Ägyptische Multiplikation

Ägyptisches Rechnen Haftendorn 2009 und 2011

			413
413	12	1	1
~~206~~	~~24~~	0	~~2~~
103	48	1	4
51	96	1	8
25	192	1	16
~~12~~	~~384~~	0	~~32~~
~~6~~	~~768~~	0	~~64~~
3	1536	1	128
1	3072	1	256
Σ	4956		413

Bei der ägyptischen Multiplikation wird der 1. Faktor fortgesetzt ohne Rest halbiert, der zweite Faktor wird verdoppelt. Die Zeilen der geraden Zahlen aus der 1. Spalte werden gestrichen, die verbleibenden Zahlen der zweiten Spalte werden addiert. Diese Summe ist das gesuchte Produkt. Diese Handlingsweise eintspricht der Erzeugung des 1. Faktors aus Binärzahl mit der DoubleDaddel−Methode.In der 2. Spalte stehen die 12−fachen der bei 413 verwendente 2−Potenzen $413 \blacktriangleright \mathrm{Base2}$ ▸ $0b110011101$ die rechte Ziffer steht also oben.

$256+128+16+8+4+1$ ▸ 413 $12\cdot(256+128+16+8+4+1)$ ▸ 4956 $413\cdot 12$ ▸ 4956

Die Halbierung ohne Rest wird von $\mathbf{halb}(x):=\mathrm{floor}\left(\frac{x}{2}\right)$ ▸ *Fertig* erledigt. $\mathbf{halb}(413)$ ▸ 206

1.1

Programmierte Funktionen

$\mathbf{nim}(x,y):=\begin{cases} y, \operatorname{mod}(x,2)=1 \\ 0, \operatorname{mod}(x,2)=0 \end{cases}$ ▸ *Fertig* $\mathbf{nim}(45,30)$ ▸ 30 $\mathbf{nim}(20,30)$ ▸ 0

Diese Funktion betrachtet in jeder Zeile x aus der 1. und y aus der 2. Spalte und sorgt dafür dass die linken Einträge rechts neben ungerade Zahlen für die spätere Summation genommen werden. Es bietet sich an, die Rechnungen im Tabellen−Fenster durchzuführen.

Im Tabellenfesnter vom TI Nspire werden die Namen der Spalten als Varablen betrachtet.

Darum kann man sie Summen von Spalten (z.B.) nicht unter den betreffenden Zahlen sondern nur in einer neuen Spalte anzeigen. Diese "Anzeigespalten" erhalten keinen Namen.

Um die Binärdarstellung des 1. Faktor gleichzeitig zu erzeugen ist die modulo−Funktion direkt geeignet.

$\operatorname{mod}(413,2)$ ▸ 1 $\operatorname{mod}(\mathbf{halb}(413),2)$ ▸ 0

Man hätte auch in der zweiten Zeile schreiben können: Spalte a k:=seq(i,i,1,16)

Spalte b zwpot:=2^k Spalte d mod(halbe,2) Spalte e aber muss so bleiben,

denn da berechnet sich jeder Wert aus dem darüberstehenden.

1.2

Ägyptische Multiplikation

	A k	B zwpot	C ersterf	D dual	E halbe	F sp2	G nimm	H	I	J	K
◆											
1	0	1	0	0	26	87	0	erst	zweit		
2	1	2	2	1	13	174	174	26	87		
3	2	4	0	0	6	348	0		produkt		
4	3	8	8	1	3	696	696	ägypt	2262		
5	4	16	16	1	1	1392	1392		summe(ni...		
6	5	32	0	0	0	2784	0	heute	2262		
7	6	64	0	0	0	5568	0	26	summe(c)		
8	7	128	0	0	0	11136	0				
9	8	256	0	0	0	22272	0				
10	9	512	0	0	0	44544	0				
11	10	1024	0	0	0	89088	0				
12	11	2048	0	0	0	178176	0				
13	12	4096	0	0	0	356352	0				
14	13	8192	0	0	0	712704	0				
15	14	16384	0	0	0	1425408	0				

D1 $=\mathrm{mod}(e1,2)$

1.3

Stammbruchzerlegung

Stammbruchzerlegung..Die Ägypter haben (fast nur) mit Stammbrüchen, also solchen mit Zähler 1, gerechnet. Sie hatten die Tabelle des Ahmed, der für etliche Brüche Stammbruchzerlegungen angab.

stammz$(4,7) \blacktriangleright \left[\frac{4}{7} \quad "=" \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{14}\right]$

stammz$(10,91) \blacktriangleright \left[\frac{10}{91} \quad "=" \right]$ Probe $\frac{1}{14}+\frac{1}{26} \blacktriangleright \frac{10}{91}$ **stammz**$(5,7) \blacktriangleright \left[\frac{5}{7} \quad "=" \right]$

stammz$(2,3) \blacktriangleright \left[\frac{2}{3} \quad "=" \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{6}\right]$ **stammz**$(2,5) \blacktriangleright \left[\frac{2}{5} \quad "=" \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{15}\right]$

Zerlegungen mit drei und mehr Elementen werden nicht gefunden.

Einige Beispiele wie die Tabelle des Ahmed, aber es wird z.T. anders.

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & "=" & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{2}{5} & "=" & \frac{1}{3} & \frac{1}{15} \\ \frac{2}{7} & "=" & \frac{1}{4} & \frac{1}{28} \\ 2 & "=" & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2.1

Kürzbare Brüche, es wird nicht gemerkt, wenn der gekürzte Zähler schon 1 ist.

stammz$(2,4) \blacktriangleright \left[\frac{1}{2} \quad "=" \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{6}\right]$ **stammz**$(12,16) \blacktriangleright \left[\frac{3}{4} \quad "="\right]$ **stammz**$(24,36) \blacktriangleright \left[\frac{2}{3} \quad "=" \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{6}\right]$

stammz$(8,10) \blacktriangleright \left[\frac{4}{5} \quad "="\right]$ **stammz**$(15,12) \blacktriangleright \left[\frac{5}{4} \quad "=" \quad 1 \quad \frac{1}{4}\right]$ **stammz**$(4,14) \blacktriangleright \left[\frac{2}{7} \quad "=" \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{28}\right]$

stammz$(10,91) \blacktriangleright \left[\frac{10}{91} \quad "="\right]$

Darauf kommt es mir jetzt aber nicht an.

stam$(2,4) \blacktriangleright \left\{\frac{1}{2}\right\}$ **stammz**$(5,7) \blacktriangleright \left[\frac{5}{7} \quad "="\right]$ aber **stam**$(5,7) \blacktriangleright \left\{\frac{1}{2},\frac{1}{5},\frac{1}{70}\right\}$

Das Programm stam(a,n) von der nächsten Seite hat diese Mängel nicht.

Das verwendet die "Deckel−Funktion $\text{ceiling}\left(\frac{19}{5}\right) \blacktriangleright 4$, die die nächstgrößere ganze Zahl ausgibt. $\text{ceiling}\left(\frac{-19}{5}\right) \blacktriangleright -3$ (gesprochen ssi:ling)

Andere Methode, von der bewiesen ist, dass sie immer endet.

Define **stam**(a,n)=Func ▸ *Fertig*

Local k,**li**,r,z

li$:=\{\square\}$: $r:=\dfrac{a}{n}$:

While $r>0$

$k:=\text{ceiling}\left(\dfrac{1}{r}\right)$: **li**:=augment$\left(\textbf{li},\left\{\dfrac{1}{k}\right\}\right)$: $r:=r-\dfrac{1}{k}$:

EndWhile

Return **li**

EndFunc

stam$(5,7)$ ▸ $\left\{\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{5},\dfrac{1}{70}\right\}$ **zerl**:=**stam**$(10,91)$ ▸ $\left\{\dfrac{1}{10},\dfrac{1}{102},\dfrac{1}{11603},\dfrac{1}{269247615}\right\}$

factor(**zerl**) ▸ $\left\{\dfrac{1}{2\cdot5},\dfrac{1}{2\cdot3\cdot17},\dfrac{1}{41\cdot283},\dfrac{1}{3\cdot5\cdot7\cdot13\cdot17\cdot41\cdot283}\right\}$ nun wird die Zerlegung von $\dfrac{10}{91}$ viel länger, dafür klappt aber eine Zerlegung von $\dfrac{5}{7}$. **stam**$(2,7)$ ▸ $\left\{\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{28}\right\}$

stammz$(2,7)$ ▸ $\left[\dfrac{2}{7}\quad \text{"="}\quad \dfrac{1}{4}\quad \dfrac{1}{28}\right]$ Hier liefern beide Programme dasselbe.

2.3

Stammbruchzerlegung

$\mathbf{stammz}(11,199) \blacktriangleright \begin{bmatrix} \frac{11}{199} & "=" \end{bmatrix}$

$\mathbf{li}:=\mathbf{stam}(11,199)$

$\blacktriangleright \left\{\frac{1}{19},\frac{1}{379},\frac{1}{159223},\frac{1}{28520799973},\frac{1}{929641178371338400861},\frac{1}{1008271507277592391123742528}\right.$

$\mathbf{li}[1] \blacktriangleright \frac{1}{19}$

$\dim(\mathbf{li}) \blacktriangleright 10$

$\mathbf{li}[10]^{-1}$

$\blacktriangleright 3193733450248197233586530763013922800018706094165839951886251884955342999313327 72$

$\mathbf{li}[10]^{-1} \blacktriangleright 3.19373\text{E}673$

$\mathbf{stam}(11,91) \blacktriangleright \left\{\frac{1}{9},\frac{1}{103},\frac{1}{16872},\frac{1}{474423768}\right\}$

$\mathbf{stammz}(11,91) \blacktriangleright \begin{bmatrix} \frac{11}{91} & "=" \end{bmatrix}$

$\mathbf{stammz}(23,91) \blacktriangleright \begin{bmatrix} \frac{23}{91} & "=" & \frac{1}{4} & \frac{1}{364} \end{bmatrix}$

2.4

Stammbruchzerlegung

"stammz" erfolgreich gespeichert

```
Define stammz(a,n)=
Func
Local k,z,li,g,nn,aa
g:=gcd(a,n)
If g>1 Then
  nn:=n/g: aa:=a/g
  Else
  nn:=n: aa:=a
EndIf
For k,2,20·nn+1
  z:=aa·k−nn:    li:=[a/n  "="]
  If z≥0 and gcd(|z|,k·nn)=|z| Then
    li:=augment(li,[1/k  z/(k·nn)])
   EndIf
  EndFor
  If mod(nn+1,aa)=0 Then
    z:=(nn+1)/aa:    li:=augment(li,[1/z  1/(z·nn)])
```

$\text{stammz}(2,7) \blacktriangleright \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & "=" & \frac{1}{4} & \frac{1}{28} \end{bmatrix}$

$\text{stammz}(2,9) \blacktriangleright \begin{bmatrix} \frac{2}{9} & "=" & \frac{1}{5} & \frac{1}{45} \end{bmatrix}$

$\text{stammz}(5,9) \blacktriangleright \begin{bmatrix} \frac{5}{9} & "=" & \frac{1}{2} & \frac{1}{18} \end{bmatrix}$

$\text{stam}(5,9) \blacktriangleright \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{18} \right\}$

2.5