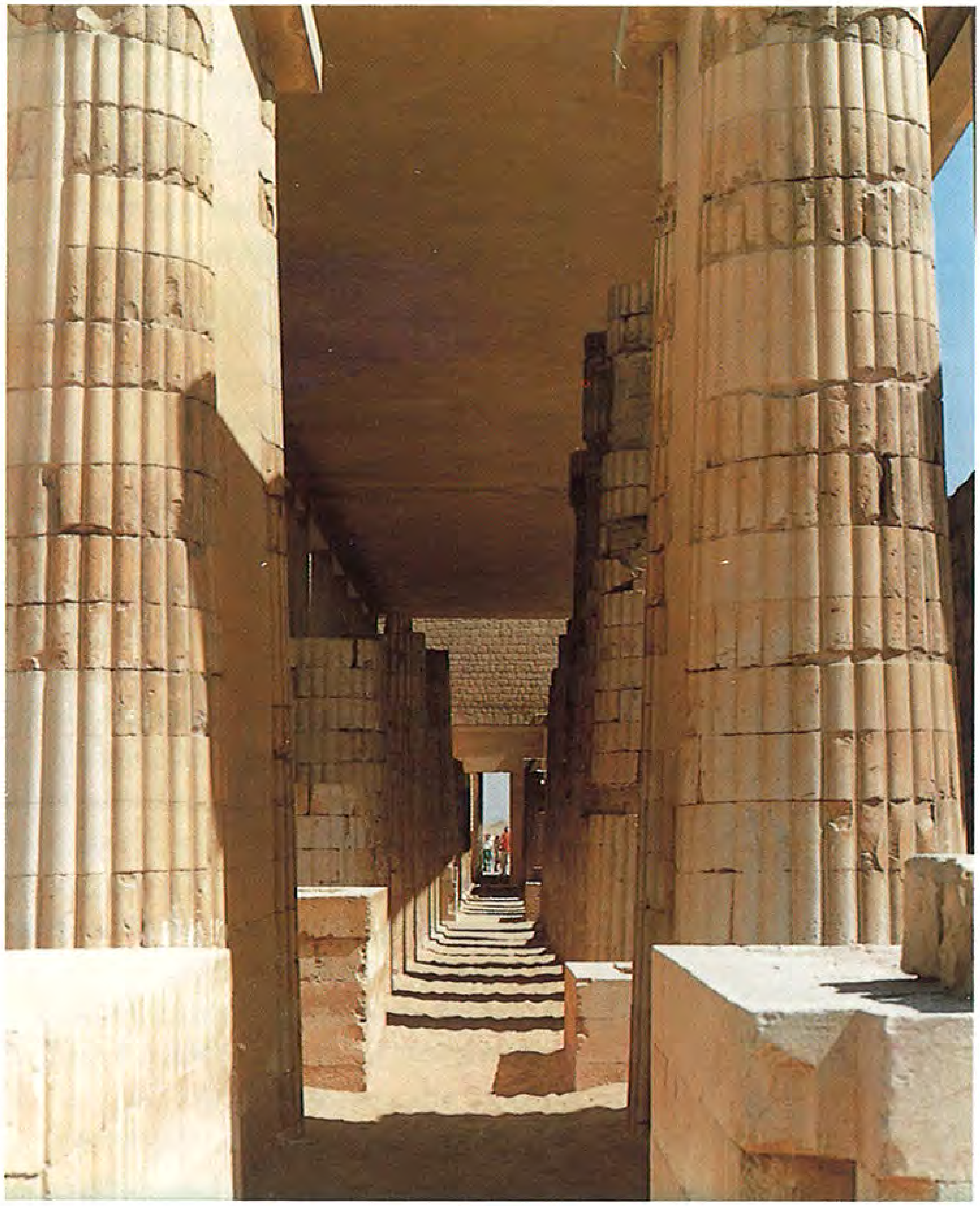
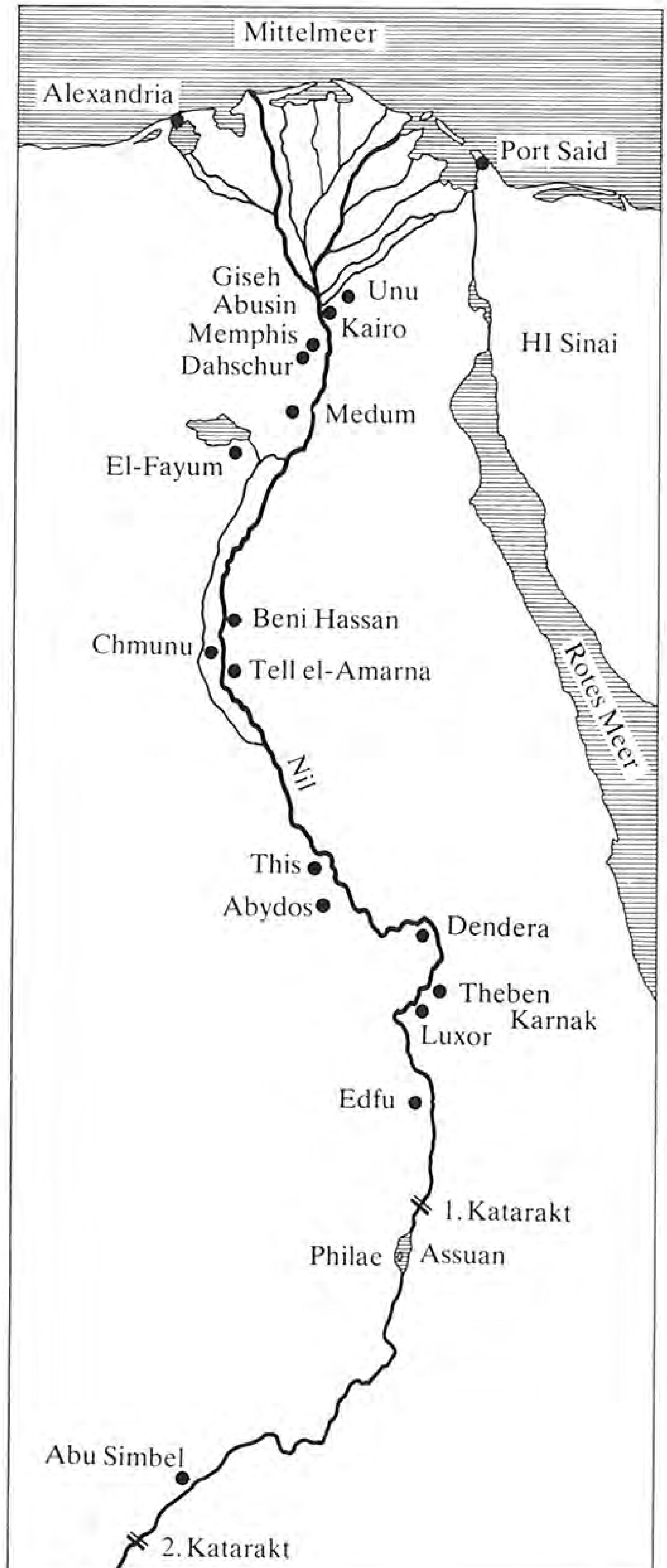


Bild 5
Als Weltwunder galt schon im Altertum der große Säulensaal im Amun-Tempel von Karnak. Auf 5 400 Quadratmetern stehen in 16 Reihen 134 Sandsteinsäulen, die teilweise bis zu 21 Metern hoch sind. Solche Säulen wurden gebaut, indem man aus Schutt und Steinen Arbeitsbühnen um die Säulen errichtete, die man schrittweise erhöhte und nach Fertigstellung der Säulen wieder abtrug.
Foto: Gisela Boldt, Leipzig

Bild 6
Karte von Ägypten



Zeittafel	Zeiteinteilung		Könige *(Hauptstadt)*	Mathematische Dokumente
		Vordynastische Zeit		
−3300				
	1. u. 2. Dyn.	Frühzeit	Menes, Narmer, Chaasechem *(This)*	Zahlzeichen
−2740				
	3. Dyn.		Zoser, Snofru,	
−2680		Altes Reich	Cheops, Chephren,	Grab des Meten
	4. Dyn.		Mykerinos	
−2560			*(Memphis)*	
	5./6. Dyn.			
−2270	------			Gewichte
	7./10. Dyn.	1. Zwischenzeit		Scheffelmaß
−2060				
	11. Dyn.		*(Theben)*	Holztafeln (Achmim)
−1995		Mittleres Reich		Mosk. Pap. (Urtext)
	12. Dyn.		Amenemhet III	Pap. Rhind (Urtext)
−1788	------			Pap. Kahun u. Theben
	13./17. Dyn.	2. Zwischenzeit Hyksos	3 Könige Apophis (letzter ca. 1595)	Mosk. Pap. (Original) Pap. Rhind (Original) Lederrolle
−1580				
	18. Dyn.		*(Theben)*	
−1335				
	19. Dyn.	Neues Reich		Pap. Anastasi I
−1205				
	20. Dyn.		Ramses II	Tempelinschrift Luksor
−1090	------		Ramses III	
			Ramses IX	
	21./25. Dyn.	3. Zwischenzeit		
−670	------	------		
		Assyrer 670−663		
−663				
	26. Dyn.	Saïtisches Reich	*(Saïs)*	
−525				
	27./31. Dyn.	Perser		
−332				
		Alexander d. Gr. u. Ptolemäer	*(Alexandria)*	Tempelinschriften Edfu
−30				
± 0		Römisches Reich und Byzanz		
+641				
		Araber		Papyrus Achmim

Aus: Kurt Vogel: Vorgriechische Mathematik, Hannover 1958

Die Aufgaben

... Wenn man einen Blick
auf die Jahrhunderte wirft, die vor ihrer
unerschütterlichen Masse verlaufen sind,
so wird die Seele von einem ehrfurchtsvollen,
unwillkürlichen Schauder ergriffen.
Seyd gegrüßt, ihr Überbleibsel
der sieben Wunder der Welt!
Geehrt sey die Macht des Volkes,
welches sie errichtete.

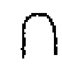
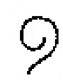
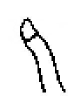
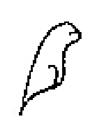
Cl. Ét. Savary, Reisender,
beim Anblick der Pyramiden (1777)

Bild 7
In der Unas-Pyramide (5. Dynastie) bei Sakkara wurden erstmals die Wände eines Pharaonengrabes mit Hieroglyphen bemalt.
Foto: Gisela Boldt, Leipzig

Die vier Grundrechenarten bei den Alten Ägyptern

Die Ägypter benutzten eine dekorative Zahlenschreibweise, die dezimal gegliedert war. Für die Zehnerpotenzen 10^0, 10^1, 10^2, ... aus denen sich durch Aneinanderreihung alle natürlichen Zahlen zusammensetzen lassen, verwendeten sie sogenannte Individualzeichen. Das war zwar übersichtlich, aber etwas mühsam.

Zahlenzeichen wurden in Hieroglyphen (griech. hieros: heilig; griech. glyphein: eingravieren) dargestellt; die Null war unbekannt. Alle Zahlen wurden von rechts nach links geschrieben. Nur ausnahmsweise wurde eine umgekehrte (rechtsläufige Schreibweise) verwendet.

$1 = 10^0$		Ein Merkstrich oder Zeigefinger
$10 = 10^1$		ein Bügel oder Huf
$100 = 10^2$		eine aufgerollte Meßschnur
$1\,000 = 10^3$		eine Lotosblume*
$10\,000 = 10^4$		ein gekrümmter Zeigefinger
$100\,000 = 10^5$		eine Kaulquappe*
$1\,000\,000 = 10^6$		der Gott der Unendlichkeit

* Lotosblumen und Kaulquappen kommen in großer Zahl in den Gewässern und Sümpfen Ägyptens vor.

1

a) Entziffern Sie folgende Zahlen!

(1) (2) (3) (4)

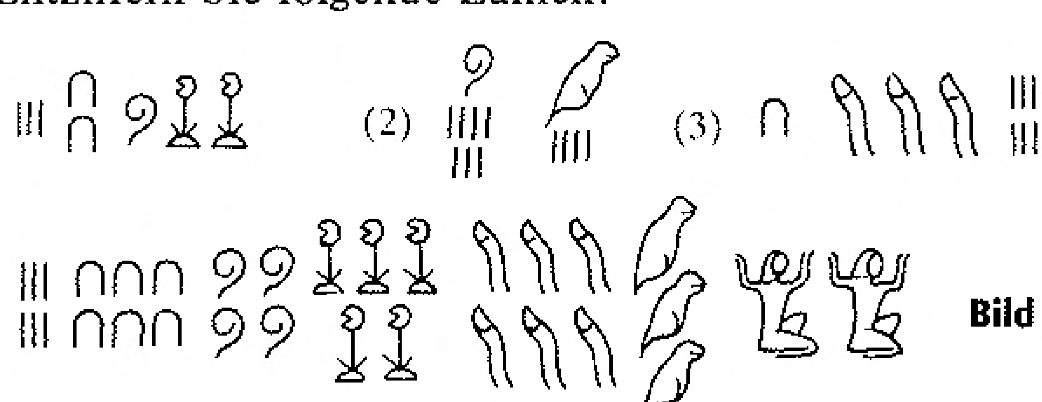


Bild 8

b) Schreiben Sie in ägyptischen Individualzeichen!

(5) 125; (6) 3 075; (7) 620 000

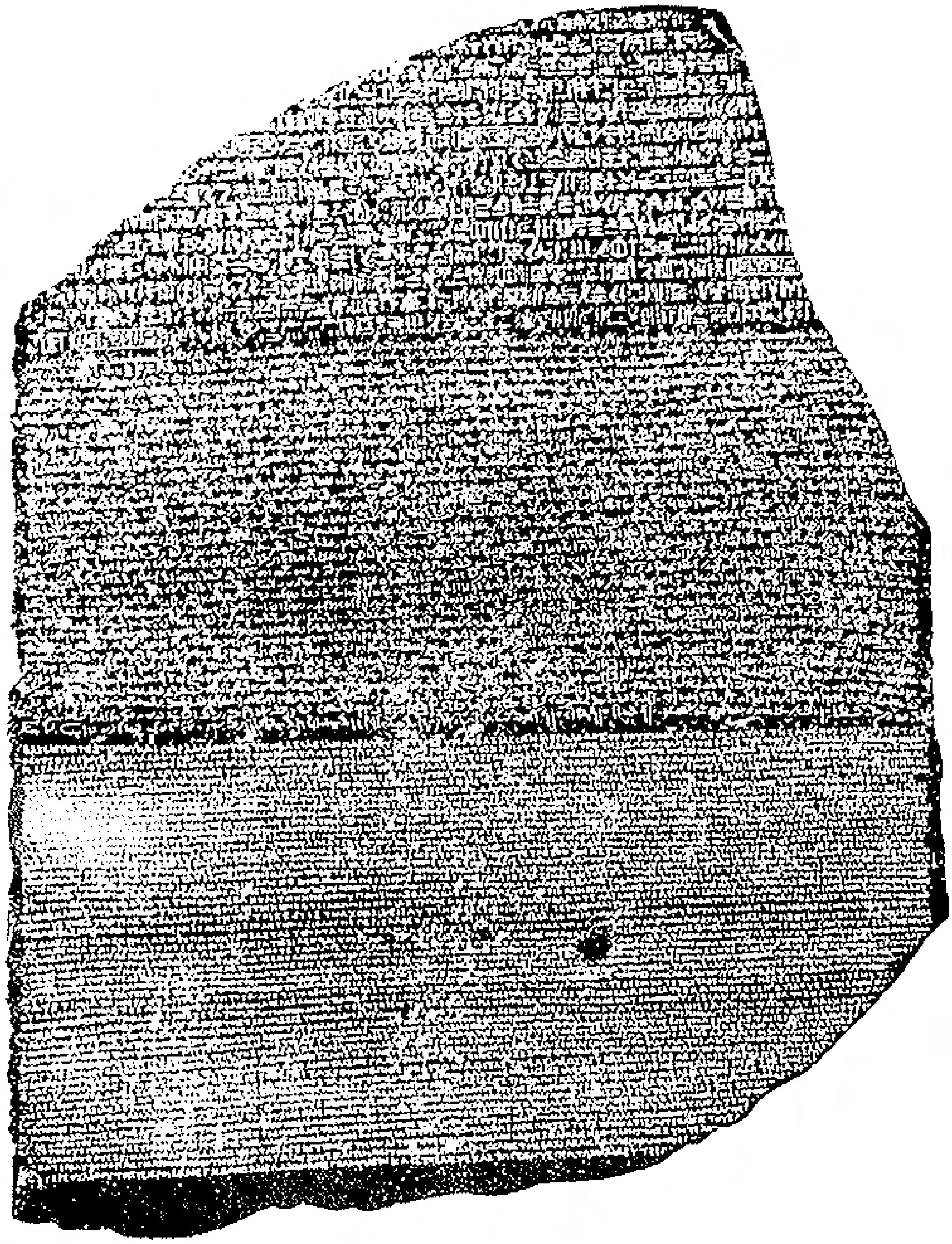


Bild 9
Der Stein von Rosette. Im Sommer 1799 stießen Soldaten der napoleonischen Armee bei Schanzarbeiten in der Nähe von Rosette, im westlichen Nildelta, auf eine anderthalb Meter lange Basaltplatte mit einer dreisprachigen Inschrift. Dem Franzosen J. F. Champollion gelang es, indem er den griechischen mit dem gleichlautenden ägyptischen Text verglich, ein hieroglyphisches »Alphabet« zusammenzustellen und ganze Worte, ja ganze Sätze zu entziffern. Dank dieser Leistung wissen wir, daß den Ägyptern des Alten Reiches rund 600 Zeichen ausreichten, um ihre Sprache – das Altägyptische – schriftlich darzustellen. Damit waren die Mathematiker der Neuzeit in der Lage, die alten mathematischen Texte zu studieren und wertvolle Erkenntnisse über die Arbeitsweise und die wissenschaftlichen Errungenschaften der Alten Ägypter zu erwerben.
Mit freundlicher Genehmigung des Ägyptischen Museums der Universität Leipzig. Archivfoto

Addition und Subtraktion

Addition und Subtraktion bereiteten den Ägyptern keine Schwierigkeiten. Es genügte, die Anzahl der Einer, Zehner, Hunderter usw., die in den zu addierenden Zahlen vorkommen, zu bestimmen und in der gebräuchlichen Bezeichnungsweise auszudrücken (s. Bild 11).

Bild 10
Briefmarke mit Champollion. (Hieroglyphen sind hier ausnahmsweise von links nach rechts zu lesen.) Jean François Champollion wurde 1790 im südfranzösischen Figeac geboren. Schon früh zeigte der Junge, der sich selbst das Lesen beigebracht haben soll, besondere Begabung für die orientalischen Sprachen. Mit elf Jahren lernte er Hebräisch, dann Arabisch. Mit Sechzehn kam er nach Paris, studierte Persisch und Sanskrit und erarbeitete ein Wörterbuch und die erste Grammatik des Koptischen, der Sprache der direkten Nachkommen der Alten Ägypter. Zwei Jahre später wurde er als Professor für Geschichte an die neugegründete Fakultät von Grenoble berufen. Trotz zeitaufwendiger Tätigkeit setzte er alle Kraft zur Entzifferung der Hieroglyphen ein, dargelegt in einem Brief an die Pariser Akademie am 22. September 1822, der Geburtsstunde der modernen Ägyptologie.
Foto: W. Reinhold, Leipzig

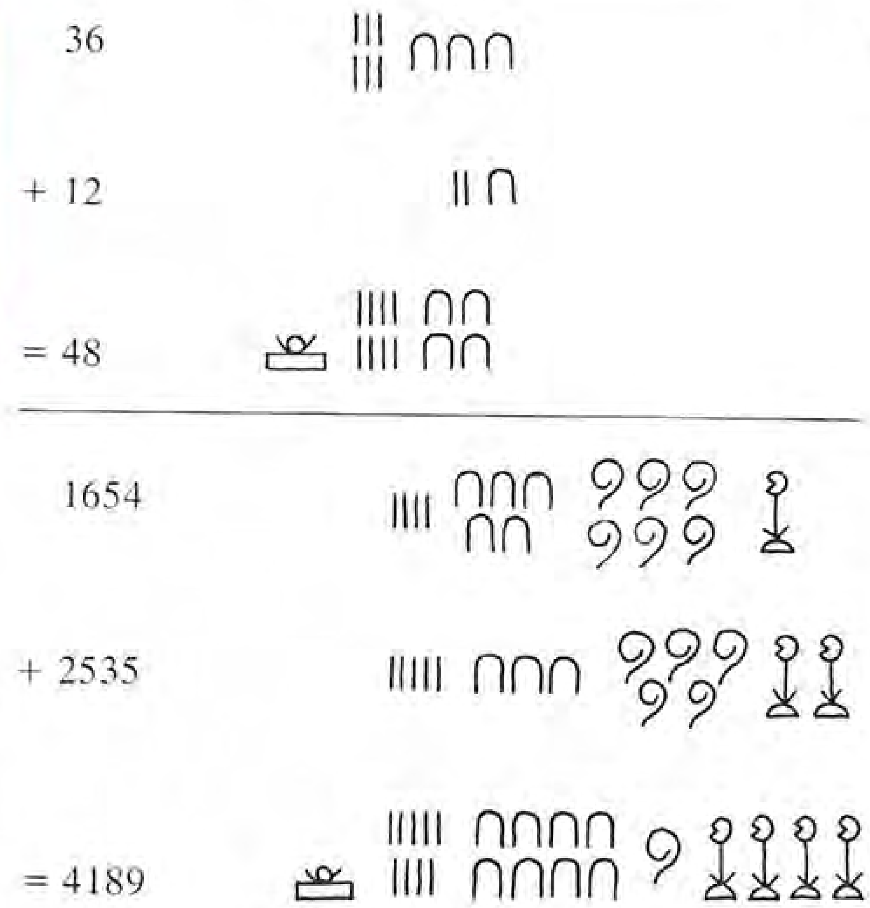


Bild 11

Multiplikation und Division

Im Papyrus Rhind wird die Aufgabe $13 \cdot 12 = 156$ gerechnet. Bild 12 zeigt den Rechenweg:

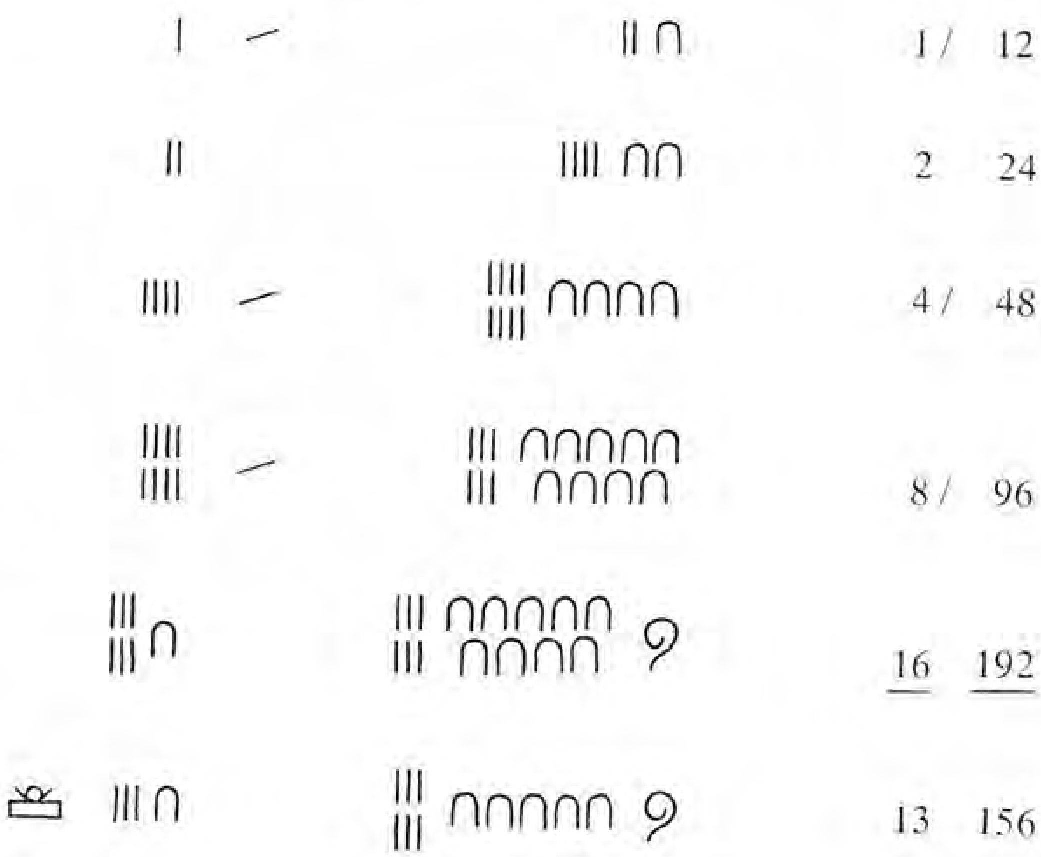


Bild 12

Um die Multiplikation und Division zu meistern, wurde das Verdoppeln oder Halbieren als Hauptrechenarten verwendet. Man schrieb die Folge der Zweierpotenzen und den immer wieder verdoppelten zweiten Faktor, beginnend mit 12, untereinander (s. unten). Dann suchte man die Zweierpotenzen, die addiert 13 ergeben (mit einem Schrägstrich versehen), und addierte die entsprechenden Zahlen der anderen Reihe, also

1/	12
4/	48
8/	96
13	156,

und erhielt das Resultat 156.
Dazu noch ein weiteres Beispiel:

11 · 307	1/	307
	2/	614
	~~4/~~	~~1 228~~
	8/	2 456
	11	3 377.

Die Division folgt dem gleichen Muster, nur in umgekehrter Reihenfolge.
Unser Beispiel sei 70 : 7. Man schreibt wieder

1	7	Divisor
2	14/	
4	28	
8	56/	
10	70.	Dividend

Dann sucht man in absteigender Reihenfolge jene Zwischenresultate, deren Summe der Zahl 70 am nächsten kommt. 56 gehört sicher dazu. Das nächstkleinere Zwischenresultat, 28, kommt hingegen nicht in Frage, denn die Summe aus 56 und 28 ist wieder größer als 70. Dafür geht 14, denn 56 + 14 = 70. Entsprechend ist dann 2 + 8 = 10.

Also ergibt 70 : 7 = 10.

Bei Divisionsaufgaben mit Rest führten die ägyptischen Schreiber die Lösungen auf ganze Zahlen mit Stammbrüchen zurück.

Bild 13
Ägyptische Zahlzeichen am Karnak-Tempel in Luxor
Foto: E. Nehmann, Stuttgart

Dazu ein einziges Beispiel:

23 : 8	1	8
	2	16/
	$\frac{1}{2}$	4/
	$\frac{1}{4}$	2/
	$\frac{1}{8}$	1/
$2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$		23

Für die Ermittlung der Stammbrüche $\frac{1}{n}$ benutzten sie umfangreiche Zerlegungstabellen und vermieden Darstellungen der Art $\frac{2}{n} = 1n + 1n$. Neben den Stammbrüchen wurde nur der Bruch $\frac{2}{3}$ verwendet. Es gehörte große Geschicklichkeit dazu, die richtige Zerlegung des Dividenden und des Divisors bzw. der Faktoren zu finden. Auf weitere Erklärungen, wie man die Reste in Stammbrüche zerlegt oder wie man Stammbrüche überhaupt findet, wird hier verzichtet. Das würde den Rahmen dieses Buches überschreiten. Bemerkenswert ist für uns vor allem das damalige Wissen, daß jede Zahl als Summe von Zweierpotenzen darstellbar ist. Dieses Wissen nutzen wir heute noch, z. B. in verschiedenen Ratespielen (ich denke mir eine Zahl zwischen 1 und 1 000, erfrage sie mit höchstens 10 Fragen) und besonders in der Dualarithmetik der elektronischen Datenverarbeitung.

2

Berechnen Sie a) $7 \cdot 72$; b) $26 \cdot 39$; c) $84 : 7$, d) $132 : 11$, natürlich nach altägyptischer Methode!

Der Papyrus Rhind

Im Jahre 1858 hat der englische Archäologe A. H. Rhind in Luxor einen aus zwei Stücken bestehenden Papyrus erworben. Einige Jahrzehnte später stellte man fest, daß zwei in New York befindliche Papyrusfragmente das zwischen den beiden fehlende Stück darstellen, so daß uns heute dieses älteste mathematische Handbuch vollständig bekannt ist. Es hat eine Länge von 5,25 m und eine Breite von 33 cm, enthält 84 Aufgaben, sachlich gut geordnet, und stellt ein Nachschlagewerk für die Lösung vor allem praktischer Aufgaben dar.

Diese Schriftrolle geht auf ein Werk aus der zweiten Hälfte des 19. Jh. v. u. Z. zurück. Der Schreiber Achmes lebte zwischen 1800 und 1600 v. u. Z. Rhind übergab den nach ihm benannten Papyrus dem Britischen Museum in London, wo er heute aufbewahrt wird.

Der Autor des Papyrus Rhind beginnt sein Werk mit folgender Einführung:

»Genaues Rechnen. Einführung in die Kenntnis aller existierenden Gegenstände und aller dunklen Geheimnisse. Dieses Buch wurde geschrieben im Jahre 33, im vierten Monat der Überschwemmungsjahreszeit unter seiner Majestät dem König von Ober- und Unterägypten A-user-Re, mit Leben versehen, in Anlehnung an eine alte Schrift aus der Zeit des Königs von Ober- und Unterägypten Ne-ma'et-Re. Der Schreiber A'h-mosè (Achmes) hat die Abschrift angefertigt.«

Auswahl von Aufgaben aus dem Papyrus Rhind

Zur Aufgabe 24 des Papyrus Rhind wird der Text in Hieroglyphen wiedergegeben. Die Lösungsmethode erscheint zunächst recht kompliziert. Aber vor vier Jahrtausenden besaßen die Ägypter, wie wir oben gesehen haben, Zeichen für natürliche Zahlen und auch für Stammbrüche (Brüche mit dem Zähler 1), z. B. Bild 14. Da es für Brüche mit einem Zähler größer als 1 keine Individualzeichen gab $\left(\text{außer } \frac{2}{3}\right)$, stellten die Ägypter solche Brüche als Summe von Stammbrüchen dar, z. B.

$$\frac{3}{8} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \quad \text{oder} \quad \frac{2}{19} = \frac{1}{12} + \frac{1}{76} + \frac{1}{114}.$$

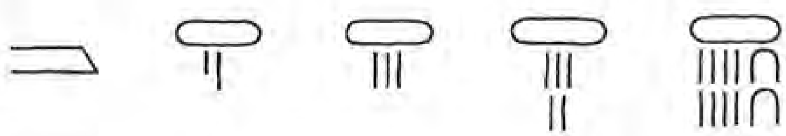


Bild 14

$\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{28}$ usw.

Schreiber überlieferten im Dienste des Staates oder der Tempel wissenschaftliche Kenntnisse. Sie wurden an sogenannten Schreiberschulen ausgebildet und genossen bestimmte Privilegien. In alten ägyptischen Papyri kann man lesen: »Diese Pflicht steht über allen anderen und nichts gleicht ihr in diesem Land.« Oder: »Ein Schreiber leitet alle anderen. Die Schreibarbeiten sind nicht mit Steuern belegt.« Die Räume der Schreiberschulen befanden sich in Verwaltungskomplexen. Beamte unterrichteten Prinzen und Auserwählte des königlichen Hofes. Das Alter der Schulanfänger lag zwischen sechs und zehn Jahren. Die Ausbildung dauerte drei bis vier Jahre. Später kamen die Schüler in die Obhut eines erfahrenen Beamten und erhielten kleine Aufträge, bis sie sich in dieser »Berufsschulzeit« eine solche Allgemeinbildung angeeignet hatten, daß sie als Schreiber eingesetzt werden konnten.

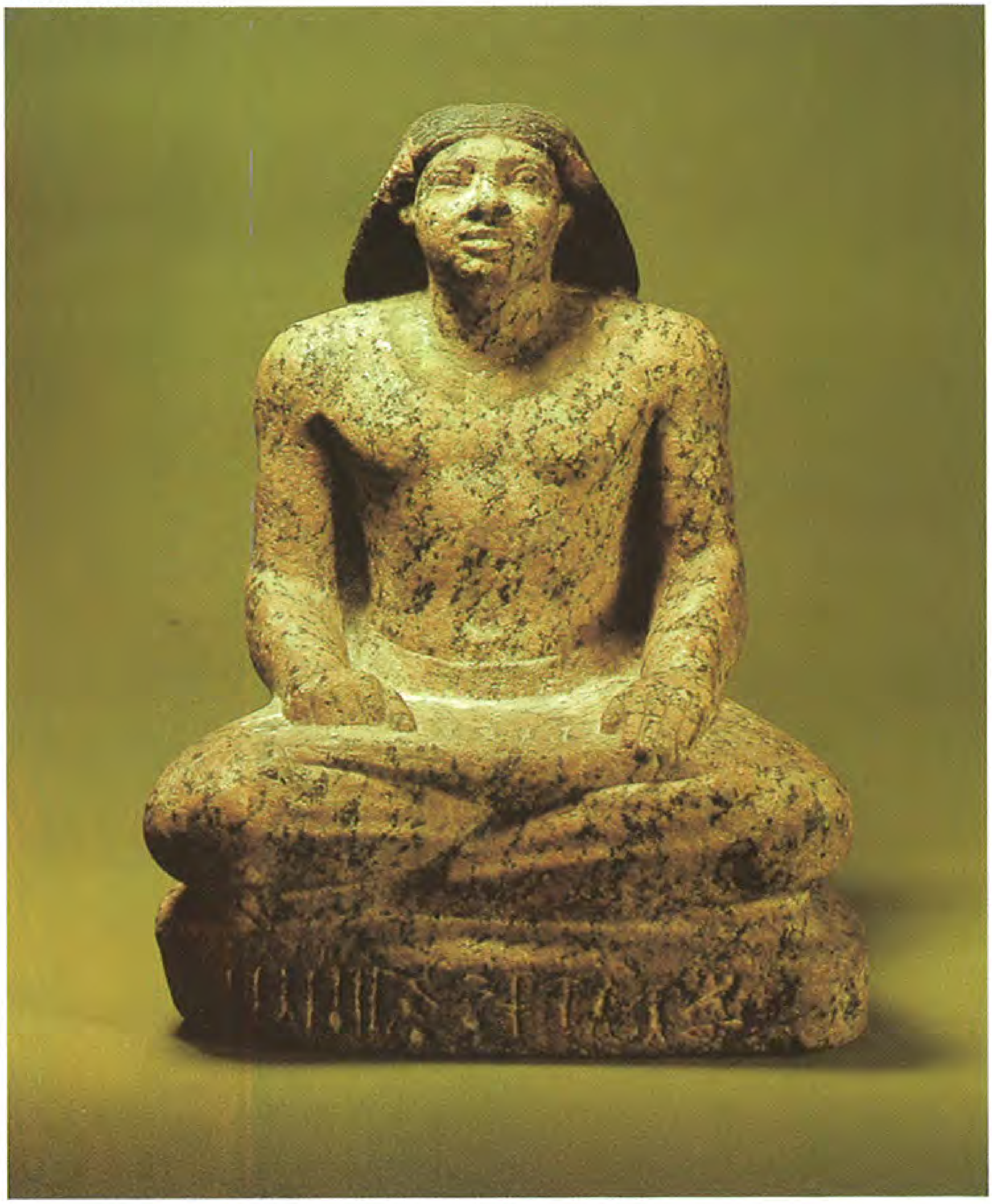
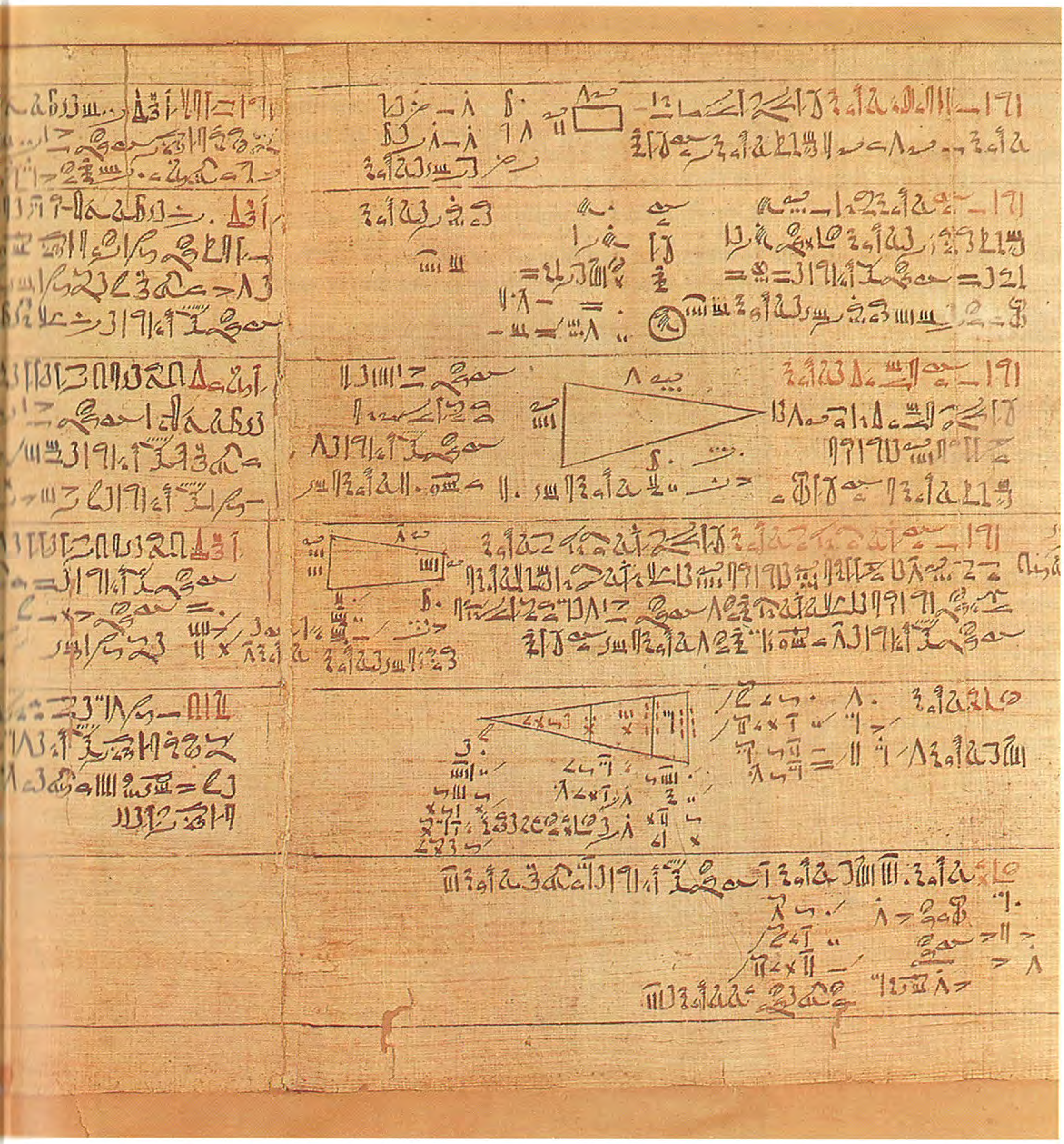


Bild 15
Grabstatue des Schreibers Neferihi aus seinem Grab (um 2200 v. u. Z.). Rosengranit, gefunden bei Ausgrabungen in Giseh (1904). Neferihi – Leiter einer Schreiberschule, daher ohne Schreibtafel – sitzt mit überschlagenen Beinen, trägt eine schulterartige Perücke und einen kurzen Schurz, auf dem sein Name zu lesen ist.
Mit freundlicher Genehmigung des Ägyptischen Museums der Universität Leipzig
Foto: H. Etzold (†)

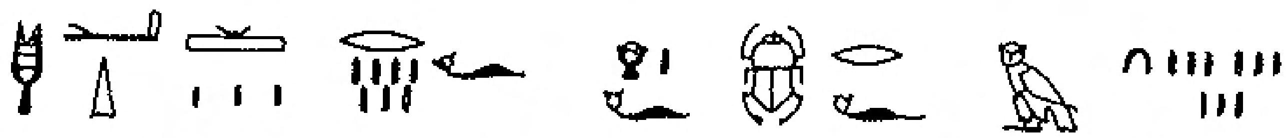
Bild 16
Ein Stück des Papyrus Rhind. Das Bild zeigt Aufgaben über Dreiecksberechnungen.
Mit freundlicher Genehmigung des Britischen Museums, London



3

Bild 18 zeigt eine Aufgabe in Hieroglyphen, diesmal von links nach rechts zu lesen. In der zweiten Zeile ist die wörtliche Übersetzung vermerkt. Die ersten Zeichen stellen den Begriff »Haufen« dar. Darunter verstanden die Ägypter eine zu ermittelnde Zahl (oder

Bild 18



»Haufen sein Siebentel, sein Ganzes, es macht: 19.«

Bild 17
Das vorliegende Archivfoto zeigt die Statue des Neferihi, von dem Archäologen Georg Steindorff in einem Grab des großen Beamtenfriedhofs in Giza aufgefunden. Der Glaube an ein Weiterleben im Jenseits erforderte nicht nur die Einrichtung eines Grabes, sondern auch dessen Ausstattung mit den Gerätschaften des täglichen Lebens, auch mit Statuen.
Mit freundlicher Genehmigung des Ägyptischen Museums der Universität Leipzig

Menge). Dann erkennt man das Zeichen für den Stammbruch $\frac{1}{7}$, eine Art Linse, und darunter das Zeichen für die Zahl 7, nämlich 7 Striche. Am Schluß sieht man das Zeichen für die Zahl 19, nämlich das Zeichen 10 und dazu 9 Striche.
In heutiger Ausdrucksweise würden wir diese Aufgabe so formulieren: Addiert man zu einer Zahl ihr Siebentel, so erhält man 19. Wie heißt diese Zahl?

Originaler ägyptischer Lösungsweg: Zu beachten ist wieder, daß Brüche nur als Stammbrüche oder Summe von Stammbrüchen geschrieben werden konnten. Da 8 Siebentel der Zahl gleich 19 sind, dividierten sie 19 durch 8 und erhielten

$19:8=(16+2+1):8=2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$. Das ist ein Siebentel der gesuchten Zahl, und sie erhielten die Zahl

$$\left(2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)\cdot 7=14+\frac{1}{4}\cdot 7+\frac{1}{8}\cdot 7=14+1+(3:4)+(7:8)$$
$$=15+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=16+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}.$$

In unserer Schreibweise ist die gesuchte Zahl gleich

$$16\frac{5}{8}.$$

Die Ägypter schrieben aber das Ergebnis ohne Pluszeichen, also

$$16\frac{1}{2}\frac{1}{8}.$$

Lösen Sie diese Aufgabe mit Hilfe einer Gleichung!

4

Aufgabe 28 des Papyrus Rhind: Original (in hieratischer Schrift), Umschrift in Hieroglyphen.
Die Übersetzung der ersten Zeile lautet:

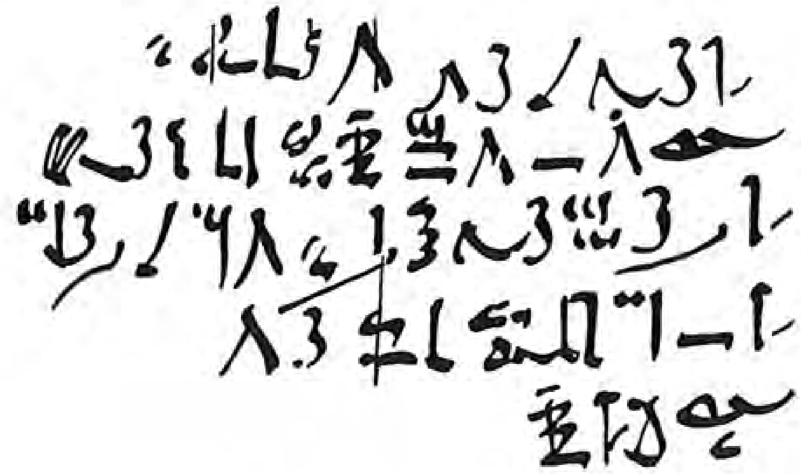
»$\frac{2}{3}$ hinzu, $\frac{1}{3}$ weg, 10 ist der Rest.«

In moderner Fassung hieße das: Wenn man zu einer Zahl $\frac{2}{3}$ dieser

Zahl addiert und davon $\frac{1}{3}$ der Summe subtrahiert, so erhält man die Zahl 10.

Wie lautet die gesuchte Zahl?

Bild 19
Die 28. Aufgabe des Papyrus Rhind im Original



5

7 Personen besitzen je 7 Katzen,
jede Katze vertilgt 7 Mäuse,
jede Maus frißt 7 Ähren Gerste,
aus jeder Gerstenähre können 7 Maß Getreidekörner entstehen.

Wie viele Maß Getreide sind das insgesamt, die der Nützlichkeit der Katzen zu verdanken sind?

6

Aufgabe 63 des Papyrus Rhind:

»Vorschrift zu verteilen 700 Brote unter 4 Personen, $\frac{2}{3}$ für eine, $\frac{1}{2}$ für die andere, $\frac{1}{3}$ für die dritte, $\frac{1}{4}$ für die vierte. Laß mich wissen den Betrag eines jeden von ihnen.«

In moderner Fassung: 700 Brote sollen an 4 Personen verteilt werden, daß sich die Anteile dieser Personen wie $\frac{2}{3}:\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{4}$ verhalten.

Wie viele Brote erhält jeder?

(Beim Bau z. B. von Pyramiden mußten sich die Schreiber mit der Verteilung von Naturalien – als Verpflegung bzw. Lohn – befassen. Mit dem Papyrus Rhind wird damit u. a. eine Anleitung zum Rechnen von Verteilungsaufgaben gegeben.)

7

Aufgabe 31 des Papyrus Rhind:

»Haufen; sein $\frac{2}{3}$, sein $\frac{1}{2}$, sein $\frac{1}{7}$, sein Ganzes, es beträgt 33.«

In moderner Fassung: Von einer Menge ist folgendes bekannt: $\frac{2}{3}$

Bild 20
Fruchtschwere Dattelpalmen am Ufer eines Hauptbewässerungsgrabens unweit von Giseh. Am Nil, besonders im Nildelta, werden Baumwolle, Weizen, Reis, Mais, Gemüse, Oliven, Feigen und Datteln angebaut.
Foto: ADN GmbH, Bildarchiv

Aufgabe 31 aus Papyrus Rhind

$\frac{2}{3}$ der Menge und $\frac{1}{2}$ der Menge und $\frac{1}{7}$ der Menge zur ganzen Menge addiert, ergibt 33.

Wie groß ist diese Menge?

Als Gleichung geschrieben

$$\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{7}x + x = 33.$$

(Der Schreiber rechnete und erhielt als Lösung mit Stammbrüchen:

$$14\frac{1}{4}\ \frac{1}{56}\ \frac{1}{97}\ \frac{1}{194}\ \frac{1}{388}\ \frac{1}{679}\ \frac{1}{776}.)$$

Berechnen Sie x, vergleichen Sie mit dem Ergebnis des Schreibers!

Hau-Rechnungen

8

a) Originaltext:

»Haufen: sein Viertel, sein Ganzes, es gibt 15.«

Die Ägypter arbeiteten hier mit der damals üblichen Methode des falschen Ansatzes. Der »Haufen« wurde mit einer hinsichtlich der Teile rechengünstigen natürlichen Zahl angenommen. Hier lag es nahe, den Haufen mit $x = 4$ anzusetzen, so daß der »Haufen und sein vierter Teil zusammen 5 ergeben«. Die Summe muß aber dreimal größer sein $(15 : 5 = 3)$. Deshalb ist die gesuchte Menge gleich $4 \cdot 3 = 12$.

Rechnen und vergleichen Sie!

b) Originaltext:

»Haufen: sein Halbes, sein Viertel, sein Ganzes, es gibt 10.«

c) Originaltext:

»Wenn der Schreiber zu dir sagt: 10 ist geworden $\frac{2}{3}$ und $\frac{1}{10}$ von was? Laß ihn hören.«

d) Originaltext:

»Nimm mich drei Mal und ein Drittel davon, so erhält man sein Ganzes.«

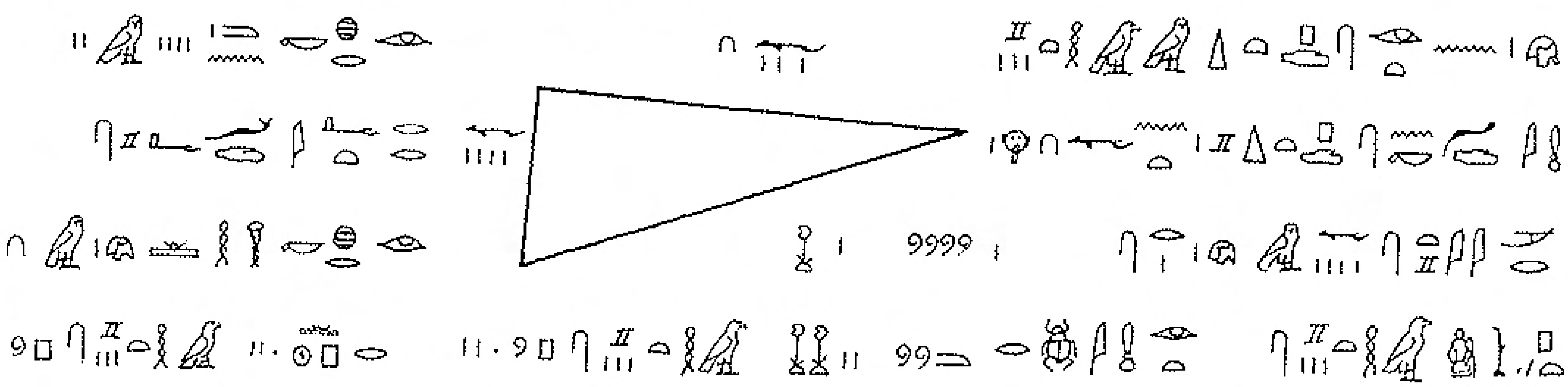
Berechnen Sie x, wenn gegeben:

e) $x + \frac{x}{2} = 6$; f) $x + \frac{x}{5} = 21$!

9

Aufgabe 51 des Papyrus Rhind:
Unser Bild 16 zeigt einen Ausschnitt eines Stückes des Papyrus Rhind. Im obersten Teil wird die Fläche eines Rechtecks, darunter die eines kreisförmigen Feldes gezeigt (S. 25). Mit der nächsten Aufgabe, einer Dreiecksberechnung, wollen wir uns näher befassen:
»Angenommen, dir wird gesagt: Wie groß ist die Fläche eines (rechtwinkligen) Dreiecks, dessen Seite 10 Chet und dessen Basis 4 Chet beträgt?«

Bild 21



10

Aufgabe 52 des Papyrus Rhind:

a) Berechne die Fläche des Dreiecks, wenn die Grundlinie 4 Ruten und die Höhe 10 Ruten beträgt (s. Bild 22)!

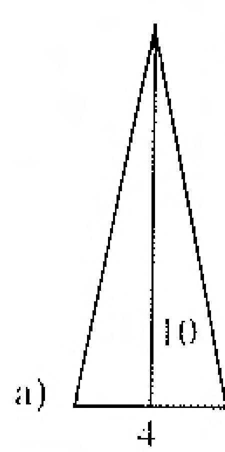
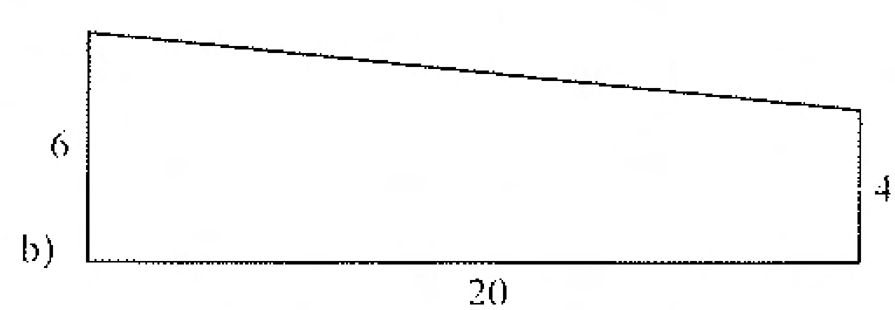


Bild 22

Bild 23



b) Es wird die Fläche eines Trapezes berechnet. Gegeben sind: die »Mündung« 6 Ruten, der »Abschnitt« 4 Ruten und die »Grenze« 20 Ruten (s. Bild 23).

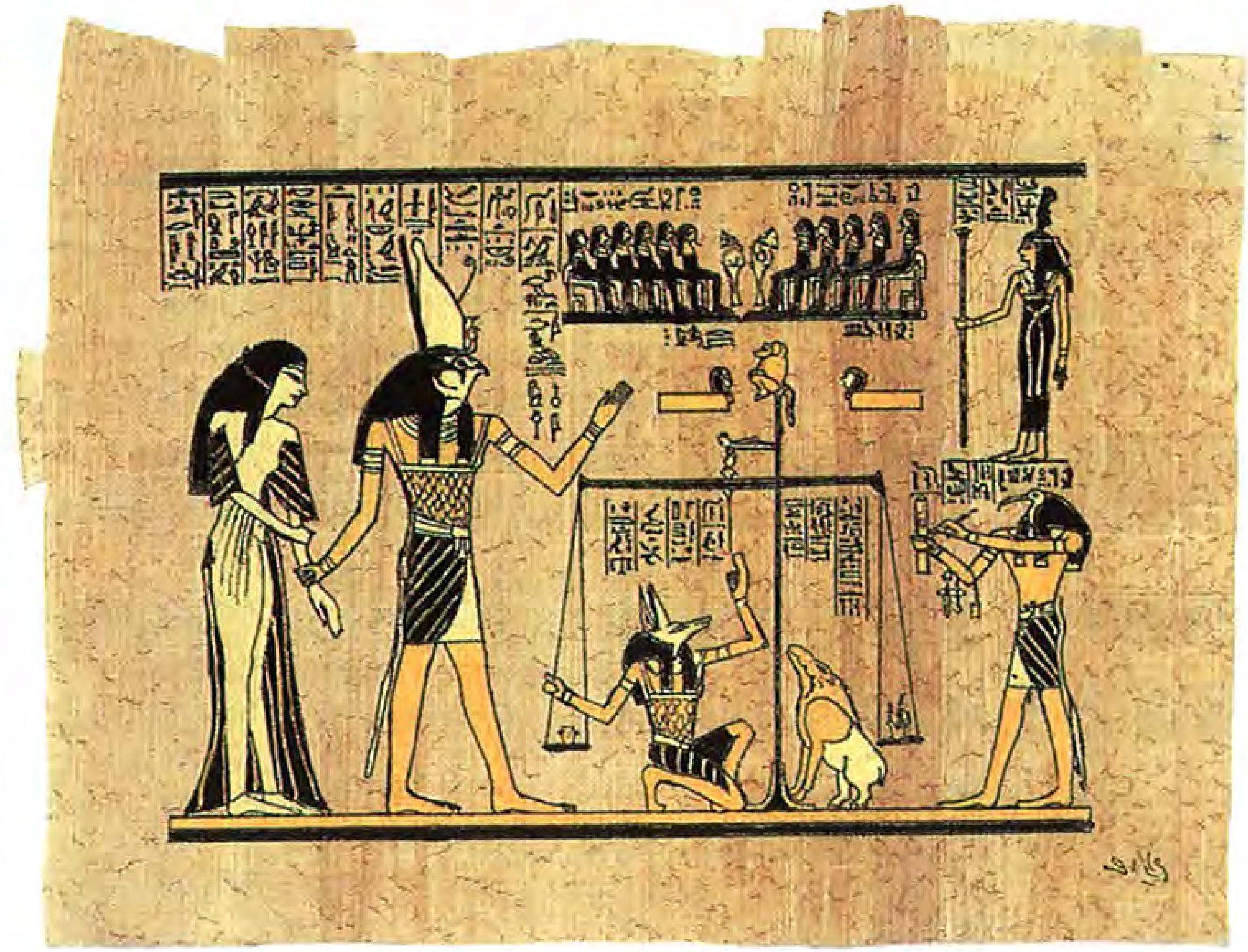


Bild 24
Papyrusbogen mit altägyptischen Bildern
Foto: W. Reinhold, Leipzig

Die geschriebenen Worte auf Papyrus bezeugen das großartige Erbe einer Kultur, die bis heute ihre Ausstrahlungskraft nicht verloren hat. Die ersten beschriebenen Papyri stammen aus der Zeit von 2400 v. u. Z. Papyrus ist eine Pflanze, die in stehenden Gewässern wächst. Ihre dreieckigen Stiele erreichen eine Höhe von 3 bis 6 m. Sie wächst vor allem in den sumpfigen Gegenden des Nils in Unterägypten. Als Rohmaterial wurde sie benutzt, um verschiedene Gebrauchsgegenstände herzustellen, wie z. B. Boote, Segelbespannungen, Matten, Seile, Sandalen, Körbe usw. Die genaue Verarbeitung des Papyrus wird von den alten Ägyptern nirgends beschrieben. Man vermutet, daß er wie folgt hergestellt wurde: Nach Entfernung der grünen Rinde vom Papyrusstengel schnitt man das Innere in dünne Längsstreifen und legte diese auf einem glatten Brett nebeneinander. Danach wurde im rechten Winkel eine neue, gleichartige Schicht aufgetragen. Ein aus den Früchten der weißen Lotosblume gewonnener Stoff diente zum Kleben und Festigen der einzelnen Schichten. Der so entstandene Bogen wurde gepreßt, getrocknet und zuletzt mit glattem Stab poliert.

Der Moskauer Papyrus

Der Moskauer Papyrus, aufbewahrt im Staatlichen Museum der Darstellenden Künste »A. S. Puschkin«, ist eine Rolle von 5,44 m Länge und 8 cm Breite. Er wurde 1893 in Ägypten erworben, stammt aus der Totenstadt Drah Abu'l Negga bei Theben und enthält 25 Aufgaben des täglichen Lebens des Mittleren Reiches (zeitliche Einordnung: ägyptische Frühzeit 2950–2640; Altes Reich 2640–2155; Mittleres Reich 2040–1785; Neues Reich 1552–1070 v. u. Z.). Die Schriftrolle entstammt der Feder eines Schülers einer Schreibschule und ist die Kopie einer Vorlage aus dem 20. Jh. v. u. Z.

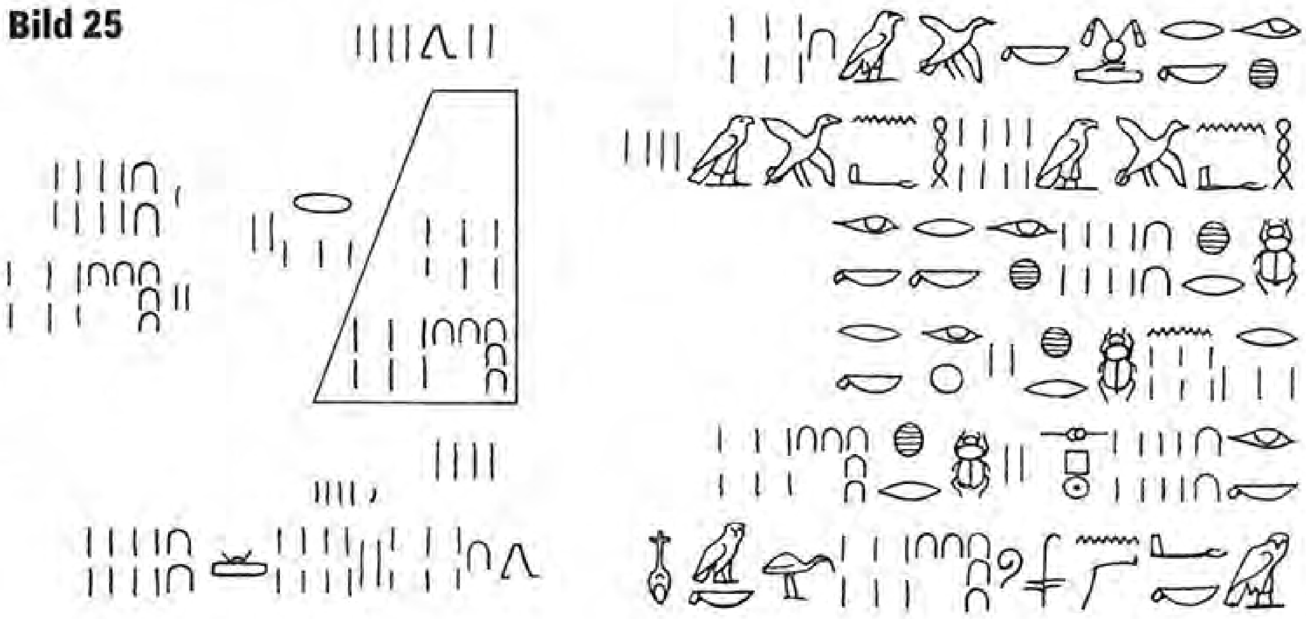
Von der Vielzahl der damals vorhandenen Schriftstücke blieben meist nur die erhalten, die in Grabstätten, insbesondere den Pyramiden, und in Tempeln aufbewahrt wurden. Die Seelen der Dahingeschiedenen – hochgestellte Persönlichkeiten wie Könige, Beamte, Baumeister, Schreiber – sollten damit die Möglichkeit haben, ihre geliebten Bücher auch im Jenseits zu lesen.

Auswahl von Aufgaben aus dem Moskauer Papyrus

11

Aufgabe 28 des Moskauer Papyrus:
Das Bild 25 zeigt zwei Spalten des Moskauer Papyrus mit der Berechnung des Volumens eines Pyramidenstumpfes mit Seiten 2 und 4 und der Höhe 6 Ellen.
Umschrift in Hieroglyphen:

Bild 25



Der Text lautet:

»Addiere du zusammen diese 16,
mit dieser 8 und mit dieser 4.
Es entsteht 28. Berechne du

$\frac{1}{3}$ von 6. Es entsteht 2. Rechne

28mal. Es entsteht 56.
Siehe: er ist 56. Du hast richtig gefunden.«

a) Berechnen Sie das Volumen dieses Pyramidenstumpfes auf die heute übliche Art!

b) Die Ägypter berechneten das Volumen des Pyramidenstumpfes schon so, wie es unserer heutigen Formel $V = (a^2 + ab + b^2) \cdot \frac{h}{3}$ entspricht.

c) Die Babylonier verwendeten einen Rechenweg, der unserer heutigen Formel

$$V = \frac{A_1 + A_2}{2} \cdot h$$

gleichkommt, wobei A_1 die Grundfläche und A_2 die Deckfläche des Pyramidenstumpfes bedeuten.

Vergleichen Sie die drei Ergebnisse!

12

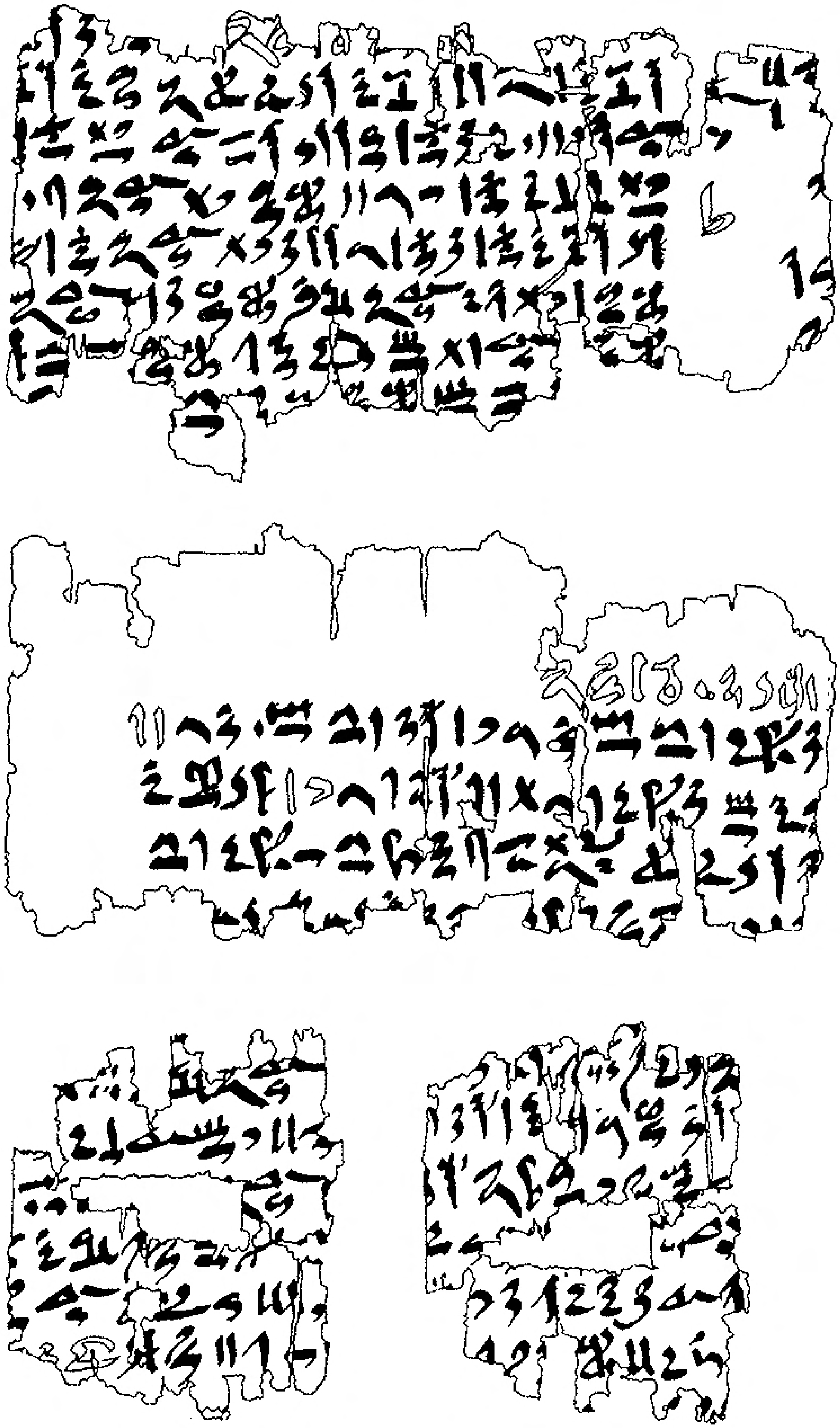
Aufgabe 6 des Moskauer Papyrus:
Es werden die Seiten eines Rechtecks gesucht, wenn die Breite $\frac{3}{4}$ der Länge beträgt und die Fläche 12 ist.

(Bemerkung: In vielen Aufgaben der damaligen Zeit wurden keine Maßeinheiten angegeben, sondern es wurde nur mit Maßzahlen gerechnet.)

Der Berliner Papyrus 6619

Im Ägyptischen Museum der Staatlichen Museen in Berlin befindet sich der »Berliner Papyrus 6619«. Die Übersetzung von Aufgabe und Lösung sowie die Analyse dieses Textes befinden sich in der *Zeitschrift für ägyptische Sprache*, Band 38, 1900. Das Bild 26 zeigt das (nachgezeichnete) Original in hieratischer Schrift. Allein daran erkennt man, welche Mühe die Historiker aufwenden mußten, um den nachfolgenden Text zu schaffen:

Bild 26
Alter ägyptischer Papyrus
(Berliner Papyrus 6619)
Mit freundlicher Genehmigung der Staatlichen Museen zu Berlin. Papyrussammlung



13

Originaltext:
»Wenn dir gesagt wird: 100 Quadratellen auf unbekannte Größen zu verteilen und $\frac{3}{4}$ der Seite der einen Größe für die andere (zu nehmen), gib mir jede der unbekannten Größen an!«

Moderne Fassung:

a) Eine Fläche von 100 Quadratellen soll so auf zwei Quadrate verteilt werden, daß sich die Seitenlängen der beiden Quadrate wie 3 : 4 verhalten.
Wie lang sind die Seiten der gesuchten Quadrate?

b) Geben Sie eine allgemeine Lösung für diese Aufgabe an!

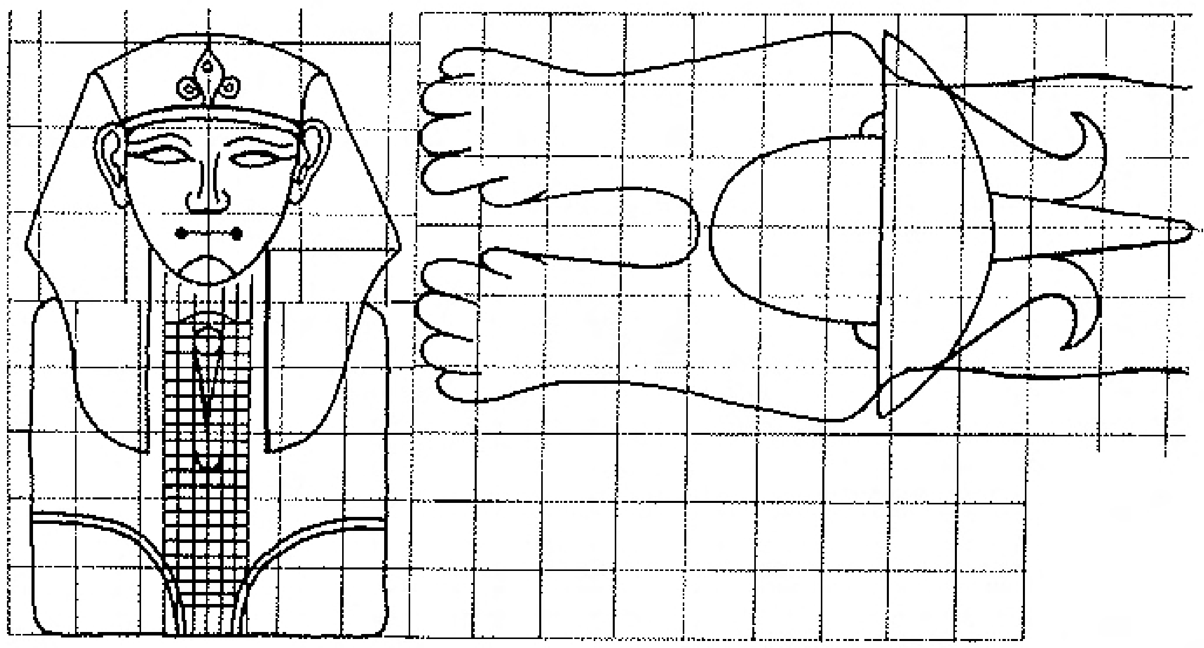
Die Pyramiden Nubiens

Die Pyramiden sind das älteste der Sieben Weltwunder und zugleich das einzige, das wir noch heute in seiner ganzen Größe bestaunen können. Sie sind in der Zeit von 2900 bis 1800 v. u. Z. entstanden, rund 80 an der Zahl.

Die Pyramiden sind – gemessen an den damaligen einfachen Hilfsmitteln – Wunderwerke der Baukunst. Man arbeitete damals meist mit weichen Bronze- und Kupferwerkzeugen. Hilfsmittel waren die Rolle, der Hebel, die schiefe Ebene, das Lot und das Winkelmaß. Neben dem Menschen standen der Esel und das Rind zur Verfügung. In die große Pyramide, die Cheopspyramide, einst mit Kalkstein verkleidet, sollen rund 2,3 Millionen Steinblöcke verbaut worden sein. Jeder dieser Blöcke hat eine Masse von ca. 2,5 Tonnen. Sie mußten von weither, zu Wasser und zu Land, herangeschafft werden. Zwanzig Jahre lang arbeiteten mehrere zehntausend Menschen, jeweils zur Zeit der Nilüberschwemmungen. Das ganze Jahr über waren 4 000 Steinmetzen tätig.

Die Pyramiden haben eine Reihe ägyptischer Könige unsterblich gemacht. Im Gedächtnis der Menschen sollten aber vor allem jene namenlosen Arbeiter, Techniker und Baumeister fortleben, die einst in glühender Hitze, oft von ihren Aufsehern angetrieben, diese Wunderwerke erbauten.

Bild 27
Altägyptische Werkzeichnung



So wurde zum Beispiel eine in Stein zu hauende Sphinx zunächst auf Papyrus in einem Quadratnetz als Aufriß und Grundriß dargestellt. Diese verkleinerte Zeichnung übertrug man in der richtigen Größe auf den Werkblock und konnte so die Arbeit vieler Menschen an der Skulptur koordinieren.

14

Die Cheopspyramide hat als Grundfläche ein Quadrat mit 233 m Seitenlänge. Sie war ursprünglich 148 m hoch und ist heute in 137 m Höhe abgestumpft.

a) Welche Gesteinsmasse wurde für den Bau benötigt ($\gamma = 2{,}5\ \mathrm{g/cm^3}$)?

b) Welche Fläche hat die heute vorhandene Plattform auf dem Gipfel? (Das Besteigen der Pyramide ist heute strengstens untersagt.)

c) Berechnen Sie den Neigungswinkel zwischen Grundfläche und Seitenfläche!

d) Wie groß war (um 2530 v. u. Z.) jede der vier Seitenflächen?

e) Fertigen Sie Grund- und Aufriß sowie das Schrägbild ($q = \frac{1}{2}$; $\alpha = 45°$) im geeigneten Maßstab an!

f) Wieviel Güterzüge zu je 60 Wagen wären zum Transport dieser Steinmenge (ca. 2 300 000 Steinquader) nötig, wenn jeder Wagen eine Tragfähigkeit von 25 t hat? Verwenden Sie das Ergebnis aus a!)

Bild 28
Die Pyramiden von Giseh. Sie liegen am linken Nilufer, 8 km entfernt von der ägyptischen Stadt Giseh. (1,25 Mill. Einwohner)
Foto: W. Wallwitz, Jena

Bild 29
Pyramidenfeld von Giseh (Mykerinos-Pyramide, auch als Menkaure-Pyramide bezeichnet)

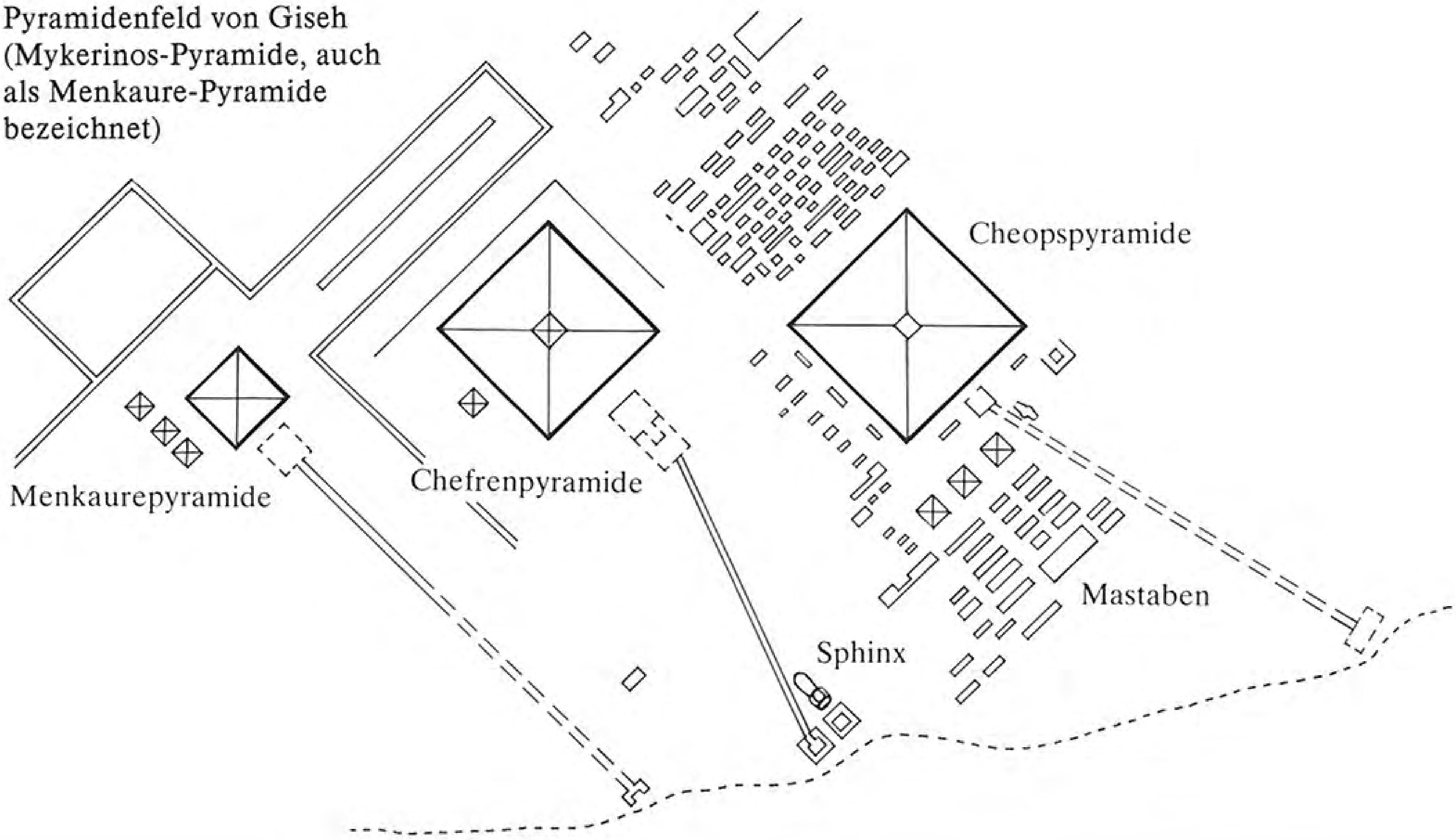
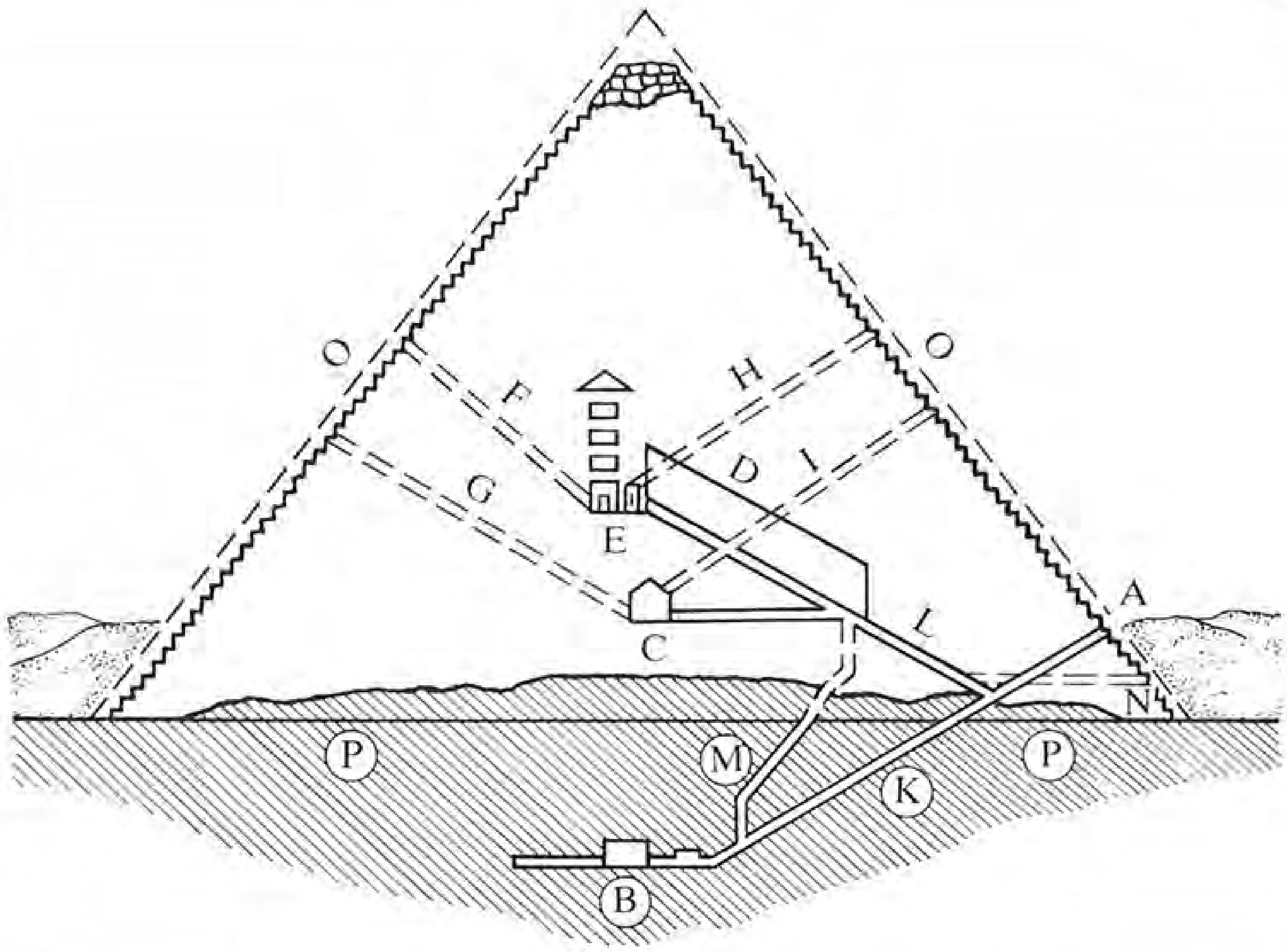


Bild 30
Querschnitt durch die Cheopspyramide

A	Felsiger Untergrund
B	Pyramidenspitze
C	alter Eingang
D	falscher Eingang
E, F	abwärts führender Gang
G	alte unterirdische Grabkammer
H	Sackgasse
I	aufsteigender Gang
J	große Galerie
K	Vorraum mit Zwischenwänden
L	Grabkammer des Königs Cheops
M	Entlastungs- und Sicherungsräume
N, O	Entlüftungskanäle (?) nach Nord und Süd
P	Brunnenschacht
Q	waagerechter Gang
R	Kammer der Königin
S	versperrter und unvollendeter Gang
T	ursprüngliches Niveau der äußeren Verkleidung



15

Der Tangens des Winkels, den eine Seitenkante der Chephrenpyramide mit der Diagonale der Grundfläche bildet, wurde von den Ägyptern mit 0,9 berechnet (Grundkante 215 m, Höhe 144 m). Trifft das zu?

Abmessungen und Volumen der drei größten ägyptischen Pyramiden

	Cheops-pyramide	Chephren-pyramide	Mykerinos-pyramide
ursprüngliche Seitenlänge	230 m	215 m	109 m
heutige Seitenlänge	227 m	210 m	109 m
ursprüngliche Höhe	146 m	144 m	67 m
heutige Höhe	137 m	136 m	63 m
ursprüngliche Größe der Grundfläche	53 000 m^2	46 200 m^2	11 880 m^2
ursprüngliches Volumen	2 570 000 m^3	2 219 000 m^3	265 000 m^3
errechnete Masse (Gesteinsdichte 2,5 g/cm^3)	6 250 000 t	5 245 000 t	663 000 t

Bild 31
Die Stufenpyramide von Sakkara. Diese älteste Pyramide, das älteste monumentale Steinbauwerk der Welt, wurde für König Djoser um 2650 v. u. Z. gebaut. Sein Erbauer war der große Arzt und Baumeister Imhotep, der in Ägypten göttliche Verehrung genoß.
Foto: Gisela Boldt, Leipzig

16

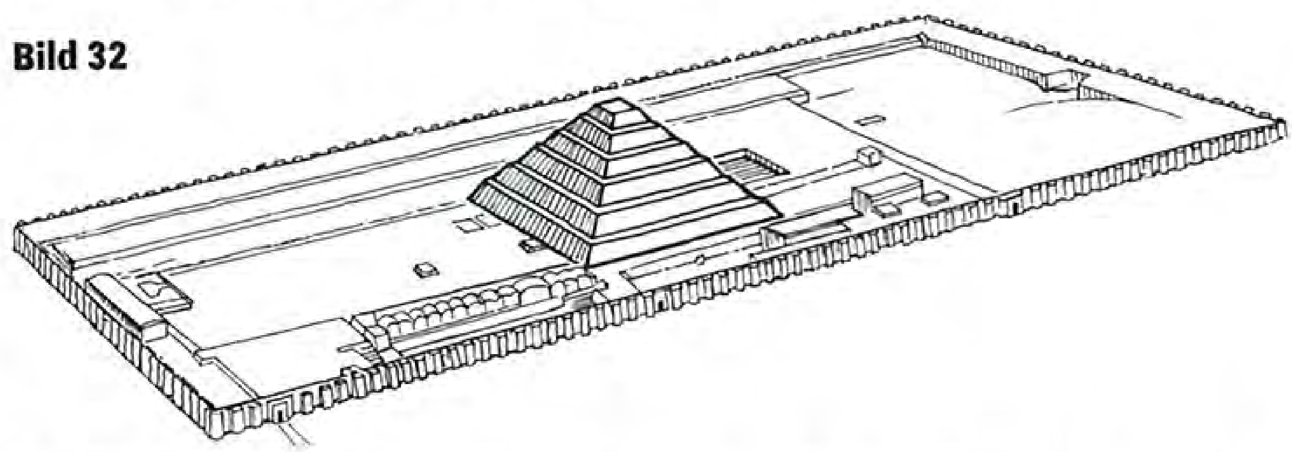
Etwa 30 km südlich von Kairo, nilaufwärts, lag ehemals Memphis, befestigte Stadt und Metropole des Alten Reiches. Von dort nach Westen und in die Libysche Wüste hinein, findet man auf dem Totenfeld von Sakkara die sechsstöckige, 60 m hohe Stufenpyramide, das Grabmal König Djosers. Sie ist die älteste bisher bekannte rechteckige Pyramide und zugleich der erste große Steinbau der Welt (s. Bild 31). Einst war diese »Wohnung der Ewigkeit« mit einer 10,50 m hohen Mauer umgeben, die sich von Nord nach Süd über 544 m, von West nach Ost über 277 m erstreckte.

a) Berechnen Sie die Fläche dieser Kultstätte in ha!

b) Die Stufenpyramide hatte eine Grundfläche von 13 189 m^2. Die eine Seite war um 12 m länger als die andere.

Berechnen Sie die Länge der Seiten!

Bild 32



c) Neun Jahre alt war Tut-ench-Amun, Pharao um 1335 v. u. Z., als er sein Regiment antrat, doch schon mit 18 Jahren starb er. Sein Grab und die Mumie im *Goldenen Schrein*, in sechzehnschichtiges Leinen gewickelt, wurde erst im Jahre 1922 entdeckt. 16 Stufen führen zu seinem Grab hinab, dann eine Tür, ein 7,60 m langer Gang dahinter, wieder eine Tür, endlich die Vorkammer von 8 m Länge und 3,60 m Breite. Linkerhand eine Tür zur Seitenkammer mit dem Totengerät. Rechts eine Tür, vor der einst zwei lebensgroße Statuen des Königs standen, schließlich die Sargkammer, in der der *Goldene Schrein* steht und hinter der Sargkammer noch die Schatzkammer (s. Bild 33).

Der Goldene Schrein ist 5,20 m lang, 3,35 m breit und 2,75 m hoch.

Vergleichen Sie dessen Rauminhalt mit dem Ihres Wohnzimmers!

Bild 33
Ägyptische Grabkammer
1 Eingangstreppe
2 Gang
3 Vorratskammer
4 Seitenkammer
5 Schatzkammer
6 Sargkammer
7 Goldener Schrein
8 Tor

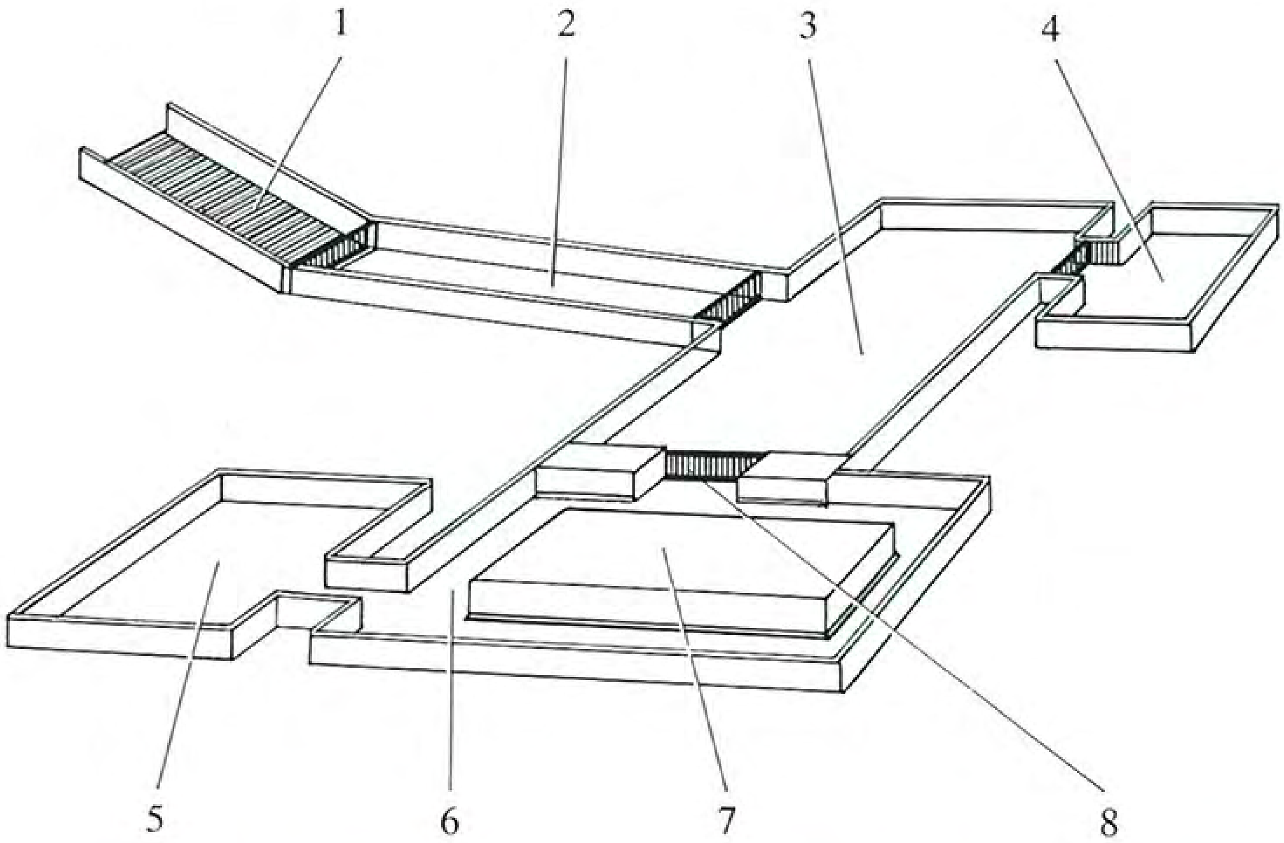


Bild 34
Landschaft am Nil
Foto: ADN GmbH, Bildarchiv

Bild 35
Pyramidenfeld Barkal
Foto: F. W. Hinkel, Berlin

17

Die dargestellte Pyramide »Barkal 5« (s. Bild 35) befindet sich in der heutigen Republik Sudan. Sie wurde im 1. Jh. v. u. Z. errichtet und war dem meroitischen Löwengott Apedemak geweiht.

Diese Pyramide läßt aus ihren Maßen bestimmte Proportionen erkennen. In der Bemessung wurde aber nicht das Längenmaß direkt angegeben, sondern es wurde eine willkürlich gewählte Grundeinheit, als »Modul« bezeichnet, zugrundegelegt. Bei der abgebildeten Pyramide beträgt der »Modul« $M = 32{,}5$ cm, und die Abmessungen berechnen sich als Vielfache von M. Die Höhe der

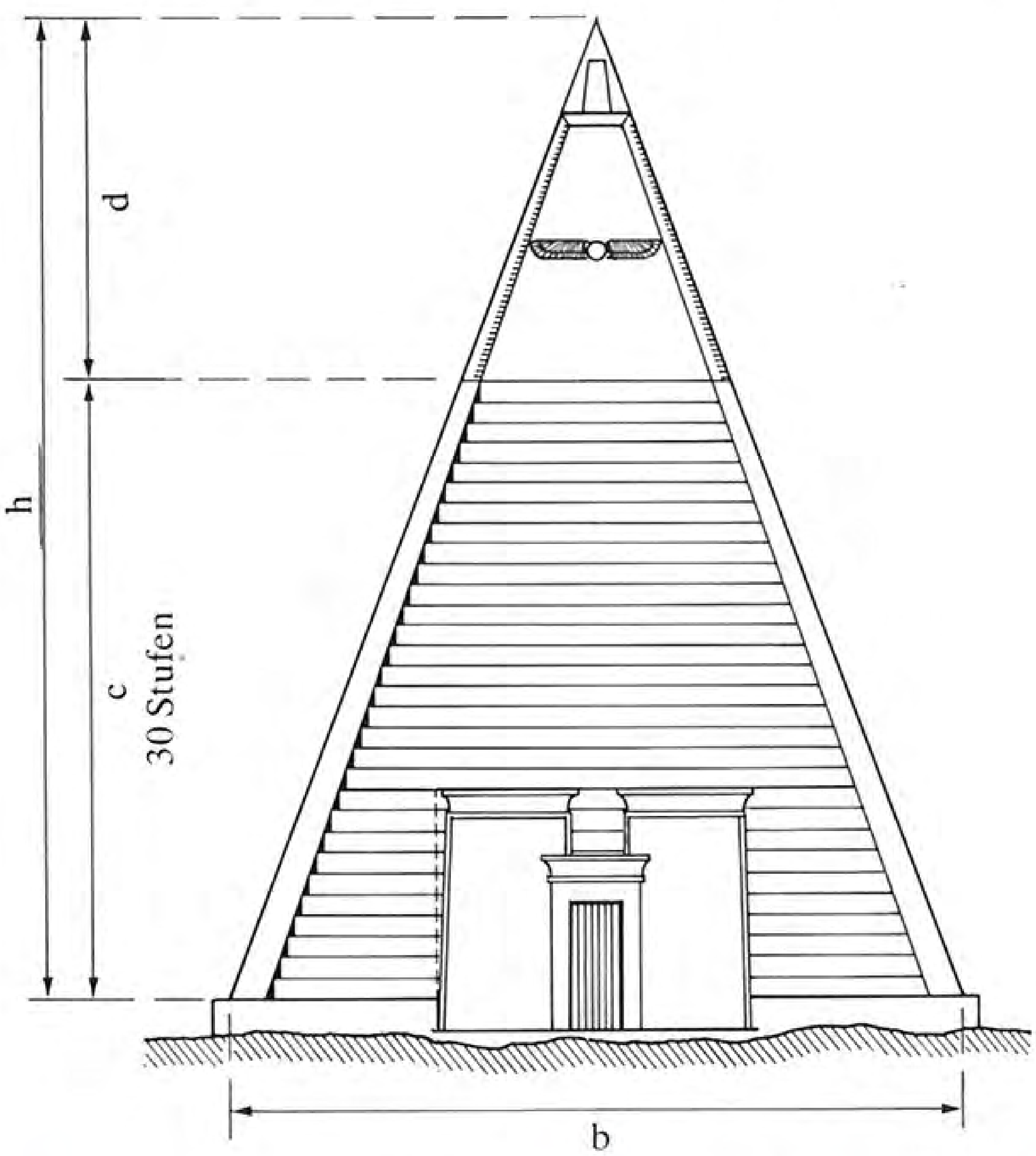


Bild 36
Aufriß der Pyramide Barkal 5

Pyramide $h = 48 \cdot M$, die Grundlinie $b = 36 \cdot M$, die Höhe der Treppe $c = 30 \cdot M$ und der Abstand bis zur Spitze $d = 18 \cdot M$.

a) Berechnen Sie die wahre Länge der vier Abmessungen, und bestimmen Sie die Proportionen zwischen Pyramidenhöhe und Treppenhöhe sowie zwischen Treppenhöhe und Abstand zur Spitze!

b) Bestimmen Sie den Neigungswinkel der Seitenflächen gegenüber der Horizontalen!

18

Der Obelisk von Luxor auf der Pariser *Place de la Concorde* wirft bei einer Sonnenhöhe von 35°45′ einen 31,71 m langen Schatten.

Welche Höhe hat dieses imposante, aus einem Stück bestehende Wunderwerk ägyptischer Steinmetzen?

Bild 37
Zu Stein erstarrte Sonnenstrahlen wurden die Obelisken genannt. Im Foto ist der von der Pharaonin Hatschepsut errichtete zu sehen. Er gilt mit seinen 29,5 Metern als der höchste in Ägypten. Obelisken wurden im Ganzen aus dem Fels gehauen und dann auf schlittenartigen Gefährten zum Nil transportiert, auf dem die Fahrt als Prozession zum Tempel ging.
Foto: Gisela Boldt, Leipzig

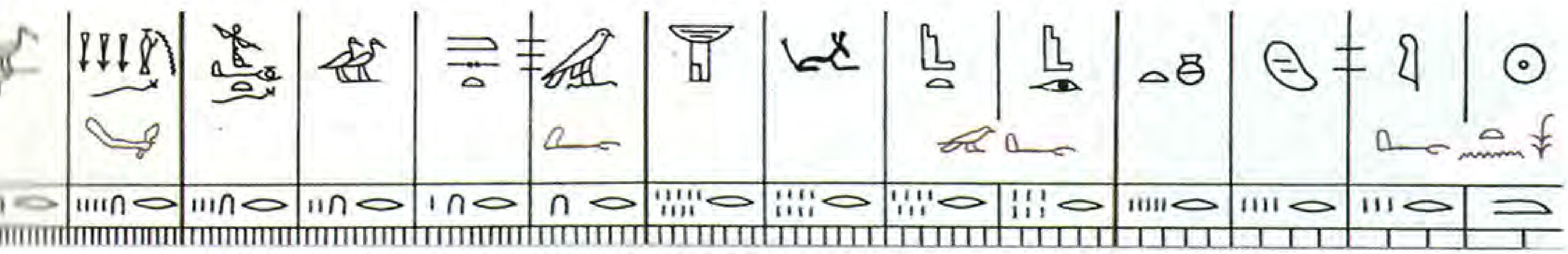
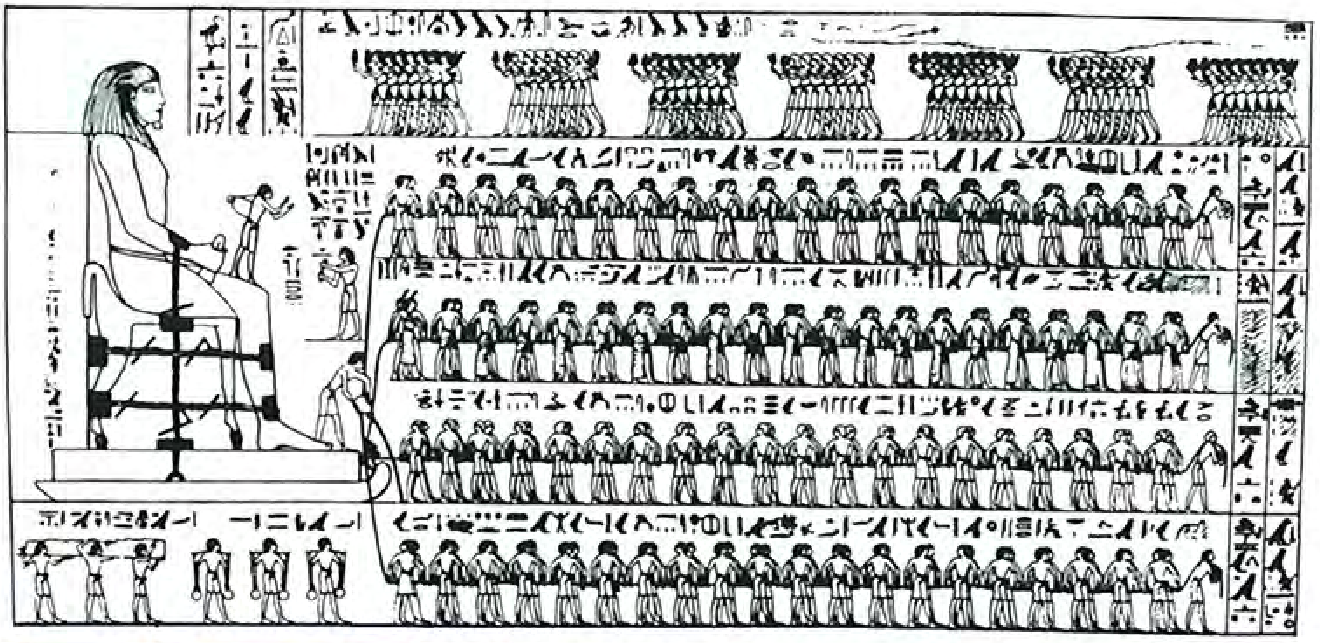


Bild 38
Die ägyptische Königselle. Das Bild zeigt die Reproduktion des altägyptischen Längenmaßes der Königselle (»Arm des Königs«) und ist auf der Rückseite mit einer Zentimeter- und Inchskale versehen. Dieses Maß hat eine Durchschnittslänge von 52,5 cm ± 3 mm und stammt aus der Zeit der Pyramidenbauten. Jeder Besucher der Tempel und Kunstwerke kann mit dieser Elle jeden behauenen Stein, jede Säule und jeden Sarkophag nachmessen und dabei feststellen, daß nach diesem Ellenmaß gearbeitet wurde. Die Unterteilung der Elle erfolgte im wesentlichen in (rot gedruckt) Finger (28 Fingerbreiten), Handbreiten (4 Fingerbreiten), Faust (16 Fingerbreiten), kleine und große Spanne (12 bzw. 14 Fingerbreiten), Unterarm (16 Fingerbreiten), Schulter (20 Fingerbreiten) oder kleine Elle (24 Fingerbreiten). Auch die kleine Elle besaß symbolische Bedeutung, und jeder Fingerbreite waren Gottheiten zugeordnet. So bedeuteten z. B. von rechts nach links (schwarz gedruckt) 1. Re, Schöpfer und Sonnengott; 2. Schu, Luftgott, Trenner von Himmel und Erde; 5. Osiris, Schöpfer des Getreides und Herrscher der Toten in der Unterwelt; 6. Isis, zauberkundige Gattin des Osiris und Mutter des Horus; 7. Seth, Gott des Unwetters und des Chaos, Bruder und Mörder des Osiris; 14. Thot, Mondgott und Schreiber der Götter; 22. Sopdu, ein Falkengott, Herr der Fremdländer und der östlichen Wüste.
Foto: Werner Reinhold, Leipzig

Bild 39
Transport einer Statue auf einer Holzschleife (altägyptisch, aus einem thebanischen Grab). Die ägyptischen Großbauten erforderten die Lösung einer Vielzahl technischer Probleme, darunter die des Transports großer Lasten. Der auf diesem Bild gezeigte Schlitten wurde von vielen Menschen gezogen. Vor die Kufen goß man zur Erhöhung der Gleitfähigkeit Wasser.

Bild 40
Transport einer Statue. In diesem Jahrhundert wurde sehr viel für den Schutz der in den letzten zwei Jahrhunderten von Wissenschaftlern ausgegrabenen ägyptischen Schätze getan. Weltberühmt ist das Ägyptische Museum, zu dem – wie unser Foto zeigt – eine wertvolle Statue gebracht wird.
Foto: W. Wallwitz, Jena



19

Primzahlenproblem: In einer Pyramide fand man auf einer Steinplatte die Zahl 2 520.

Zerlegen Sie diese Zahl in Primfaktoren! Was stellen Sie fest?

Ägyptischer Alltag

Eine Auswahl von Aufgaben aus dem gesellschaftlichen Leben der Ägypter, gesucht und zusammengestellt aus Papyri, insbesondere dem Papyrus Rhind und dem Moskauer Papyrus. Dazu einige ägyptische Maßeinheiten:

Längenmaße
1 Elle = 7 Handbreiten = 28 Finger ≈ 52,5 cm
1 Chet (= Rute, Holz) = 100 Ellen ≈ 52,5 m

Flächenmaße
1 Setat = (1 Chet)^2 ≈ 1 Morgen ≈ 2756 m^2

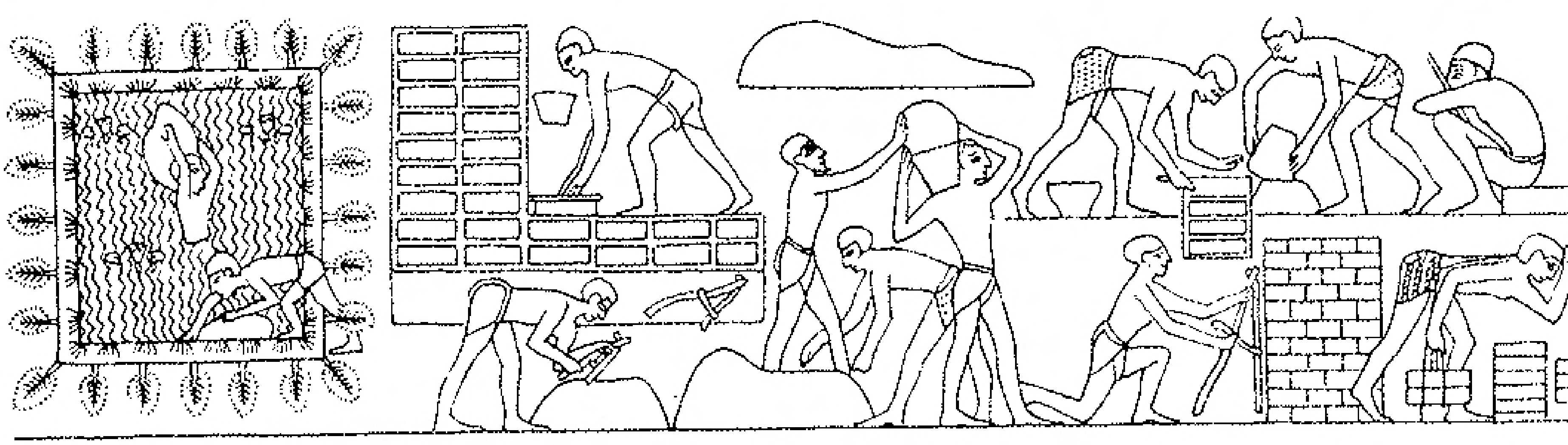
Volumenmaße
1 Kubikelle ≈ 0,140 m^3
1 Hekat (Scheffel) ≈ 4,8 Liter
1 Scheffel = 320 Ro

Bild 41
Segelboot des Totenpriesters Herischefhotep aus Holz, gefunden 1902 in Abusier, westlich von Kairo. Kleine hölzerne Segel- oder Ruderboote zählten zu den häufigsten Grabbeigaben im zweiten Jahrtausend v. u. Z. Sie sollten die Verstorbenen über den Nil in das Totenland bringen. Das Boot hat die Form eines Papyrusbündelbootes. Segelboote dieser Art dienten den Priestern zu Inspektionsreisen zu ihren Gütern und Fahrten zu den prachtvollen Götterfesten. Das abgebildete Boot wurde dem Toten mitgegeben, um ihm seine gewohnten Reisen auch im Jenseits zu ermöglichen.
Mit freundlicher Genehmigung des Ägyptischen Museums der Universität Leipzig

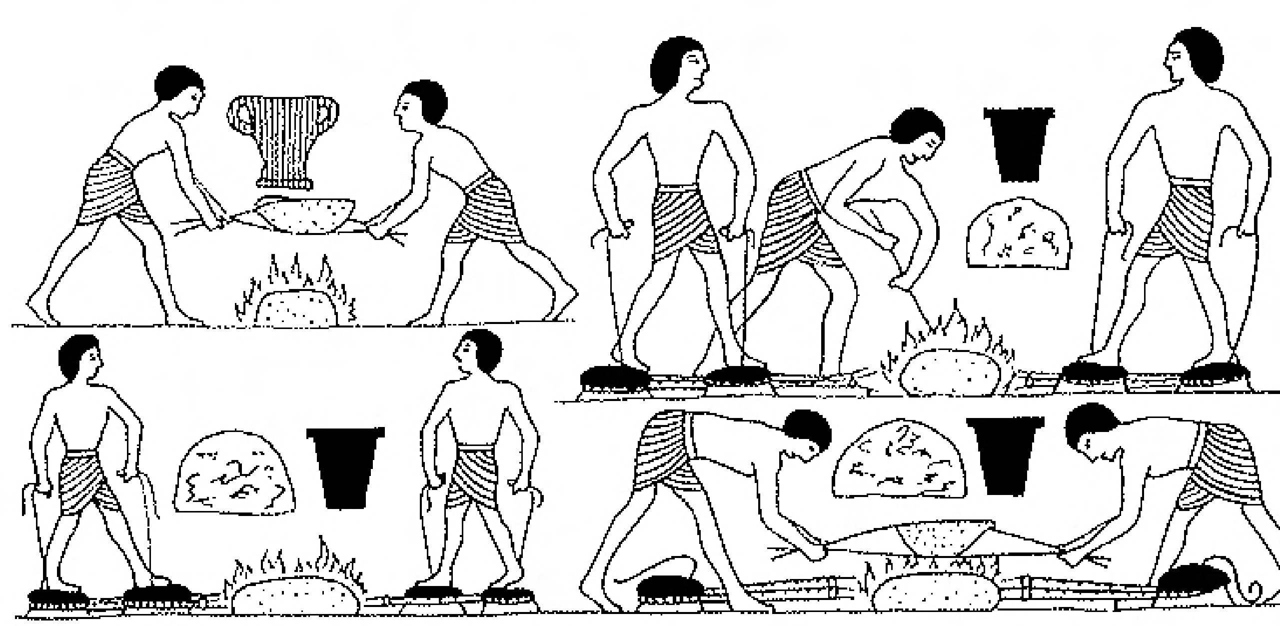
Bild 42
Landschaft an einem Seitenarm des Nil
Foto: W. Wallwitz, Jena

Bilder 43 bis 47
Aus dem ägyptischen Alltag

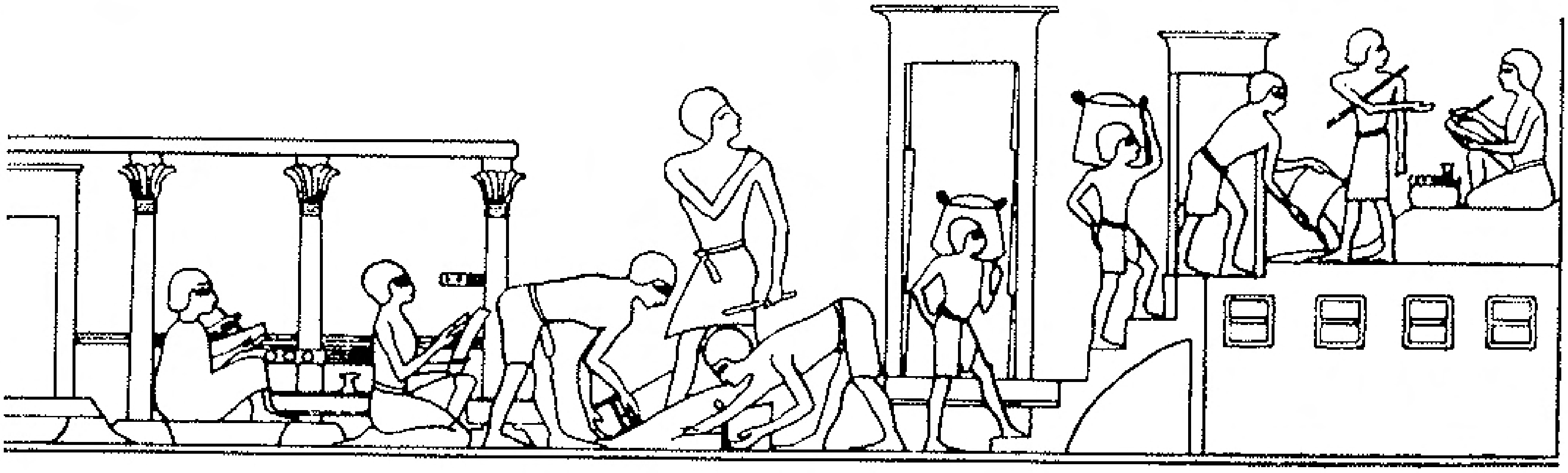
a) Handhabung einer Meßleine. Die vom Nil alljährlich überschwemmten und mit Schlamm bedeckten Felder mußten nach der Überflutung erneut vermessen werden.



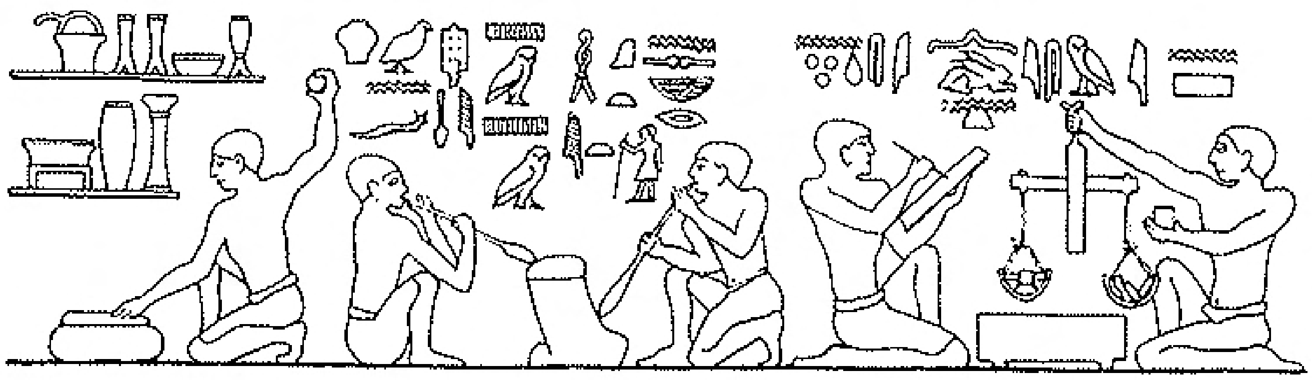
b) Sklaven bei Bauarbeiten (ägyptisches Wandbild)



c) Gießereiarbeiter. Diese Bildserie auf der Wand einer altägyptischen Grabkammer zeigt den gesamten Arbeitsablauf des Gießers bis hin zum Eingießen des flüssigen Metalls in die Form (um 1400 v. u. Z.)



d) Registrierung der Getreideernte durch Schreiber. Sie saßen in Hitze und Staub und registrierten die Anzahl der geleerten Säcke (Darstellung im Grab des Chnumhotep um 2000 v. u. Z.).



e) Goldschläger. Unser Bild, es ist eine Darstellung aus einem Grab von Sakkara (2500 v. Chr., nach Albert Neubauer), gestattet einen Blick in die Werkstatt der Goldschläger. Wir stellen diesen Beruf stellvertretend für solche Handwerke wie Töpfer, Tischler, Leder- und Metallverarbeiter, Schiffbauer, Bauarbeiter, die in diesem Buch in Aufgabentexten vorkommen sowie auf Bildern zu sehen sind, vor.

Die Ägypter entwickelten dieses über 5 000 Jahre alte Handwerk mit neuer Technik weiter, waren in der Lage, Blattgold herzustellen mit einer Dicke von 0,003 mm bis 0,001 mm und belegten damit Götterfiguren, Tempeltore, Sarkophage, einzelne Teile ihrer Toten, ganze Mumien und verwendeten die feinen Blättchen zur Gestaltung von Wandbildern.

Vieles, was sonst zerstört oder zerfallen wäre, ist durch dieses Edelmetall bis heute erhalten geblieben und gibt uns Kunde von den kulturellen Errungenschaften Ägyptens.

Gold wurde in Minen gefördert, wie es aus einer alten Karte hervorgeht. In allen Phasen seiner Verarbeitung wurde Gold gewogen (siehe Bild 47). Goldschmiede brachten es in Tonöfen mittels Holz und einem meist mit den Füßen bedienten ledernen Blasebalg zum Schmelzen, gossen es dann in Formen. Durch nochmaliges Erhitzen auf 1 200° (unter Zusatz von Silber, Kupfer oder Nickel) entstand gelbes, rötliches, auch Gold in Orange, Lichtgelb, Zitrone oder Grün. Diese Legierungen wurden – bis zur Weiterverarbeitung – in kleine Barren gegossen, um später zu Kronen, Diademen, Ringen, Halsketten usw. verarbeitet zu werden. Mathematik spielte dabei mit, z. B. in Form von technischen Zeichnungen zur Vorbereitung des Baus von Schmelzöfen, bei Vermessungsarbeiten für die Bergwerke, aber auch als geometrische Konstruktionen für Ornamente und für die Masse- und Wertbestimmung.

20

Das Bild 48 (Papyrus Rhind Nr. 48) zeigt die Berechnung des Inhaltes eines zylindrischen Kornspeichers mit einem Durchmesser von 9 (Einheiten) und einer Höhe von 10 (Einheiten) (s. a. Bemerkung zu Aufgabe 12). Dazu wird gesagt:

»Nimm $\frac{1}{9}$ von 9 weg, das ist 1; es bleibt 8; multipliziere diese Zahl mit sich selbst, das gibt 64; multipliziere 64 mit 10, das gibt 640.«

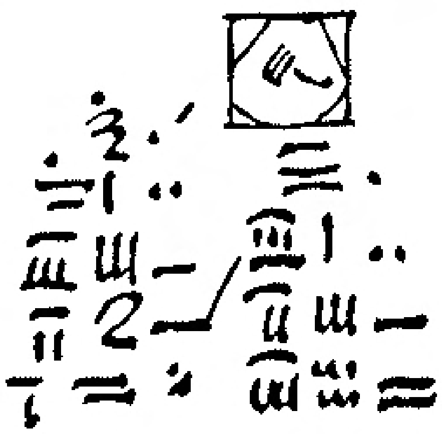


Bild 48

Der Schreiber, er hieß Achmes, benutzte also für die Kreisfläche bei gegebenem Durchmesser die Rechnung

$$A = \left(\frac{8}{9}d\right)^2 = \frac{256}{81} \cdot r^2 \approx 3{,}160\,5 \cdot r^2,$$

die unserer heutigen Formel für $A = \pi r^2$ entspricht mit $\pi \approx 3{,}16$.

a) Lösen Sie diese Aufgabe aus heutiger Sicht!

b) An anderer Stelle findet man einen zweiten Lösungsweg zur Berechnung des Inhalts einer Kreisfläche. Dabei gingen die ägyptischen Schreiber so vor, daß sie die Kreisfläche durch ein Achteck (s. Bild 50) annäherten. Dieses Achteck wurde einem Quadrat mit der Seitenlänge d (d = Durchmesser des Kreises, in dem ein Gitternetz so eingezeichnet war, daß sich neun Teilquadrate ergaben) einbeschrieben.

Bild 49
Ägyptisches Rollsiegel aus Tonschiefer, Höhe 1,3 cm, Durchmesser 1,5 cm. Es stammt aus der Zeit um 3000 v. u. Z. und ist mit eingeschnittenen Namen versehen.
Mit freundlicher Genehmigung des Ägyptischen Museums der Universität Leipzig

Die Fläche des Achtecks ist dann

$$A = d^2 - 4 \cdot \frac{d^2}{2 \cdot 9}.$$

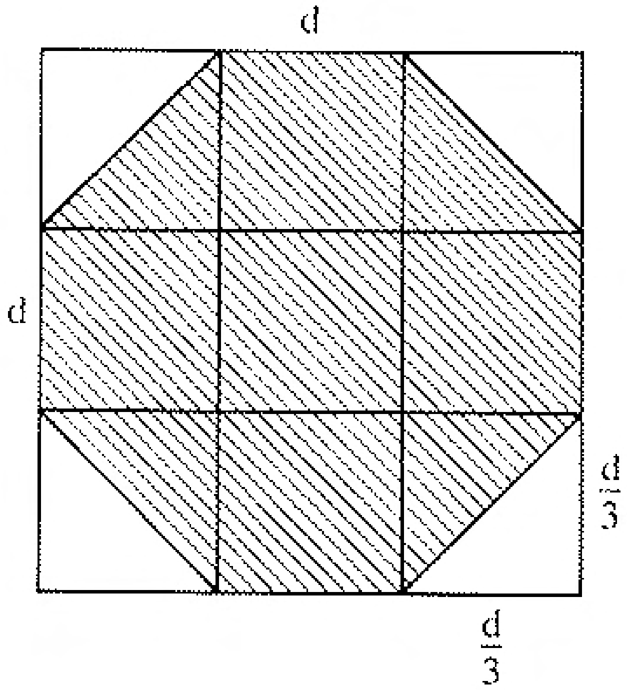


Bild 50

(Beachten Sie, daß dieses Achteck nicht regelmäßig ist!)

Wieviel Prozent weicht das Ergebnis von dem der Berechnung aus heutiger Sicht ab?

21

Beruf des Seilspanners. Zur Vermessung der alljährlich vom Nil überschwemmten Gebiete steckten die alten Ägypter Dreiecke mit rechten Winkeln ab. Ihr Verfahren war sehr einfach. In ein längeres Seil wurden in gleichen Abständen 13 Knoten geschlagen, so daß 12 gleich lange Seilstrecken entstanden. Der 1. und 13. Knoten

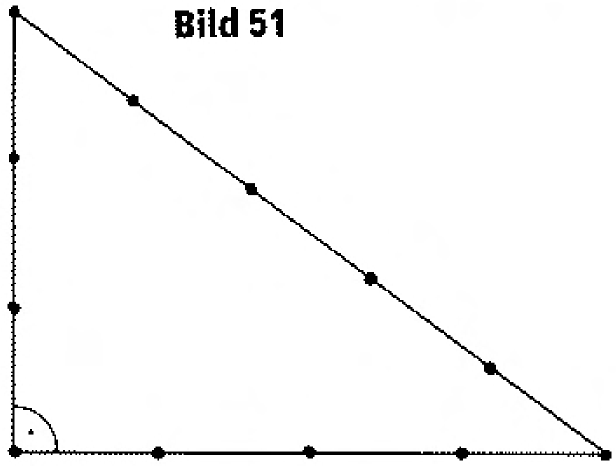


Bild 51

wurden miteinander verbunden. Mit Hilfe von Pflöcken, die man in die Erde rammte, wurde das Seil so gespannt, wie man es auf

Bild 52
Statue eines ägyptischen Feldmessers mit dem Meßseil (Abguß). Herkunft: Deutsches Institut für Altertumskunde Kairo
Mit freundlicher Genehmigung des Deutschen Museums München

dem Bild 51 sieht. Die entstehende Figur ist ein Dreieck mit den Seitenlängen 3, 4 und 5 (Längeneinheiten). Die Ägypter wußten, daß man am vierten Knoten, also dort, wo die Seiten 3 (Längeneinheiten) und 4 (Längeneinheiten) zusammenstoßen, einen rechten Winkel erhält. Auch beim Bau von Tempeln und Pyramiden wandten die Ägypter dieses Verfahren an. Es war fast eine Zeremonie, wenn die »Seilspanner« auftraten und mit Hilfe einer solchen Knotenschnur einen rechten Winkel festlegten.

Es ist zu begründen, warum bei dem beschriebenen Verfahren rechtwinklige Dreiecke entstehen.

Bild 53
Nilometer auf der Assuan vorgelagerten Insel Elephantine. Nilometer sind Wasserstandsmesser, nach denen entsprechend der Höhe des Wasserspiegels bei den lebensnotwendigen Hochwassern die Beamten die Steuern für die Bauern festlegten. Vor den Hochwassern opferten die Ägypter dem Nilgott Hapi, um 16 Ellen Flut (8,40 Meter über Niedrigwasser) zu erbitten, denn sie bedeuteten Rekordernten und Überfluß, 15 Ellen waren Sicherheit, 14 Ellen Freude, bei 13 Ellen jedoch drohte Genügsamkeit, bei 12 Ellen Hunger und Not.
Foto: Gisela Boldt, Leipzig

22

a) Zu berechnen ist der Umfang eines rechteckigen Feldes, dessen Flächeninhalt 1600 Quadratellen beträgt und dessen Seiten im Verhältnis 1:4 zueinander stehen.

b) Unterscheidet sich der Umfang von dem eines Quadrates mit der gleich großen Fläche?

23

Ein Acker hat eine Fläche von 10000 Quadratellen. Er ist so in zwei quadratische Teile zu zerlegen, daß die Seitenlänge eines Teils $\frac{3}{4}$ der Seitenlänge des anderen Teils beträgt.

24

Auf einem quadratischen Feld, dessen Seiten 300 Ellen betragen, wird Weizen angebaut. Im folgenden Jahr soll auf einer viermal so großen, ebenfalls quadratischen Fläche Weizen ausgesät werden.

Welche Seitenlänge muß das neue Feld haben?

25

»Siehe nun, es kommt ein Hirt mit 70 Ochsen.« Jemand fragt ihn: »Wieviel Ochsen bringst du von deinen zahlreichen Ochsen?« Er antwortet: »Ich bringe dir $\frac{2}{3}$ von $\frac{1}{3}$ der Ochsen. Bestimme es mir, rechne es mir!«



Bilder 54/55/56
a) Kornmahlende Dienerin. Unser Bild zeigt die Figur einer kornmahlenden Dienerin aus dem Alten Reich, 6. Dynastie (um 2000 v. u. Z.).
b) Töpfer bei der Arbeit
c) Mehl siebende Dienerin
Mit freundlicher Genehmigung des Ägyptischen Museums der Universität Leipzig
Foto: H. Etzold (†)

Brot war der wichtigste Bestandteil der Ernährung der Ägypter. Man stellte aus Weizen oder Gerste Mehl her, indem man es zwischen Steinen zermahlte, es dann mit Wasser zu Teig vermischte, mit Knoblauch oder Honig würzte, den Teig aufgehen ließ, in Formen einbrachte, die entstandenen Laibe in Öfen aus Lehmziegeln buk. Weitere Lebensmittel waren Feigen, Datteln, Weintrauben, Gurken, Erbsen, Kopfsalat, Zwiebeln, Eier, auch Straußeneier. An Fleisch gab es Gänse, Enten, Wildenten, Schafe, Ziegen, Ochsen, an Getränken Bier, Wein, wenig Milch, da diese schnell sauer wurde, dafür Käse.

Diese Nahrungsmittel, auch andere Waren wurden zum Teil selbst produziert oder aber gekauft, häufig in Metall bewertet und bezahlt, meist mit Kupfer oder Bronze, selten mit Gold und Silber. Die Metalle hatten die Form von Klumpen, Blättchen, Barren oder Ringen, deren Gewicht durch Wägen bestimmt wurde.

Als Gewichtseinheit wurde der »deben« benutzt, der 91 Gramm entsprach. Daneben gab es – zur Erleichterung der Gewichtsbestimmung – den shat im Alten Reich (2780–2280 v. u. Z.). Er entsprach einem zwölftel deben (7,6 g), der »quite« im Neuen Reich (1152–1070 v. u. Z.) einem zehntel deben (9,1 g).

Ein Vertrag aus dem Alten Reich zeigt, wie der Wert einer Ware mit diesen Gewichtseinheiten bestimmt wurde; er legt den Mietpreis für einen Diener in »shat« Bronze fest:

»8 Sack Korn:	Wert	5 shat;
6 Ziegen:	Wert	3 shat;
Silber:	Wert	5 shat;
Gesamtwert:		13 shat.«

In einem anderen Beispiel aus der Zeit des Neuen Reiches werden Waren in »deben« Kupfer bewertet:

»Der Wächter Nebsmen verkauft an Hay:
Einen Ochsen für 120 ›deben‹ Kupfer.

Als Gegenleistung erhalten:
2 Töpfe Fett für 60 deben;
5 Röcke aus feinem Gewebe für 25 deben;
1 Kleid aus Leinen aus dem Süden für 20 deben;
1 Stück Leder für 15 deben.«

Wir sehen: Waren und Metall waren auf den Märkten gleichberechtigte Tauschwerte, ein Beginn von Geldwirtschaft.

Ein weiteres Beispiel eines Wirtschaftstextes:

Vermerk über Eingänge von Baumaterialien auf einer Kalksteinplatte aus Theben (um 1440 v. u. Z.):

»2. Monat des Winters, Tag 13. Löschen an diesem Tag. Die Mannschaft des Westens, sie entluden die Lastschiffe unter dem Befehl von Hatimenwah; 6 Schiffe, macht 14 Blöcke. Die Mannschaft der Lastschiffe, sie entluden die Lastschiffe unter dem Befehl von Hatbenimen: 7 Schiffe, macht 15 Blöcke, 150 Ziegel. Tagessumme: 13 Schiffe, macht 29 Blöcke, 150 Ziegel. Darüberhinaus an diesem Tag: Behauener Sandstein: 12, unbehauener Sandstein: 4, behauener Stein: 20; Summe 65.«

26

In einem Sack befinden sich Gold, Silber und Blei von gleichem Gewicht im Gesamtwert von 84 Ringen. Es ist noch bekannt, daß 1 Dehn (ca. 91 g) Gold 12 Ringe, 1 Dehn Silber 6 Ringe und 1 Dehn Blei 3 Ringe wert sind.

Berechnen Sie den Wert der drei im Sack befindlichen Metallmengen (in Ringen)!

Pefsu-Aufgaben

Zunächst folgen eine Reihe von sogenannten pśw-Rechnungen (von pśf = kochen). Aufgaben dieser Art verlangen die Berechnung derjenigen Anzahl von Broten oder Krügen Bier, die aus einer vorgegebenen Menge Getreide hergestellt werden kann, angefangen bei elementarsten Formen bis hin zu komplizierten Aufgaben, bei denen Getreidearten ineinander umgerechnet werden mußten und es die Zusammensetzung des Bieres zu berücksichtigen galt. Sie stammen aus dem Moskauer Papyrus.

27

»10 Krüge vom Pefsu 2 sind zu tauschen für Brote vom Pefsu 5.
Wieviel Brote erhält man?«

28

»Wenn dir gesagt wird: 100 Brote der Stärke 10 (d. i. Qualität, Güte) ausgetauscht gegen Stärke 15, wieviel gibt es dafür?«

29

$\frac{1}{5}$ Scheffel Getreide und $\frac{1}{10}$ Scheffel Getreide sind 96 Ro Getreide, wieviel Ro sind demzufolge ein Scheffel?

30

Es sollten 100 Brote unter 10 Personen aufgeteilt werden, darunter ein Bootsmann, ein Vorarbeiter und ein Wachmann, die doppelte Portionen erhalten.

Wieviel Brote bekommt jeder von ihnen?

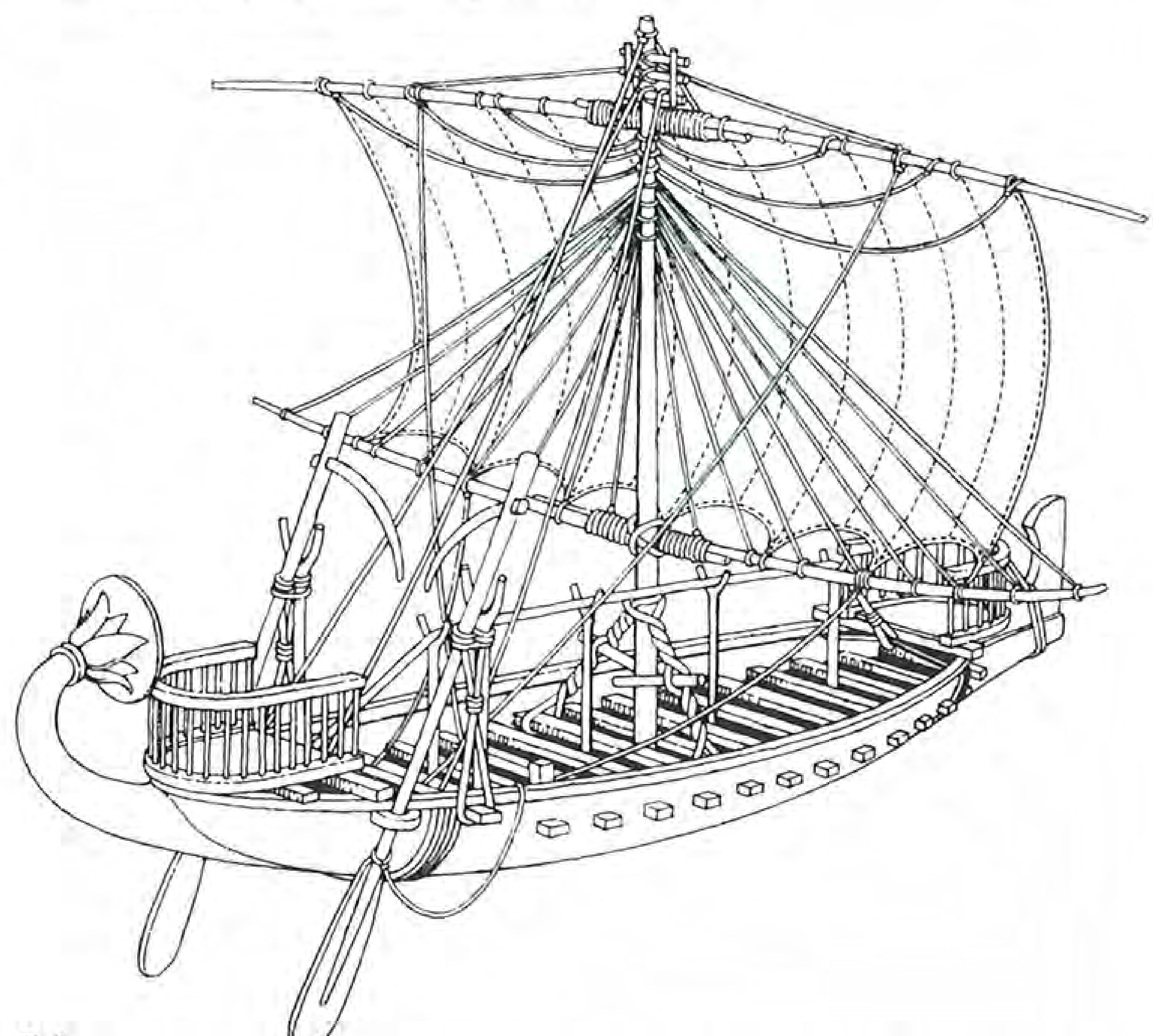


Bild 57
Ägyptisches Segelschiff

31

Eine Getreidemenge von 100 Bescha (Bescha ist ein altägyptisches Getreide- und Flüssigkeitsmaß von etwa 4,5 Litern Volumen) soll so unter vier Gruppen von Arbeitern aufgeteilt werden, daß jeder

Bild 58
Buchführung des Hofes. Einnahmen und Ausgaben am Hofe (1800 v. u. Z.) an einem einzigen Tag, z. B. für verschiedene Brote, für Bier und Krüge sowie Aufwendungen für den Harem (6. Zeile), für die Kinderfrauen (7. Zeile) und für das übrige Personal (8. Zeile)

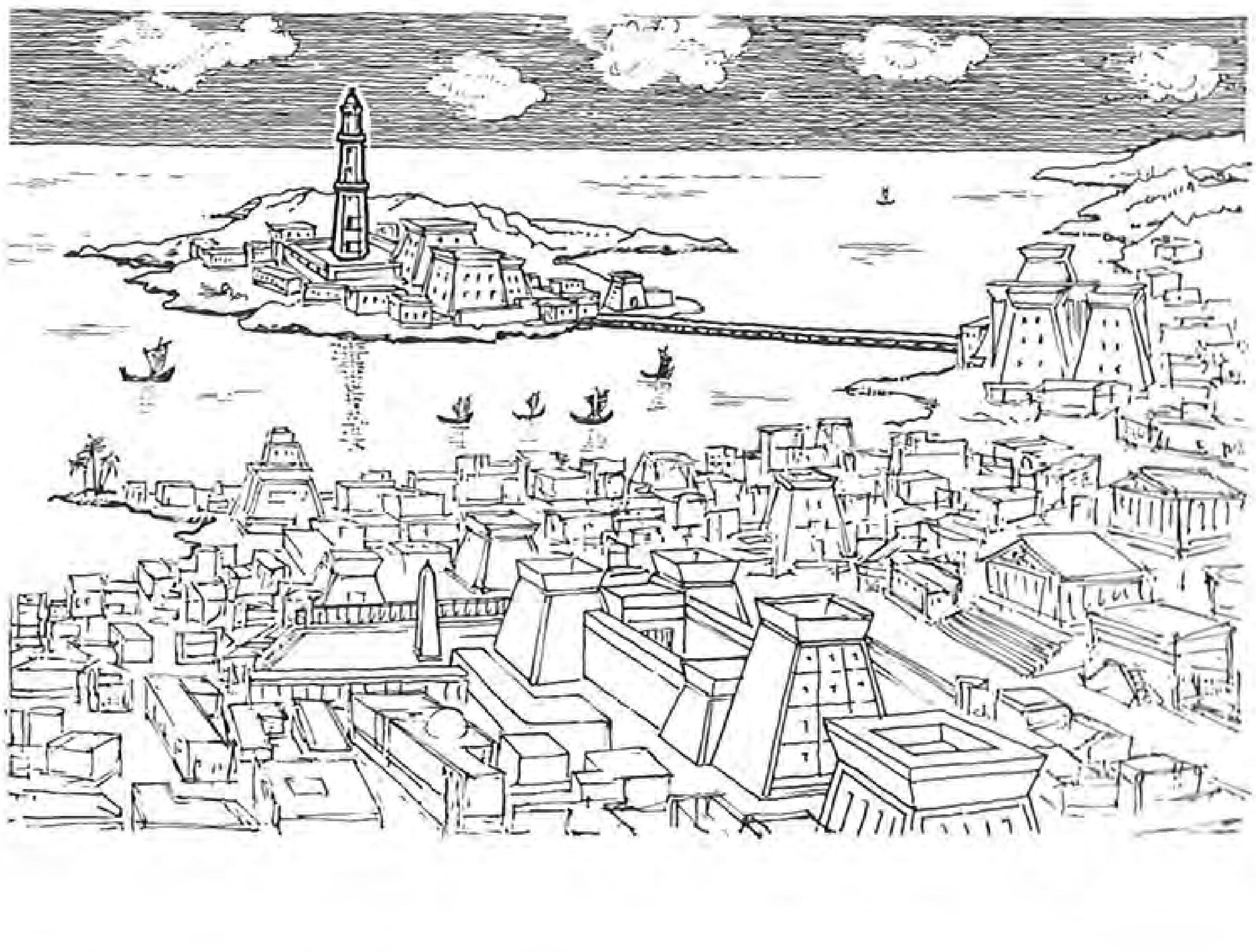


Bild 59
Das alte Alexandrien (um 3000 v. u. Z.), wichtigster Hafen Ägyptens, bedeutendes Wissenschafts- und Kulturzentrum

die gleiche Menge von Getreide erhält. Die erste Gruppe besteht aus 12 Personen, die zweite aus 8 Personen, die dritte aus 6 Personen und die vierte aus 4 Personen.

Wieviel Bescha erhält jeder Arbeiter und wieviel jede der vier Gruppen?

32

10 Maß Getreide sollen so an 10 Personen verteilt werden, daß die zweite Person $\frac{1}{8}$ Maß weniger als die erste erhält und jede folgende Person $\frac{1}{8}$ Maß weniger als die vorhergehende.

Wieviel Maß erhält jede Person?

Dies und das

33

Aus einem Krug Bier der Stärke 2 wird $\frac{1}{4}$ abgeschüttet und durch Wasser ersetzt.

Wie groß ist die Stärke der Mischung?

34

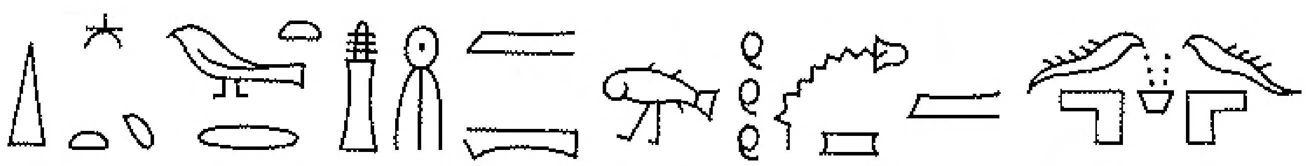
Ein Schuhmacher schneidet an einem Tag zehn Sandalen zu, oder er fertigt an einem Tag fünf (zugeschnittene) Sandalen.

Gefragt ist, wieviel vollständige Sandalen (mit Zuschneiden und Fertignähen) er an einem Tage herstellen kann.

35

Die Jahreslieferung an Fett für Soldaten beträgt 10 Scheffel.

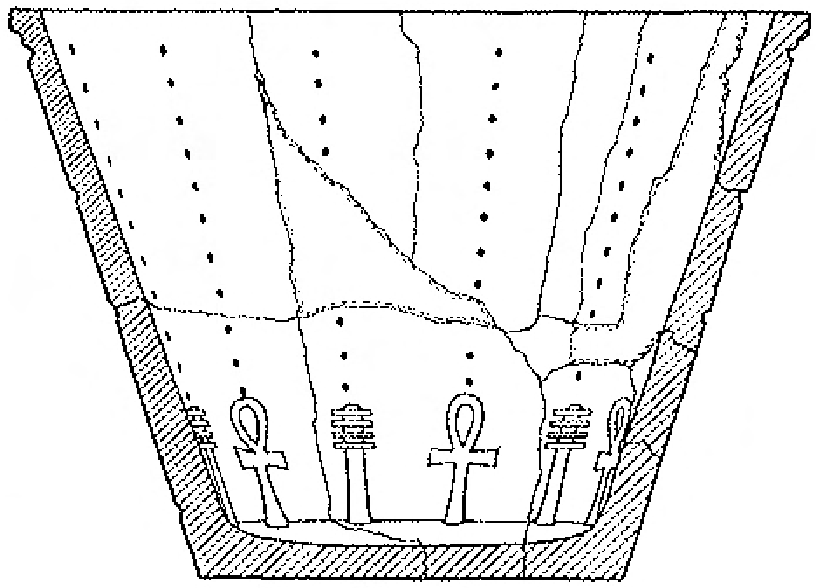
Wie groß ist die tägliche Portion für einen Soldaten in Ro? (1 Jahr = 365 Tage; 1 Scheffel ≙ 320 Ro)



»Die große Sothis am Himmel und der Nil tritt über seine Ufer«

Bild 60
Alljährlich mit dem ersten morgendlichen Sichtbarwerden des hellen Sterns Sirius kündigte sich die Nilüberschwemmung an, mit der der fruchtbare Schlamm auf die Felder kam. Die große Göttin Sothis, die Göttin des ägyptischen Jahresanfangs (z. Z. der Sommersonnenwende), wurde nach dem Sirius benannt. Das Jahr wurde in drei Jahreszeiten eingeteilt: Überschwemmungszeit, Wachstumszeit und Ernte- bzw. Hitzezeit. In jeder Jahreszeit gab es vier Monate zu je 30 Tagen. Dazu kamen am Ende des Jahres 5 Zusatztage, die als Feiertage angesehen werden können.

Bild 61
Die älteste erhaltene Wasseruhr. Im Astronomisch-Physikalischen Kabinett des Hessischen Landesmuseums in Kassel wurde 1976 eine originalgetreue Abformung der ältesten erhaltenen Wasseruhr aus Ägypten in Betrieb genommen. Es handelt sich um die sogenannte Auslaufuhr I (Museum Kairo) aus Theben von ca. 1400 v. u. Z. Ihr Erfinder ist Amenemhet (um 1550 v. u. Z.).
Mit freundlicher Genehmigung des Astronomisch-Physikalischen Kabinetts Kassel



In der Wissenschaftsgeschichte gilt die Wasseruhr als ein hervorragendes Zeugnis von der Großartigkeit der ägyptischen Kultur.

Beschreibung der Auslaufuhr I:
Im Inneren des Gefäßes befinden sich am Umfang ringsherum gleichmäßig verteilt 12 Skalen, die längs der Kegelmantellinien durch jeweils 11 runde eingeschlagene Punkte für jede Stunde (nicht übermäßig genau) markiert sind. Nur die zehnte Skale besitzt noch einen zwölften Punkt. Offensichtlich wurde die 12. Stunde gewöhnlich nicht mehr an der Uhr, sondern wiederum an einer Himmelserscheinung, wie beispielsweise dem Sonnenauf- oder -untergang, abgelesen. Die Stunde war das kleinste Zeitmaß im alten Ägypten. Unter jeder Skala sind abwechselnd die ägyptischen Symbole für Leben und für Dauer erhaben herausgearbeitet. Die in Betrieb genommene Uhr ist ein Publikumserfolg. Sie hat, wie monatelange Versuche zeigten, eine hohe Laufgenauigkeit.

Bild 62
Öluhr. Uhr, die über Docht und Flamme verbranntes Öl zur Zeitmessung benutzt. Zu diesem Zweck ist das Ölvorratsgefäß mit Markierungen versehen, an denen der jeweilige, einen bestimmten Zeitpunkt fixierende Ölstand ablesbar ist. Die Öluhr entwickelte sich aus der Öllampe, die seit etwa 3000 v. u. Z. in Ägypten nachweisbar ist.

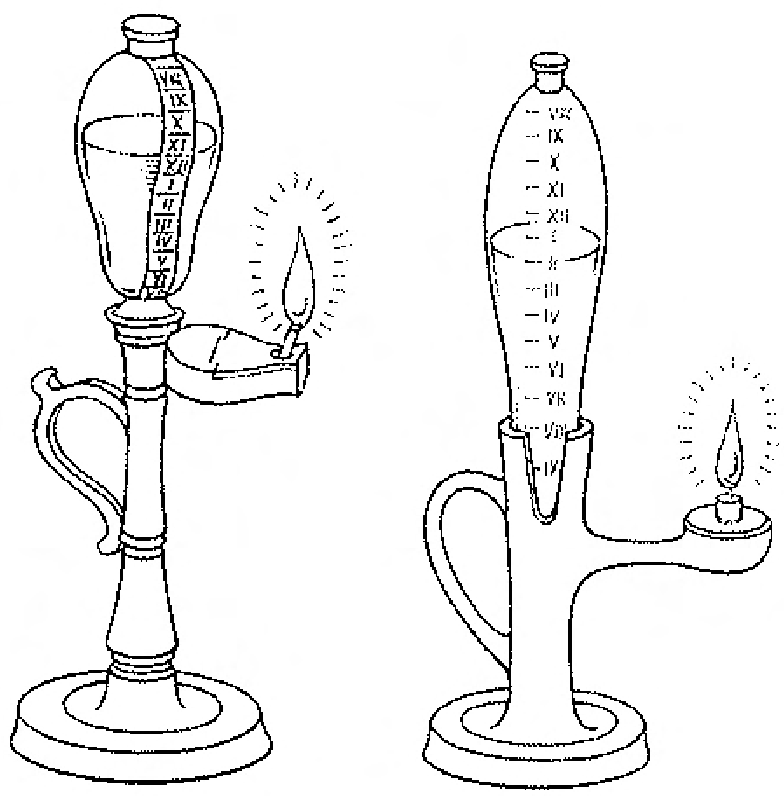
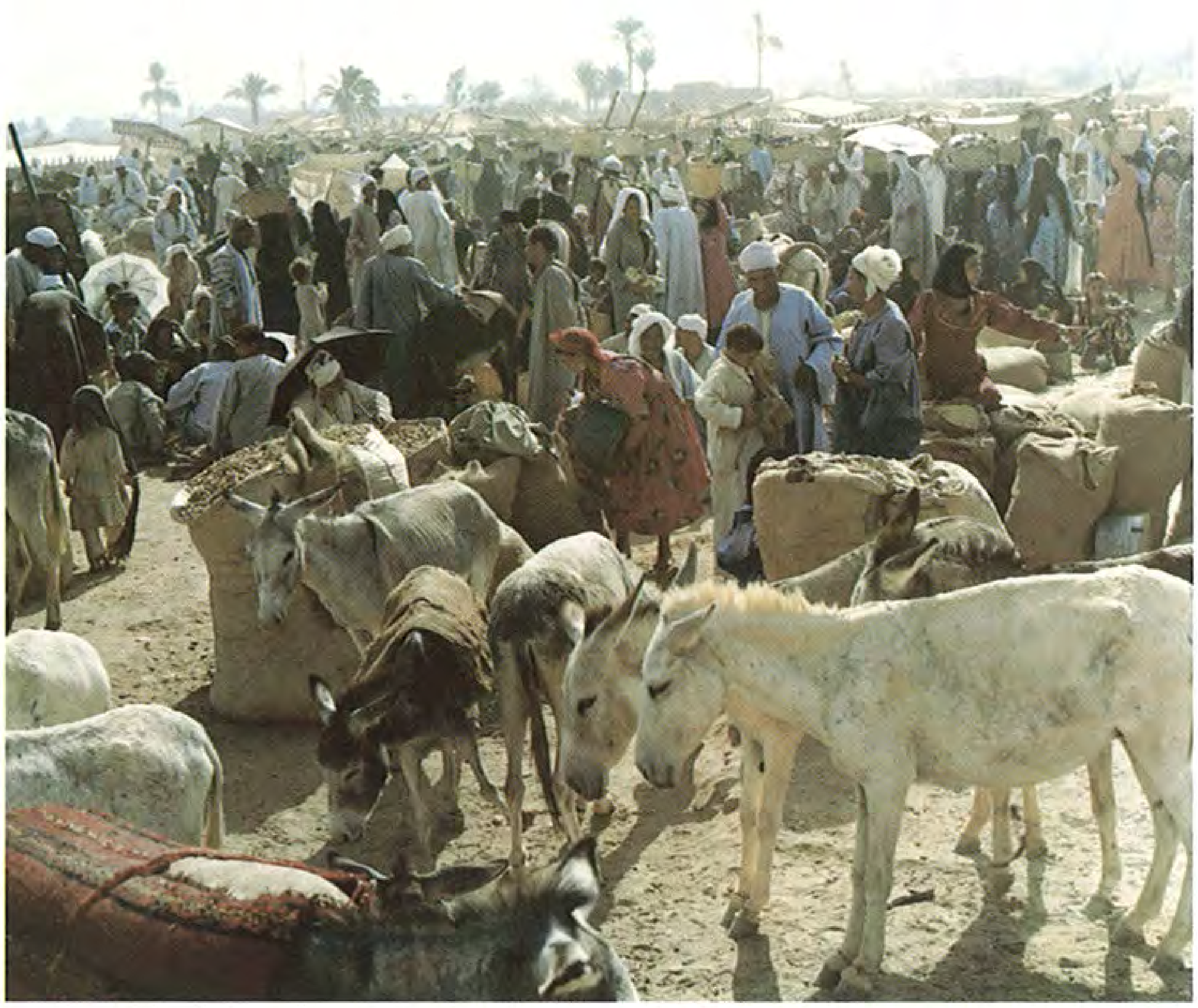


Bild 63
Kinder aus Memphis (bei Kairo) beim Weben eines Teppichs. Darüber ist das Muster aufgehängt. Es zeigt Frauen beim Wägen (Wandmalerei, Sakkara, um 2500 v. u. Z.).
Foto: E. Nehmann, Stuttgart

Bild 64
Oase Fajum, rund 1 800 km^2 groß, 1,5 Millionen Einwohner. Unser Bild zeigt den traditionellen Bauernmarkt, auf dem alles angeboten wird, was in dieser fruchtbaren Oase produziert und von den Bewohnern verbraucht wird.
Foto: ADN GmbH, Bildarchiv



Über Schätze

Die Ägypter verwendeten Modelle von geometrischen Körpern als Gegenstände des täglichen Gebrauchs, als Wägestücke, Schmuckstücke und Grabbeigaben. So kann man z. B. im Pergamonmuseum (Berlin) Siegel berühmter Persönlichkeiten in Kegel- bzw. Zylinderform betrachten. Als Schmuck wurden auch der Würfel und das Dodekaeder verwendet.

36

a) Zeichnen Sie den abgebildeten Körper im Maßstab 2:1, und bauen Sie ein Modell (Bild 65)!

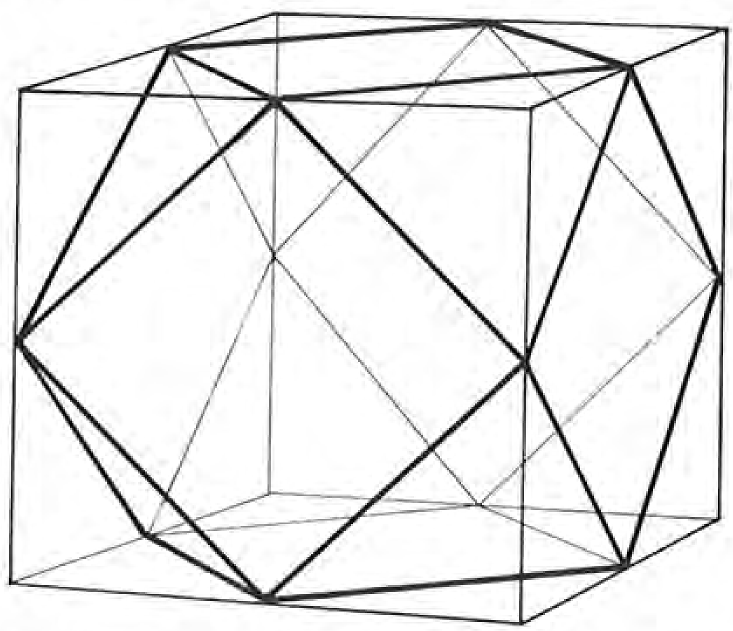


Bild 65

b) Drücken Sie die Oberfläche des Körpers (Mittelkristall) durch die Kantenlänge a des ihm umschriebenen Würfels aus!

37

Einer nahm aus einer Schatzkammer $\frac{1}{13}$ des Inhalts. Ein anderer nahm $\frac{1}{17}$ von dem, was übriggeblieben war. Er beließ 150 in der Schatzkammer (s. a. Bemerkung zu Aufgabe 12). Wieviel war ursprünglich in der Schatzkammer?

Das Rätsel der Priester des Gottes Re

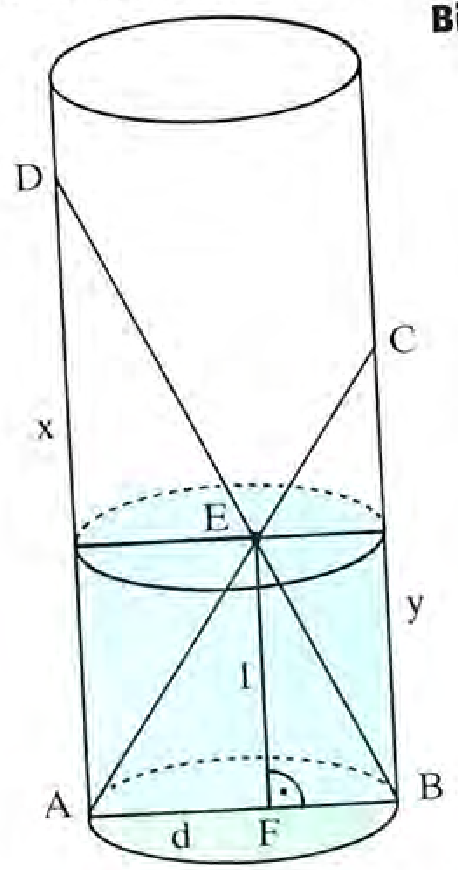
38

Bei Ausgrabungen im Nildelta (1912) fanden Wissenschaftler die Ruinen eines Tempels. An den Granitwänden gigantischer Räume entdeckten sie Texte, darunter auch arithmetische Aufgaben. Sie stellten eine der Prüfungen für Kandidaten dar, welche Priester des Gottes Re (Sonnengott) werden wollten.

Unter dem Text der nachfolgenden Aufgabe war eine Warnung eingemeißelt. Sie lautete:

»Wisse: Jeder kann vor die Wand treten. Demjenigen, welcher die Sache der Priester des Gottes Re versteht, öffnet sich die Wand zum Hinausgehen. Wisse aber: Wenn Du hinausgehst, wirst Du eingeschlossen werden. Du gehst mit den Schilfstengeln der Priester des Gottes Re hinaus. Wenn aber der Hunger über Deinen Körper siegt, so wirst Du nicht als Priester des Gottes Re hinausgehen … Durch die Wand des Lotosbrunnens gingen viele, aber wenige wurden Priester des Gottes Re. Denke nach. Schätze Dein Leben. So raten Dir die Priester des Gottes Re.«

Bild 66



Und nun zur Aufgabe: »Du stehst vor einer Wand, dahinter ist der Lotosbrunnen, wie der Kreis der Sonne. Neben dem Brunnen liegen ein Stein, ein Meißel und zwei Schilfstengel. Die Länge des einen Schilfstengels beträgt 3 Maß, des anderen 2 Maß. Die Schilfstengel kreuzen sich auf der Wasserfläche des Lotosbrunnen, diese Oberfläche liegt ein Maß über dem Grund.

Wer die Zahl der längsten Geraden mitteilt, die in den Reif des Lotosbrunnens paßt, dieser nimmt beide Schilfstengel und wird Priester des Gottes Re.«

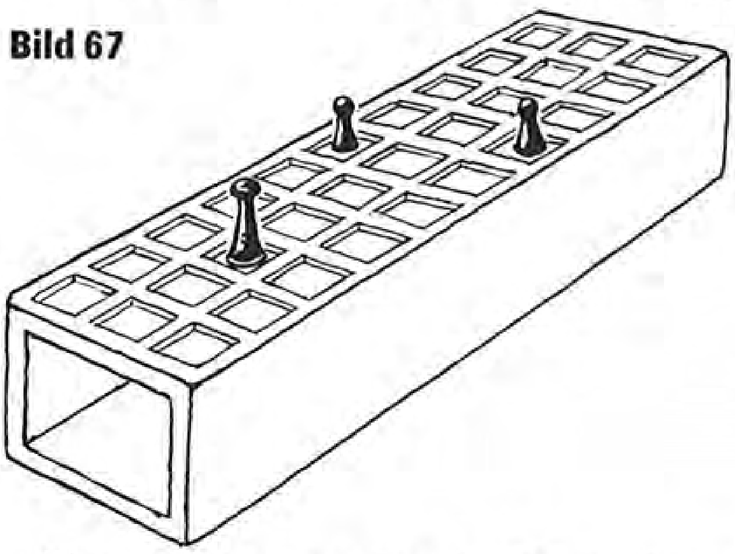
Der Brunnen ist ein gerader Zylinder (s. Bild 66). Zwei Schilfstengel (einer von der Länge 3 m, der andere 2 m) sind zu der Grundfläche des Zylinders so gestellt, daß die Summe der Längen ihrer Projektionen auf die Zylindergrundfläche gleich deren Durchmesser ist.

Gesucht ist der Durchmesser des Brunnens.

Zwei ägyptische Spiele

Schon seit früher Zeit hat es Brettspiele in Ägypten gegeben, zur Unterhaltung, zum angenehmen Zeitvertreib. Einige Stücke sind noch original erhalten, die Spielregeln dazu bisher unbekannt.

Bild 67



Unsere Skizze zeigt das *Senet*-Spiel (Bild 67). Es ist wohl das beliebteste gewesen. Es hat ein Spielbrett mit 30 quadratischen Feldern, von denen einige durch verschiedene Hieroglyphen besonders gekennzeichnet sind. Diese Bretter waren entweder aus Holz wie niedrige Tische oder Kästchen gearbeitet, in denen die Spielsteine und »Würfel« aufbewahrt werden konnten. Jeder der Spieler hatte fünf Steine, die sich durch ihre Größe unterschieden, zuweilen aber auch figürlich gearbeitet waren. Die umlaufende Inschriftzeile auf dem Senet-Kasten nennt den Besitzer des Spiels, den Hofbeamten Sennefer.

Dieses Spiel ist extra als Grabbeilage angefertigt worden.

39

Ein altes ägyptisches Brettspiel für zwei Personen ist *Siga.* Es wird auf einem Brett mit 5 · 5 oder 7 · 7 oder 9 · 9 Feldern gespielt.

Die Anzahl der Spielsteine beträgt beim Brett mit 25 Feldern 12 Steine, bei 49 Feldern 24 Steine und bei 81 Feldern 40 Steine. Die Spielregel ähnelt unserem Mühlespiel.

Am Anfang werden die Steine nur »gesetzt«, und zwar abwechselnd von jedem Spieler je zwei Steine. Der Sinn des Spiels besteht darin, die gegnerischen Steine »gefangenzunehmen«. Ein Stein gilt als »gefangen«, wenn er (in gerader Linie) von zwei gegnerischen Steinen »eingeschlossen« ist. Ein »gefangener« Stein wird vom Brett entfernt. Sind alle Steine eingesetzt, beginnt das »Ziehen«. Gezogen wird immer nur in gerader Richtung um ein Feld weiter, also niemals schräg. Dabei kann vor, zurück oder seitwärts gezogen werden. (Zieht ein Stein vorsätzlich zwischen zwei gegnerische Steine, gilt er nicht als »gefangen« und nimmt weiter am Spiel teil.)

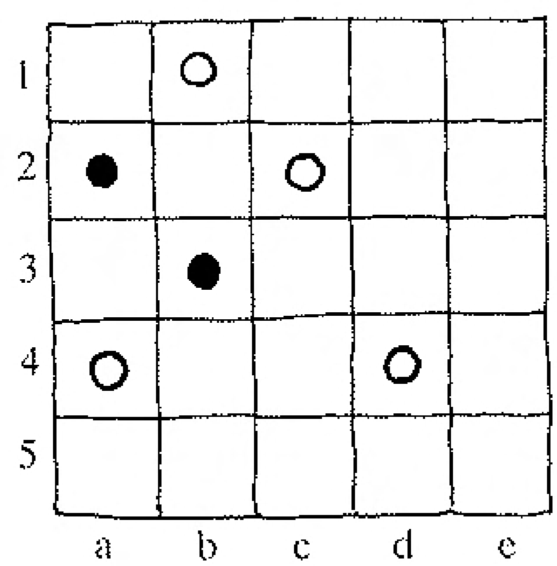


Bild 68

Im Verlaufe eines Spieles sei der abgebildete Stand erreicht worden. Schwarz ist am Zug und verliert mit dem fünften Zug.

(Kontrollstellung: Schwarz a 2; b 3, Weiß a 4; b 1; c 2; d 4)

Zeigen Sie die fünf Züge!

Lied an den Nil

Zeit der Niederschrift: 19. Dynastie (um 1250 v. u. Z.)

Preis dir, o Nil, der herauskommt aus der Erde
und herbeikommt, um Ägypten zu ernähren.
Der die Fluren bewässert;
den Re geschaffen hat, um alles Vieh zu ernähren.
Der die Wüste tränkt, die fern vom Wasser ist;
sein Tau ist es, der vom Himmel fällt.
Herr der Fische, der die Wasservögel hinaufziehen läßt.
Der Gerste macht und Weizen schafft,
daß er die Tempel Feste feiern lasse.
Ist er träge, so werden die Nasen verstopft,
und alle Menschen sind Arme;
die Speisen der Götter werden vermindert,
und Millionen von Menschen sind zugrunde gegangen.
Ist er geizig, so ist das ganze Land in Grausen
und Große und Kleine schreien.
Geht er auf, so ist das Land in Jubel,
und jeder Leib ist in Freude.
Alle Kinnbacken fangen an zu lachen,
und jeder Zahn ist entblößt.
Der Nahrung bringt und reich an Speisen ist;
der alles Gute schafft.
Der Angesehene, süß Duftende.
Der Kraut für die Herden schafft
und jedem Gotte Schlachtopfer gibt,
ob er in der Unterwelt ist, im Himmel oder auf Erden.
Der die Speicher füllt und die Scheunen weit macht,
der den Armen etwas gibt.

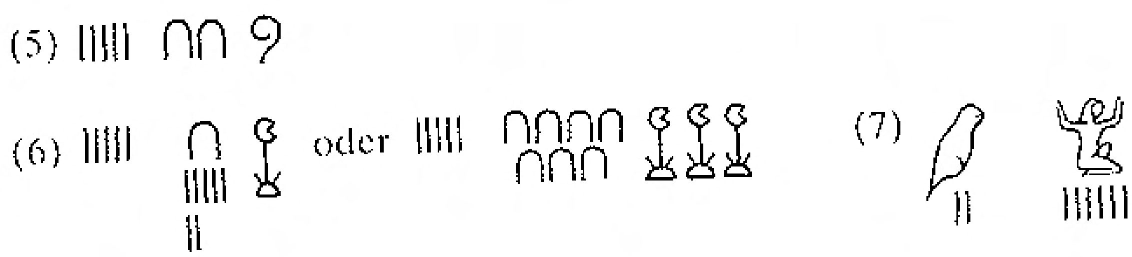
Die Lösungen

Die Lösung eines großen Problems
stellt eine große Entdeckung dar,
doch in der Lösung eines jeden Problems
steckt etwas von einer Entdeckung.
Deine Aufgabe mag noch so bescheiden sein;
wenn sie jedoch dein Interesse weckt,
wenn deine Erfindungsgabe angeregt wird
und du die Aufgabe aus dir selbst heraus löst,
so wirst du die Spannung und den Triumph
eines Entdeckers erfahren.

Georg Polyá
Stanford (USA), Zürich

1

a) (1) 2123; (2) 400 700; (3) 630 010; (4) 2 375 486
b)



2

a)

1/	72
2/	·144
4/	288
<u>8</u>	<u>576</u>
7	504

$7 \cdot 72 = 504$

b)

1	39
2/	78
4	156
8/	312
<u>16/</u>	<u>624</u>
26	1014

$26 \cdot 39 = 1014$

c)

1	7
2	14
4	28/
8	56/
12	84

$84 : 7 = 12$

d)

1	11
2	22
4	44/
8	88/
12	132

$132 : 11 = 12$

3

Bezeichnet man die gesuchte Zahl mit x, so gilt

$$x + \frac{x}{7} = 19; \quad \frac{8x}{7} = 19; \quad x = 16\frac{5}{8}.$$

Die Zahl lautet $16\frac{5}{8}$.

4

Die gesuchte Zahl sei x. Dann gilt

$$\left(x + \frac{2}{3}x\right) - \frac{1}{3}\left(x + \frac{2}{3}x\right) = 10;$$

$$x + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}x - \frac{2}{9}x = 10; \quad x = 9.$$

Die Zahl heißt 9.

5

Insgesamt sind das $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$ Maß $= 7^5$ Maß $=$ 16 807 Maß Getreide.

6

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

Die Anteile an Broten seien a, b, c, d. Dann gilt

$$\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) : 700 = \frac{2}{3} : a,$$

$$\frac{7}{4} : 700 = \frac{2}{3} : a = \frac{1}{2} : b = \frac{1}{3} : c = \frac{1}{4} : d.$$

Es ist also $\frac{7}{4} : 700 = \frac{2}{3} : a; \ \frac{7}{4}a = \frac{700 \cdot 2}{3}; \ a = 266\frac{2}{3}$.

Entsprechend ist $b = 200$, $c = 133\frac{1}{3}$, $d = 100$.

Die erste Person erhält $266\frac{2}{3}$ Brote, die zweite 200 Brote, die dritte $133\frac{1}{3}$ Brote und die vierte 100 Brote.

7

$$\frac{55}{44}x + x = 33; \quad x = \frac{1386}{97} = 14\frac{28}{97}.$$

Die Menge beträgt $14\frac{28}{97}$.

Die Schreibweise in Stammbrüchen lautet

$$\frac{28}{97} = \frac{1}{4} + \frac{1}{56} + \frac{1}{97} + \frac{1}{194} + \frac{1}{388} + \frac{1}{679} + \frac{1}{776}.$$

Dies nachzuprüfen, sei dem Leser überlassen.

8

a) Eine Menge und ihr Viertel ergeben zusammen 15.

$$x + \frac{x}{4} = 15; \quad x = 12.$$

b) $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + x = 10; \quad x = 5\frac{5}{7}.$

c) $\frac{2}{3}x + \frac{1}{10}x = 10; \quad x = 13\frac{1}{23}.$

d) $3x + \frac{x}{3} = 1; \quad x = \frac{3}{10}.$

e) $x = 4$

f) $x = 17\frac{1}{2}$

9

Die Fläche des rechtwinkligen Dreiecks berechnet man nach $A = \frac{a \cdot b}{2}$ mit $a = 10$ Chet und $b = 4$ Chet.

$A = \frac{10 \cdot 4}{2}\,\text{Chet}^2 = 20\,\text{Chet}^2$. Die Fläche beträgt 20 Chet^2.

10

a) $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 10$ Quadratruten $= 20$ Quadratruten. Die Fläche des Dreiecks beträgt 20 Quadratruten.

b) $A = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h = \frac{1}{2} \cdot (6 + 4) \cdot 20$ Quadratruten,

A = 100 Quadratruten.

Die Fläche des Trapezes beträgt 100 Quadratruten.

11

a) $V = \frac{h}{3}\left(A_G + \sqrt{A_G A_D} + AD\right)$

$= \frac{6}{3}\left(16 + \sqrt{16 \cdot 4} + 4\right)$ Kubikellen $= 56$ Kubikellen

b) $V = (16 + 4 \cdot 2 + 4) \cdot \frac{6}{3}$ Kubikellen $= 56$ Kubikellen

c) $V = \frac{16 + 4}{2} \cdot 6$ Kubikellen $= 60$ Kubikellen

12

Die Länge des Rechtecks sei a. Dann gilt

$$A = a \cdot b = a \cdot \frac{3}{4} a = \frac{3}{4} a^2; \quad \frac{3}{4} a^2 = 12; \quad a = 4; \quad b = 3.$$

Die Seiten des Rechtecks betragen 4 und 3.

13

a) Aus $a^2 + b^2 = 100$ und $a : b = 3 : 4$ bzw. $b = \frac{4a}{3}$ folgt

$$a^2 + \left(\frac{4a}{3}\right)^2 = 100; \quad 9a^2 + 16a^2 = 900; \quad 25a^2 = 900; \quad a = 6,$$

also $b = 8$.

Die Seiten der gesuchten Quadrate sind 6 Ellen und 8 Ellen lang.

b) Aus $a^2 + b^2 = c^2$ und $a : b = p : q$ bzw. $b = \frac{a \cdot q}{p}$ folgt

$$a^2 + \left(\frac{a \cdot q}{p}\right)^2 = c^2; \quad a^2p^2 + a^2q^2 = c^2p^2; \quad a^2 \cdot (p^2 + q^2) = c^2p^2;$$

$$a^2 = \frac{c^2p^2}{p^2 + q^2}. \quad a = \frac{c \cdot p}{\sqrt{p^2 + q^2}} \quad \text{und} \quad b = \frac{c \cdot q}{\sqrt{p^2 + q^2}}.$$

14

a) Die Masse erhält man aus

$$m = V \cdot \gamma = \frac{1}{3} a^2 h; \quad \gamma = \frac{1}{3} \cdot 233^2 \cdot 148 \cdot 2{,}5\ \text{t} \approx 6\,695\,643\ \text{t}.$$

Die Gesteinsmasse betrug etwa 6,7 Mill. Tonnen.

b) Die Länge einer Seitenkante der Plattform sei x. Dann gilt

$$\frac{x}{233} = \frac{11}{148}; \quad x = \frac{11 \cdot 233}{148}\ m.$$

$$A = x^2 = \left(\frac{11 \cdot 233}{148}\right)^2 \text{m}^2 \approx 300\ \text{m}^2.$$

Die Plattform hat eine Fläche von etwa 300 m².

c) Die Höhe der Pyramide sei h und die Grundkante a. Dann gilt

$$\tan \varphi = \frac{2h}{a} = \frac{148}{116{,}5} = 1{,}2704; \quad \varphi = 51{,}8°.$$

Der Neigungswinkel beträgt 51,8°.

d) Die Höhe h_s einer Seitenfläche beträgt

$$h_s = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{148^2 + \left(\frac{233}{2}\right)^2} = 188{,}35\ldots\ \text{m}.$$

Dann erhält man für eine Seitenfläche $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_s$

$\approx 21\,942{,}94\ \text{m}^2$.

Die Seitenflächen sind rund 22 000 m² groß.

e) Die Lösung sei dem Leser selbst überlassen.

f) 6 695 643 t : 25 t : 60 ≈ 4 464 Güterzüge.
Es wären etwa 4 464 Güterzüge nötig.

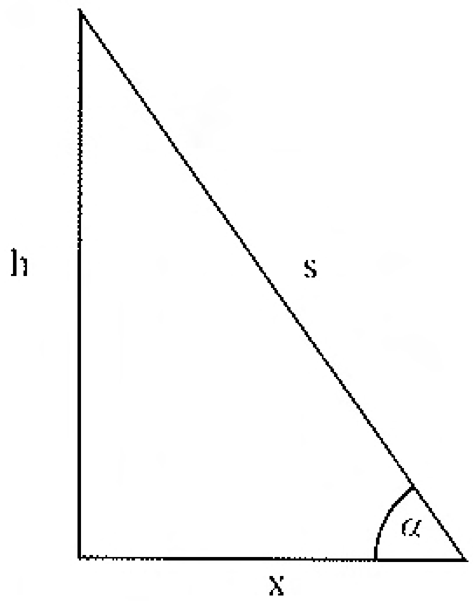


Bild 69

15

(s. Bild 69) Die Höhe ist 144 m und die halbe Diagonale $x = \frac{215\sqrt{2}}{2}$ m.

Dann ist $\tan\varphi = \frac{h}{x} = \frac{144 \cdot 2}{215 \cdot \sqrt{2}} = 0{,}9472$.

Die Ägypter hatten den Winkel ziemlich genau berechnet.

16

a) $A = a \cdot b = 544 \cdot 277\ \text{m}^2 = 150\,688\ \text{m}^2 = 15{,}0688$ ha.
Die Kultstätte hatte eine Fläche von etwa 15 ha.

b) Die Grundfläche habe die eine Seite a, dann gilt
$a\,(a + 12) = 13\,189$;

$a^2 + 12a - 13\,189 = 0$; $\quad a = 109$ m ($a_2 = -121$ entfällt);
$b = 121$ m.

Die Seiten sind 109 m bzw. 121 m lang.

c) –

17

a) Aus den Maßen folgen die wahren Längen mit

$$h = 48 \cdot M = 48 \cdot 32{,}5\ \text{cm} = 1560\ \text{cm} = 15{,}60\ \text{m},$$
$$b = 36 \cdot M = 36 \cdot 32{,}5\ \text{cm} = 1170\ \text{cm} = 11{,}70\ \text{m},$$
$$c = 30 \cdot M = 30 \cdot 32{,}5\ \text{cm} = 975\ \text{cm} = 9{,}75\ \text{m},$$
$$d = 18 \cdot M = 18 \cdot 32{,}5\ \text{cm} = 585\ \text{cm} = 5{,}85\ \text{m}.$$

Weiterhin ist $h : c = 48 : 30 = 8 : 5 = 1{,}6$,
$c : d = 30 : 18 = 5 : 3 = 1{,}667$.

Diese beiden Proportionen entsprechen etwa dem *Goldenen Schnitt*, für den der genaue Faktor 1,618 ist.

b) Der Neigungswinkel ergibt sich aus

$$\tan\varphi = \frac{2b}{b} = \frac{1562}{585} = 2{,}6701; \quad \varphi = 69{,}47° \approx 70°.$$

Der Neigungswinkel beträgt etwa 70°.

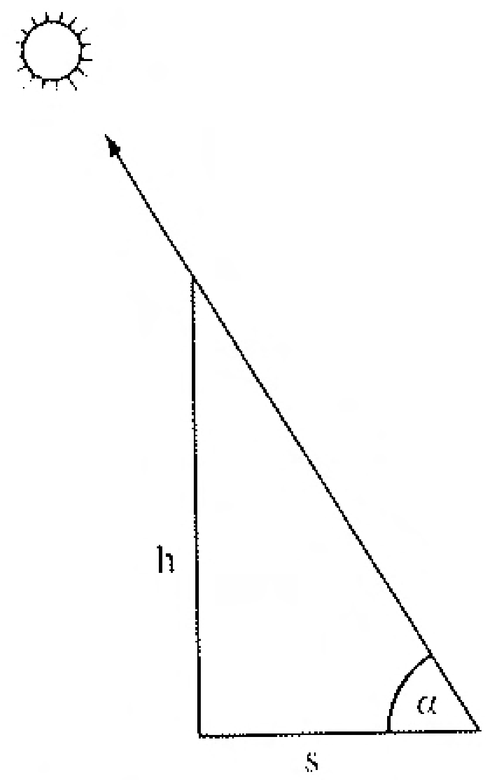


Bild 70

18

Die Höhe des Obelisken sei h, die Schattenlänge s und die Sonnenhöhe α. Dann gilt

$$\frac{h}{s} = \tan\alpha; \quad h = s \cdot \tan\alpha = 31{,}71 \cdot \tan 35{,}75° = 22{,}83$$

(s. Bild 70).

Der Obelisk von Luxor ist rund 23 m hoch.

19

Die Zahl ist das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) der ersten zehn Zahlen. Es ist interessant, zu erkennen, daß das kgV der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 und 10 mit dem kgV der zweiten Hälfte dieser Zahlen übereinstimmt, d.h. mit dem kgV der Zahlen 6, 7, 8, 9 und 10. Dieses Beispiel (aus 1500 v.u.Z.) veranschaulicht den allgemeinen Lehrsatz, daß das kgV aller natürlichen Zahlen von 1 bis $2\,n$ mit dem kgV der natürlichen Zahlen von $n + 1$ bis $2n$ übereinstimmt.

20

a) Das Volumen des Zylinders erhält man mit $d = 9\ \overline{\text{LE}}$ und $h = 10\ \overline{\text{LE}}$ aus $V = \frac{\pi d^2}{4} \cdot h = \frac{\pi \cdot 81 \cdot 10}{4}\ \overline{\text{LE}}^3 \approx 636\ \overline{\text{LE}}^3$.

b) Die Fläche des Achtecks beträgt mit $d = 9\ \overline{\text{LE}}$

$$A = \left(d^2 - \frac{2}{9}d^2\right) = \frac{7}{9}d^2 = \frac{7}{9} \cdot 9^2\ \overline{\text{LE}}^2 = 63\ \overline{\text{LE}}^2.$$

$$\frac{\pi d^2}{4} : \frac{7}{9}d^2 = 100 : p; \quad p = \frac{28}{9\pi} \approx 99.$$

Das Ergebnis weicht etwa 1 % vom wahren Wert ab. ($\overline{\text{LE}}$ bedeutet hier »Längeneinheit«).

21

Es gilt die Gleichung $3^2 + 4^2 = 5^2$ bzw. $9 + 16 = 25$; deshalb handelt es sich bei den Zahlen 3, 4 und 5 um ein pythagoreisches Zahlentripel. Nach dem Satz des Pythagoras gilt $a^2 + b^2 = c^2$ für rechtwinklige Dreiecke mit den Kathetenlängen a und b und der Hypotenusenlänge c.

22

a) Die eine Seite des Rechtecks sei a. Dann gilt

$$A = a \cdot 4a = 4a^2 = 1600 \text{ Quadratellen};$$
$$a = 20 \text{ Ellen}, \; b = 80 \text{ Ellen}.$$

Der Umfang des Rechtecks ist $u = 2 \cdot (20 + 80)$ Ellen $= 200$ Ellen.

b) Der Umfang des Quadrates beträgt
$$u = 4 \cdot \sqrt{1600} \text{ Ellen} = 160 \text{ Ellen}.$$

Der Umfang des dem Rechteck flächengleichen Quadrates ist um 40 Ellen kürzer als der des Rechtecks.

23

Es sei x die Seitenlänge eines Ackerteils, y die des anderen Teils. Dann gilt

$$x : y = 1 : \frac{3}{4} \quad \text{und} \quad x^2 + y^2 = 10\,000.$$

Demzufolge ist

$$y = \frac{3}{4}x \quad \text{und} \quad x^2 + \frac{9}{16}x^2 = 10\,000; \quad x = 80; \quad y = 60.$$

Die eine Seitenlänge beträgt 80 Ellen, die andere 60 Ellen.

24

Die Fläche A_1 des ersten Quadrates mit der Seite $a_1 = 300$ Ellen beträgt $A_1 = a_1^2$, und die Fläche A_2 des zweiten Quadrates mit der Seite a_2 ist $A_2 = a_2^2$. Daraus folgt $A_2 = 4A_1$ oder $a_2^2 = 4a_1^2$ und damit $a_2 = 2a_1 = 2 \cdot 300$ Ellen $= 600$ Ellen.

25

Die Anzahl der Ochsen sei x. Dann gilt

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{x}{3} = 70; \quad x = 315.$$

Der Hirt besitzt 315 Ochsen.

26

Die Metallmengen seien x, y und z. Dann gilt

$$x:y:z = 3:6:12 = 1:2:4 \text{ und}$$
$$x+y+z = 84.$$

Daraus folgt $84:7 = x:1$;
$x = 12$ und entsprechend $y = 24$, $z = 48$.
Das Gold hat einen Wert von 48 Ringen, das Silber von 24 Ringen und das Blei von 12 Ringen.

27

Ist x die Anzahl der Brote, so gilt

$$2:5 = 10:x; \quad x = 25.$$

Für 10 Krüge Bier erhält man 25 Brote.

28

Die Anzahl der Brote der Stärke 15 sei x. Dann gilt

$$\frac{x}{100} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}; \quad x = \frac{200}{3} \approx 66.$$

Für 100 Brote der Stärke 10 erhält man 66 Brote der Stärke 15.

29

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10}; \quad \frac{3}{10} \text{ Scheffel} \mathrel{\widehat{=}} 96 \text{ Ro}$$

$$1 \text{ Scheffel} \mathrel{\widehat{=}} \frac{96 \cdot 10}{3} = 320 \text{ Ro}.$$

30

Jede der restlichen Personen erhalte x Brote. Dann gilt

$$3 \cdot 2x + 7x = 100; \quad 13x = 100; \quad x = 7\frac{9}{13}.$$

Der Bootsführer, der Vorarbeiter und der Wachmann erhalten je $15\frac{5}{13}$ Brote, die übrigen 7 Personen je $7\frac{9}{13}$ Brote.

31

Es sei x die Getreidemenge (in Bescha), die jeder Arbeiter erhält. Dann gilt

$$12x + 8x + 6x + 4x = 100\,; \quad x = 3\frac{1}{3}\,.$$

Jeder Arbeiter erhält $3\frac{1}{3}$ Bescha Getreide. Es erhalten die 1. Gruppe: 40 Bescha, 2. Gruppe: $26\frac{2}{3}$ Bescha, 3. Gruppe: 20 Bescha, 4. Gruppe: $13\frac{1}{3}$ Bescha.

32

Es handelt sich um eine arithmetische Reihe mit $n = 10$ Gliedern, dem Anfangsglied $a_1 = x$, der Differenz $d = -\frac{1}{8}$ und dem Endglied $a_{10} = x - \frac{9}{8}$.

Die Summenformel für die arithmetische Reihe lautet

$$S = \frac{n}{2}(a_1 + a_{10})\,; \quad S = 5\left(x + x - \frac{9}{8}\right) = 10\,; \quad x = \frac{25}{16}.$$

Die erste Person erhält $1\frac{9}{16}$ Maß, die zweite Person $1\frac{9}{16} - \frac{1}{8} = 1\frac{7}{16}$ Maß, die dritte Person $1\frac{5}{16}$ Maß, ..., die zehnte Person $\frac{7}{16}$ Maß, zusammen also 10 Maß.

33

Es sei x die Stärke der Mischung. Dann gilt

$$x : 2 = \left(1 - \frac{1}{4}\right) : 1\,; \quad x = 1{,}5\,.$$

Die Stärke der Mischung beträgt $1\frac{1}{2}$.

34

Arbeitszeit für das Zuschneiden einer Sandale: $\frac{1}{10}$ Tag. Arbeitszeit für die Anfertigung einer Sandale: $\frac{1}{5}$ Tag. $\frac{1}{10}+\frac{1}{5}=\frac{3}{10}$, d.h., der Schuhmacher benötigt zur Fertigung einer Sandale $\frac{3}{10}$ Tag.

Demnach schafft er an einem Tag $3\frac{1}{3}$ Sandalen, denn $\frac{10}{3}=3\frac{1}{3}$.

35

1 Scheffel $\triangleq$ 320 Ro; 10 Scheffel $\triangleq$ 3200 Ro.

$$3200:365=8\frac{280}{365}=8\frac{56}{73}\approx 8{,}8\,.$$

Die Tagesration für einen Soldaten an Fett beträgt rund 8,8 Ro.

36

a) Die Lösung sei dem Leser überlassen.

b) Die Oberfläche dieses Körpers besteht aus sechs kongruenten

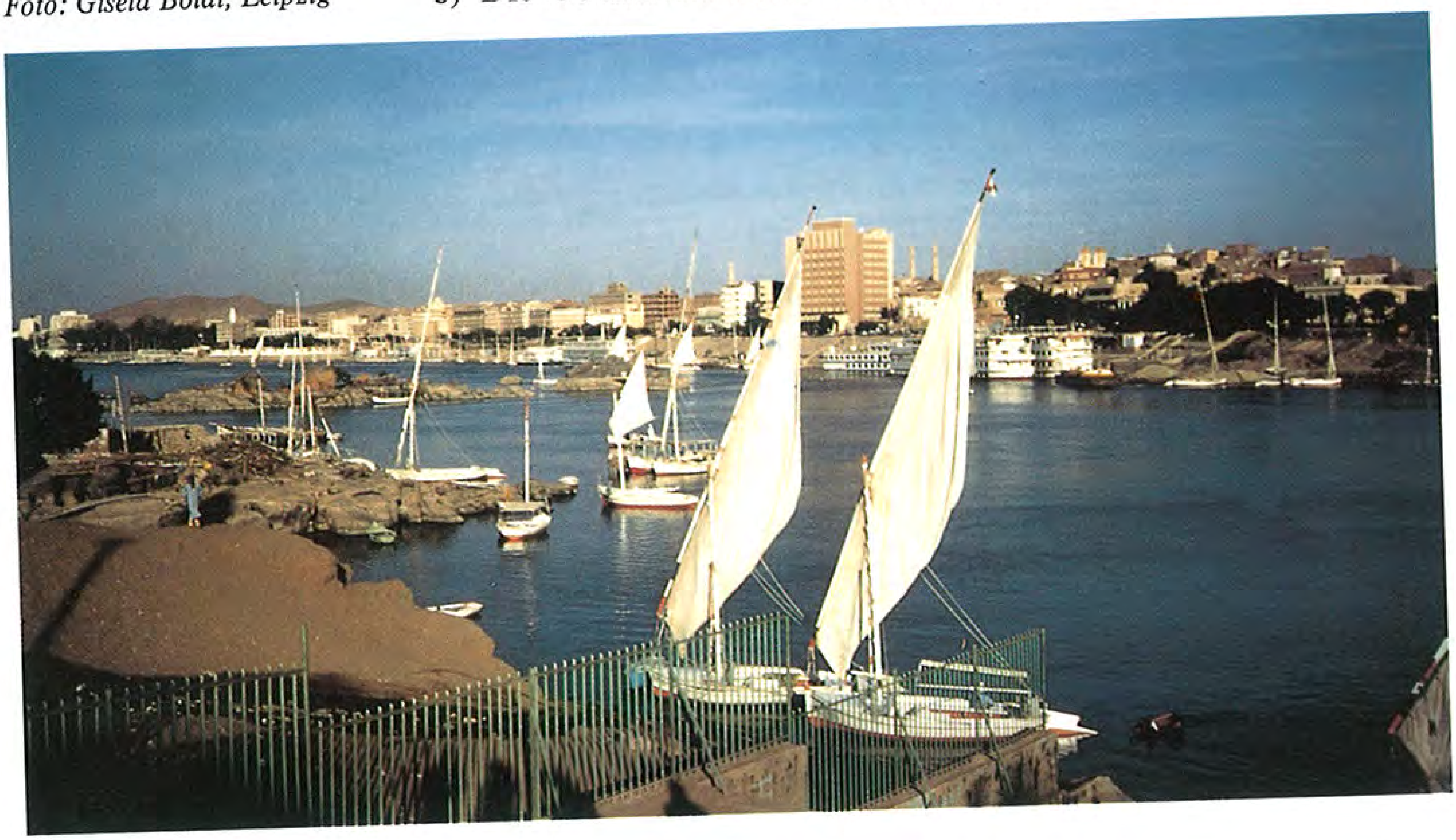


Bild 71
Blick auf den Stausee – von der Insel Elephantine aus (auf dem sich drei Nilometer befinden)
Foto: Gisela Boldt, Leipzig

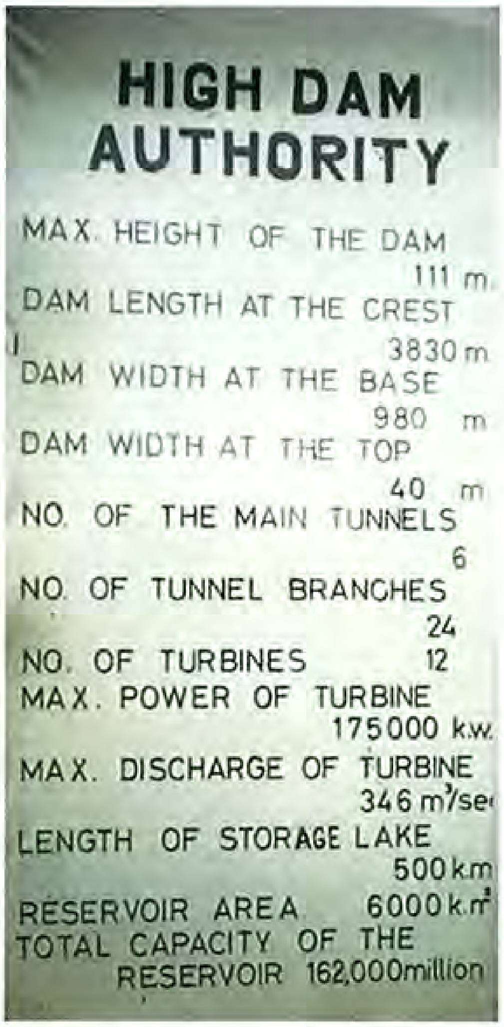


Bild 72
Die Legende des Sadd-el-Ali-Hochdamms in englisch – als Anregung, die Sprachkenntnisse aufzufrischen. Hier trotzdem eine kleine Visitenkarte: Der Sadd-el-Ali-Hochdamm, der 2. Nil-Staudamm, wurde am 9. Januar 1960 begonnen und am 15. Januar 1971 eingeweiht. Er liegt acht Kilometer südlich von Assuan, ist 3 600 Meter lang, 111 Meter hoch, an der Basis 980 Meter und an der Dammkrone 40 Meter hoch. Sein Volumen beträgt etwa 170mal das der Cheops-Pyramide und staut 157 Mrd. Kubikmeter Wasser.
Foto: Gisela Boldt, Leipzig

Quadraten und acht kongruenten gleichseitigen Dreiecken. Deshalb gilt

$$A_O = 6 \cdot \frac{a^2}{2} + 8 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \sqrt{3} = 3a^2 + a^2 \cdot \sqrt{3} = a^2\left(3 + \sqrt{3}\right).$$

37

Der Inhalt der Schatzkammer sei x. Dann gilt

$$\frac{12}{13}x - \frac{12}{13 \cdot 17}x = 150, \qquad x = 172\frac{21}{32}.$$

In der Schatzkammer waren ursprünglich $172\frac{21}{32}$.

38

Es seien $\overline{AC} = 2$ m, $\overline{BD} = 3$ m, $\overline{EF} = 1$ m. Ferner gelte $\overline{AD} = x$, $\overline{BC} = y$ und $\overline{AB} = d$.

Aus $x^2 + d^2 = 9$ und $y^2 + d^2 = 4$ erhält man $x^2 - y^2 = 5$. Wegen der ähnlichen Dreiecke $\triangle DAB \sim \triangle EFB$ ergibt sich $x : \overline{EF} = d : \overline{FB}$, also $x = \frac{d}{\overline{FB}}$, da $\overline{EF} = 1$ und wegen der ähnlichen Dreiecke $\triangle DAB \sim \triangle CBE$ $x : y = \overline{AF} : \overline{FB}$. Nach einigen Umstellungen und weil $\overline{AF} + \overline{FB} = d$, erhält man $x + y = xy$ und damit das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 5 \\ xy &= x + y. \end{aligned}$$

Die Elimination von y führt zu einer Gleichung vierten Grades

$$x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 10x - 5 = 0.$$

Diese ist nur durch systematisches Probieren zu lösen, und man errechnet den Näherungswert $x \approx 2{,}7358$.

Aus $d = \sqrt{9 - x^2}$ folgt schließlich $d \approx 1{,}231\ldots$ und damit der Durchmesser des Lotosbrunnens mit etwa 1,23 m.

39

1) Sa4–b4; Wc4–c3; 2) Sb3–a3; Wc3–b3; 3) Sa3–a4; Wb3–c3; 4) Sa4–a3; Wb5–a5; 5) Sa3–a4; Wa2–a3.

Lösung zu Seite 11: Der Bruch $\frac{2}{89}$ als Stammbruch dargestellt

$$\frac{2}{89} \text{ ist z. B. } \frac{1}{90} + \frac{1}{92} + \frac{1}{4094} + \frac{1}{8010} + \frac{1}{8188}$$

Literaturverzeichnis

Das nachfolgende Gesamtliteraturverzeichnis gibt dem Leser Standardliteratur für alle sechs Bände von »4000 Jahre Mathematik in Aufgaben«.

Das Bamberger Blockbuch (Reprint). Rechenbuch aus dem 15.Jh. München/New York/Paris 1980

Basmakowa, I.G.: Diophant und die diophantischen Gleichungen. Berlin 1974

Becker, O.: Das mathematische Denken der Antike. Göttingen 1957

Becker, O.: Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung. München 1964

Bell, E.T.: Die großen Mathematiker. Düsseldorf 1967

BI-Lexikon: *Kahnt, H./B.Knorr:* Alte Maße, Münzen und Gewichte. Leipzig 1986

BI-Lexikon: Herausg. *R.Koch:* Uhren und Zeitmessung. Leipzig 1987

Biermann, K.-R.: Die Mathematik und ihre Dozenten an der Berliner Universität, 1810–1920. Berlin 1973

Biographien hervorragender Naturwissenschaftler, Techniker und Mediziner. Von den 80 Bänden, im B.G.Teubner-Verlag Leipzig erschienen (seit 1967), seien genannt:
Wußing: C.F.Gauß. *Hoppe:* Johannes Kepler. *Schmutzer/Schütz:* G.Galilei. *Brentjes/Brentjes:* Ibn Sina. *Ilgauds:* N.Wiener. *Tobies:* F.Klein, *Thiele:* L.Euler. *Stolz:* O.Hahn und L.Meitner. *Hamel:* F.W.Bessel. *Grabow:* Simon Stevin. *Purkert/Ilgauds:* Georg Cantor. *Wußing:* Adam Ries.

Böschenstain, J.: Ain neu geordnet Rechenbuchlein mit den zyffern, Augsburg 1518 (Reprint). Dresden 1983

Bourbaki, N.: Elemente der Mathematikgeschichte. Göttingen 1971

Cantor, M.: Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. 4 Bände. New York/Stuttgart 1965

Conrad, W.: Vom Jakobsstab zur Satellitennavigation. Leipzig/Jena/Berlin 1979

Davis, P./H.Reuben: Erfahrung Mathematik. Basel/Boston/Stuttgart 1986

Deweß, M./G.Deweß: Summa summarum. Kostproben unterhaltsamer Mathematik. Leipzig 1987

Deubner, F.: ... Nach Adam Ries. Leben und Wirken des großen Rechenmeisters. Leipzig/Jena 1959

Dieudonné, J.: Geschichte der Mathematik 1700 bis 1900. Berlin 1985

Drinfel'd, G.I.: Quadratur des Kreises und Transzendenz von π. Berlin 1980

Euklid: Die Elemente. Buch I–XIII. Leipzig 1984

Fieder, R.: Streifzüge durch die Mathematik. Mathematikaufgaben aus 4 Jahrtausenden. Berlin 1984

Gauß, C.F.: Wissenschaftliches Tagebuch, 1796 bis 1814. Leipzig 1975

Gericke, H.: Mathematik in Antike und Orient. Berlin/Heidelberg/New York/Tokio 1984

Hankel, H.: Zur Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter. Hildesheim 1965

Heermann, Ch.: Von der Zahl zum Gesetz. 1974

Herrmann, D.B.: Vom Schattenstab zum Riesenspiegel. Berlin 1978

Hofmann, J.E.: Geschichte der Mathematik. Teil 1 bis 3. Berlin 1953 bis 1957

Hogben, L.: Die Entdeckung der Mathematik. Stuttgart 1963

Hülm, Ch./S. Pietzsch: Vom Kerbholz zum Computer. Aus der Geschichte der Rechentechnik. Berlin 1988

Ifrah, G.: Universalgeschichte der Zahlen. Frankfurt/M./New York 1987

Ignatjew, E.I.: Mathematische Spielereien (aus dem Jahre 1908). Leipzig/Moskau 1978

Jentsch, W.: Michael Stifel, Leipzig 1987

Juschkewitsch, A.P.: Geschichte der Mathematik im Mittelalter. Leipzig 1964

Kaden, F.: Kleine Geschichte der Mathematik. Berlin 1987

Kaiser, H./W.Nöbauer: Geschichte der Mathematik für den Schulunterricht. Wien/München 1984

Kleffe, H.: Menschen messen Jahr und Tag. Berlin 1985

Klein, F.: Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19.Jahrhundert. Reprint in einem Band. Berlin/Heidelberg/New York 1979

Kolosow, A.A.: Kreuz und quer durch die Mathematik. Interessante mathematische Probleme – wie sie entstanden, wie sie gelöst wurden, was sie für die heutige Mathematik bedeuten. Berlin 1963

Konforowitsch, A.G.: Guten Tag, Herr Archimedes. Unterhaltsame Mathematikaufgaben vom Altertum bis zur Gegenwart. Leipzig 1986

Krysicki, W.: Zählen und Rechnen einst und jetzt. Leipzig 1968

Kuhrt, H./A. Kutschmar: Baustilfibel. Berlin 1984

Lietzmann, W.: Der Pythagoreische Lehrsatz. Leipzig 1968

Lietzmann, W.: Riesen und Zwerge im Zahlenreich. Leipzig 1969

Lietzmann, W.: Altes und Neues vom Kreis. Leipzig 1966

Life (Autorenkollektiv): Wunder der Wissenschaft: Die Mathematik. Niederlande 1969

Mainzer, K.: Geschichte der Geometrie. Mannheim/Wien/Zürich 1980

Menninger, K.: Zahlwort und Ziffer. Eine kleine Kulturgeschichte der Zahlen. Göttingen 1958

Meschkowski, H.: Problemgeschichte der Mathematik. 2 Bände. Mannheim/Wien/Zürich 1979/81

Miller, M.: Gelöste und ungelöste mathematische Probleme. Leipzig 1973

Neugebauer, O.: Vorlesungen über Geschichte der antiken mathematischen Wissenschaften; Bd. 1 Vorgriechische Mathematik. Berlin/Heidelberg/New York 1969

Nikiforowski, W.A./L.F. Freiman: Wegbereiter der neuen Mathematik. Leipzig/Moskau 1976

Padelt, E.: Mit dem Meßrad um die Welt. Kleine Geschichte von der Kunst des Messens. Berlin 1989

Pieper, H.: Heureka – Ich hab's gefunden. 55 historische Aufgaben der Elementarmathematik mit Lösungen. Berlin 1988

Popp, W.: Geschichte der Mathematik im Unterricht. 2 Bde. München 1968

Resnikoff, H.L./R.O. Wells Jr.: Mathematik im Wandel der Zeiten. Braunschweig/Wiesbaden 1983

Schäfer, J.Ch.: Die Wunder der Rechenkunst. Eine Zusammenstellung der rätselhaftesten und belustigendsten arithmetischen Kunstaufgaben. Berlin 1985

Schreiber, P.: Die Mathematik und ihre Geschichte im Spiegel der Philatelie. Leipzig 1980

Schröder, E.: Dürer – Kunst und Geometrie. Berlin 1980

Smogorschewski, A.S.: Lobatschewskische Geometrie. Leipzig 1978

Struik, D.J.: Abriß der Geschichte der Mathematik. Berlin 1976

Thiele, R.: Die gefesselte Zeit. Spiele, Spaß und Strategien meist aus historischer Sicht. Leipzig 1984

Autorenkollektiv: Streifzüge durch die Mathematik. 2 Bde. Leipzig 1965/66

Szabo, A.: Anfänge der griechischen Mathematik. Budapest/Berlin 1969

Tietze, H.: Gelöste und ungelöste mathematische Probleme aus alter und neuer Zeit. München 1982

Tropfke, J.: Geschichte der Elementarmathematik. Bd. 1 bis 7, Berlin 1980

Vogel, K.: Vorgriechische Mathematik. 2 Bde. Hannover/Paderborn 1958/59

Vogel, K.: Chiu Chang Shu. Neun Rechenbücher arithmetischer Technik. Ein chinesisches Rechenbuch. Braunschweig 1968

Vogel, K./H. Hunger: Ein byzantisches Rechenbuch des 15. Jahrhunderts. 100 Aufgaben aus dem Codex Vindobonensis, Wien 1963

Waerden, B.L. van der: Erwachende Wissenschaft. Ägyptische, babylonische und griechische Mathematik. Basel/Stuttgart 1956

Wagner, U.: Das Bamberger Rechenbuch von 1483 (Reprint). Berlin 1988

Wußing, H. (Autorenkollektiv): Geschichte der Naturwissenschaften. Leipzig 1983

Wußing, H.: Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik. Berlin 1979

Wußing, H./H. Remane: Wissenschaftsgeschichte en miniature. Berlin 1989

Wußing, H./W. Arnold: Biographien bedeutender Mathematiker. Berlin 1989

Zilch, R.: Auf Mark und Pfennig. Berlin 1986

Sechs Bände zum Lesen und Lösen

Johannes Lehmann, Jahrgang 22, tritt mit 23 Jahren in den Schuldienst ein. Sein Herz schlägt für die Mathematik; er leitet Hobby-Matheclubs, Begabtenseminare, engagiert sich als Mathe-Mentor für die Unterhaltungsmathematik im Unterricht; er kurbelt die ersten deutschen Mathematik-Olympiaden an und demonstriert in über 1 800 Vorträgen, wie man Probleme der Schulmathematik kurzweilig präsentiert. Zwanzig Jahre lang steht er der mathematischen Schülerzeitschrift »alpha« als Chefredakteur vor und gilt mit neun Büchern als angesehener Promotor der Unterhaltungsmathematik.
Foto: W. Reinhold, Leipzig

Ein Abenteuer für Geist und Hand, das war die Mathematik für Gelehrte, Techniker und Handelsfahrer aller Zeiten.

Im Babylonischen Reich und im alten Ägypten entdeckten Priester, Schreiber und Architekten die ersten Zahlensysteme und Rechenmethoden für den Alltag.

Die Griechen erfanden den Beweis, sie gaben der Mathematik das Fundament. Ihre großartige Geometrie bewundern wir noch heute. In den Jahrhunderten römischer Dominanz stand die Mathematik im Dienste von Wirtschaft, Verwaltung und Verkehr der Eroberer. Ein beschwerliches Zahlensystem dämpfte die mathematische Entwicklung.

Über die Seidenstraße lief ein reger Kulturaustausch. Auch mathematische Kostbarkeiten gingen zwischen China, Indien und Arabien hin und her. Die Europäer erbten später im Gefolge von Handel und Krieg die Früchte orientalischer mathematischer Hochkultur.

Das Zeitalter der geographischen Entdeckungen und Eroberungen begründete den europäischen Wohlstand, ermöglichte den Ausbau von Welthandel, bürgerlicher Bildung und Manufakturwirtschaft. Die Mathematik verließ die Klosterenge und ging über die Rechen- und Schulmeister auf See und in die Handwerksbetriebe.

Astronomie und Physik initiierten nun die Naturwissenschaften und ihren mathematischen Welterfolg, die Mechanik. Es schlug die Geburtsstunde der akademischen Berufsmathematiker wie Bernoulli, Euler und Gauß.

Unser geschichtliches Aufgaben-Abenteuer endet mit volkstümlichen Problemen der heutzutage hochdifferenzierten Mathematik. Leute wie Klein, Cantor, Steinhaus oder Einstein kommen zu Wort; sie waren die akademischen Lehrer einer neuen Generation mathematischer Talente. Unsere reich bebilderte historische Mathematikaufgabensammlung ist in Europa einmalig.

Und so heißen die sechs Bände:

So rechneten Ägypter und Babylonier
So rechneten Griechen und Römer
So rechneten Chinesen, Inder und Araber
So rechneten Mönche, Rechen- und Schulmeister
So rechneten Künstler und Gelehrte
So rechnete unser Jahrhundert

Prof. Dr. Heinz Scheumann, Weingarten, glaubt zu wissen, dass nur die ersten beiden Bände erschienen sind. Diese beiden Bände sind vergriffen und offenbar nirgends wieder aufgelegt worden. Weil sie aber so unvergleichlich reichhaltig sind, habe ich sie so sorgfältig es ging gescannt und stelle sie hiermit als pdf in Internet. Rechteinhaber habe ich nicht ausfindig machen können.