Neunerprobe nach Adam Riese, 1550

Text aus Hans Wussing: Biographien bedeutender Mathematiker, Aulis-Verlag, Köln 1978, Seite 108

Von den Proben war seit jeher die Neunerprobe besonders beliebt. Für sie ist in der „Coß" folgendes Beispiel erhalten:

$$\begin{array}{r} 7869 \\ 8796 \\ \hline 16665 \end{array}$$

„Mach ein creutz zum ersten, also $\times$
Nimm die prob von der obernn Zal, als von 7869
setz die in ein veld des creutz, also $3\times$
Nun nimm die proba von der andernn Zal,
das ist von 8796 ist auch 3;
setz vff das ander veldtt neben vber, also 3×3.
Addir nun zusammen 3 + 3 wirtt 6, setz obenn wie hi $3\overset{6}{\times}3$.
So du nun die prob von beyden Zalnn oben gesatzt genumen und zusamen addirt hast, so Nime alsdann prob auch von dem, das so auß dem addirnn komen ist, das ist von der vnterstenn Zal vnder der linihen alss 16665.
Nim hinweg 9, so offt du magst, pleibn 6 übrig, die setz vnden in das ledige feltt. Ist gleich souil sam oben stett, also $3\underset{6}{\overset{6}{\times}}3$.
So weniger oder mer komen wer, so hattest du im nicht recht gethan." (nach [5])

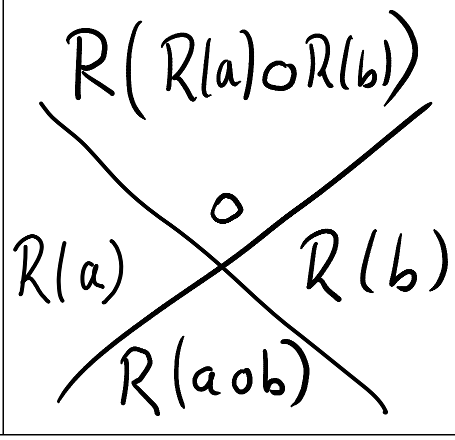
Bei diesem Beispiel ist zu erkennen, daß *Ries* als „prob" den Rest der Division einer Zahl durch 9 bezeichnet.

Wir schreiben $7869 \bmod 9 = 3$ oder $7869 \underset{9}{\equiv} 3$

Die besondere Rolle der 9 in unserem Zehnersystem bewirkt, dass wir diesen Neunerrest ganz einfach als Neunerrest der Quersumme erhalten.

Also $7869 \underset{9}{\equiv} 7+8+6+9 \underset{9}{\equiv} 30 \underset{9}{\equiv} 3$

Noch einfacher wird es, wenn man schon beim Berechnen der Quersumme "volle Neuner" einfach weglässt, also $8\underbrace{396}_{9} \underset{9}{\equiv} 8$

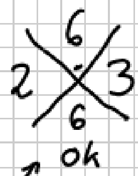
Die Idee der Neunerprobe ist, dass eine Rechnung mit üblichen Zahlen a und b, die c ergibt, auch im Restklassenring modulo 9 $\mathbb{Z}_9$ stimmen muss. Der Neunerrest von c muss sich also sowohl direkt als auch als Rechnung mit den Neunerresten von a und b ergeben. Sei der Neunerrest einer Zahl x mit R(x) bezeichet, dann müssen in dem Kreuz der Neunerprobe die obere Zahl mit der unteren übereinstimmen. $\circ$ Sei eine der Verknüpfungen $+$, $-$ oder $\cdot$	

Neunerprobe Seite 2

$3845 \bmod 9 = (\underbrace{3+8}_{11}+\underbrace{4+5}_{9}) \bmod 9 = 2$ Quersumme

$534 \underset{9}{\equiv} 5+3+4 \underset{9}{\equiv} 3$

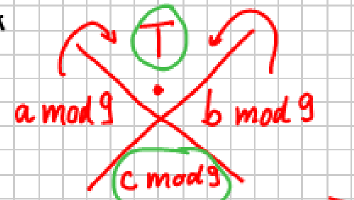
$a \cdot b = c$



$3845 \cdot 534$

$\vdots$

$205323 \underset{9}{\equiv} 2+5+3+2+3 \underset{9}{\equiv} 6$

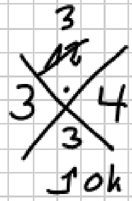


$T = [(a \bmod 9) \cdot (b \bmod 9)] \bmod 9$

$3016335 : 345 = 8743$

$\Leftrightarrow 3016335 = 345 \cdot 8743$

$\underset{3}{\equiv} \quad 3 \quad \underset{4}{\equiv}$



Die Neunerprobe ist gelungen, falls ~~ist~~ gelingt, falls $T \underset{9}{\equiv} c$

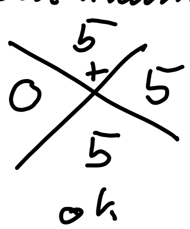
Hier ist die Neunerprobe für ein Produkt und eine Division, die man auf das Produkt zurückführt gezeigt.
Anmerkung: die Abbildung der Natürlichen Zahlen auf einen Restklassenring $\mathbb{Z}_n$ ist ein **"Homomorphismus", d.h. eine stukturerhaltende Abbildung**, für die gilt:

$$R: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}_n \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} R(a+b) &= R(a)+R(b) \\ R(a-b) &= R(a)-R(b) \\ R(a \cdot b) &= R(a) \cdot R(b) \end{aligned}$$

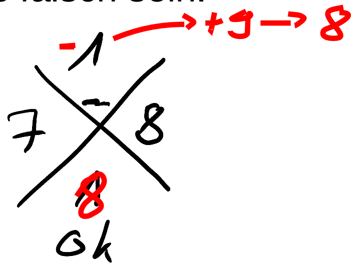
Dabei sind links die Rechnungen in $\mathbb{N}$, die man prüfen will, rechts die in $\mathbb{Z}_9$
Es ist klar, dass die das Gelingen der Neunerprobe nur notwendig ist aber nicht hinreichend.
Für ein richtiges Ergebnis ist also auch die Neunerprobe richtig, falls man sich nicht noch bei ihr selbst verrechnet. Gelingt die Neunerprobe nicht, obwohl man sich in ihr selbst nicht verrechnet hat, dann muss das Ergebnis falsch sein.

nach Adam Ries

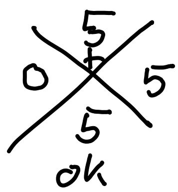
$$\begin{array}{rr} & 873 \\ + & 491 \\ \hline & 1364 \end{array} \qquad \begin{array}{r} R \\ 0 \\ +5 \\ \hline 5 \end{array} \;\to 5 \quad \text{ok}$$



$$\begin{array}{rr} & 439 \\ - & 206 \\ \hline & 233 \end{array}$$



$$\text{aber} \quad \begin{array}{rr} & 873 \\ + & 491 \\ \hline & 1274 \end{array}$$



aber 1274 ist falsch !.