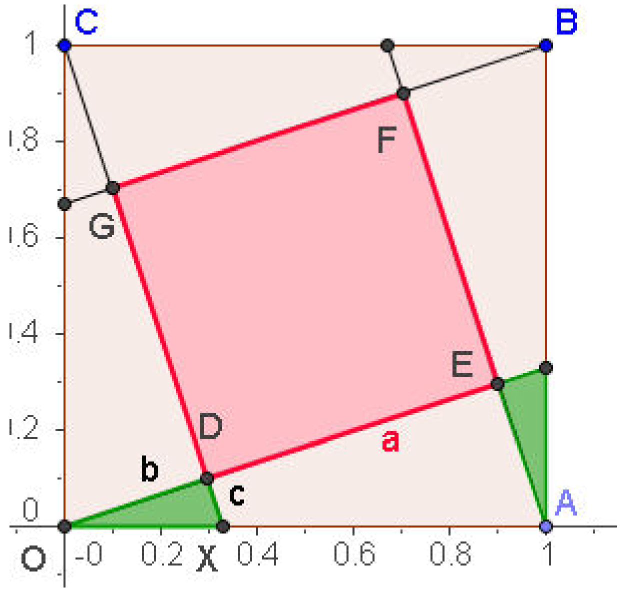
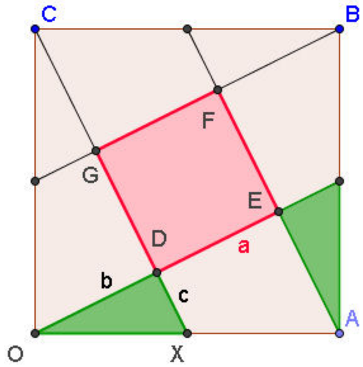
Schweizerkreuz-Quadratproblem-allgemein

Anregung Albert A. Gächter, Schweiz, Mathematik-Lehren 132 Okt 05
Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Universität Lüneburg, 6. November 2005

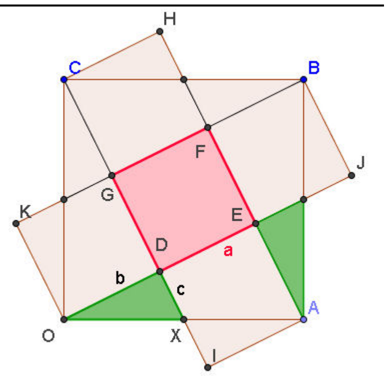


Gesucht ist in Abhängigkeit von x der Anteil, den das innere Quadrat im ganzen Quadrat einnimmt.
Spezialfall:



Hier halbiert X die große Quadratseite.

Lösungen.
A. Gächter hat in der Mathematik-Lehren viele Beweise vorgestellt, die von Lernenden zu beurteilen und zu vergleichen sind. Der schönste davon für den Spezialfall ist rechts mit dem „Schweizerkreuz“ dargestellt. Die Gleichheit wichtiger Längen sichert der Strahlensatz. Also nimmt das rote Quadrat in ganzen Quadrat ein Fünftel ein.
Bei einem anderen werden die kleinen grünen Dreiecke betrachtet. Es befinden sich 20 solche im ganzen Quadrat, davon 4 im roten Quadrat, wieder ein Fünftel.

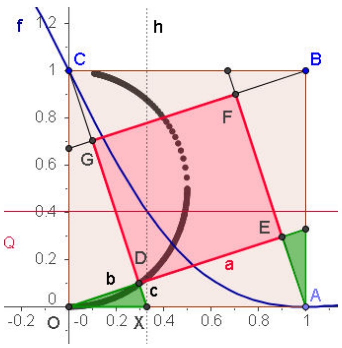


Der allgemeine Fall:
Ersichtlich sind die beiden kleinen grünen Dreiecke kongruent (wsw-Kongruenzsatz). Strecke EA ist damit auch b. Nach dem Höhensatz im großen rechtwinkligen Dreieck mit der Kathete OA gilt $\boxed{1}\ b^2 = (a+b)\cdot c$ Dieses Dreieck ist ähnlich dem kleinen grünen, daher gilt

$\boxed{2}\ \frac{c}{b} = \frac{x}{1}$, mit Pythagoras im kleinen grünen Dreieck gilt $\boxed{3}\ b^2 + c^2 = x^2$. Aus

$$\boxed{1} \wedge \boxed{2} \Rightarrow b^2 = (a+b)\cdot b\ x \Leftrightarrow b = (a+b)x \Leftrightarrow \boxed{4}\quad b = \frac{a\,x}{1-x}.$$

$$\boxed{2} \wedge \boxed{4} \wedge \boxed{3} \Leftrightarrow b^2 + x^2 b^2 = x^2 \Leftrightarrow \frac{a^2 x^2}{(1-x)^2}\left(1+x^2\right) = x^2,\ \text{also}$$



$\boxed{5}\ f(x) = a^2 = \frac{(1-x)^2}{1+x^2}$. Im Bild ist diese Funktion blau dargestellt.

D läuft auf dem Thaleskreis. (Siehe interaktiv mit GeoGebra)

Links für $x = \frac{1}{3}$. Für $x = \frac{1}{2}$ ergibt sich der oben extra bewiesene

Sonderfall $\boxed{5}\ f(\tfrac{1}{2}) = a^2 = \dfrac{(\frac{1}{2})^2}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{1}{5}.$