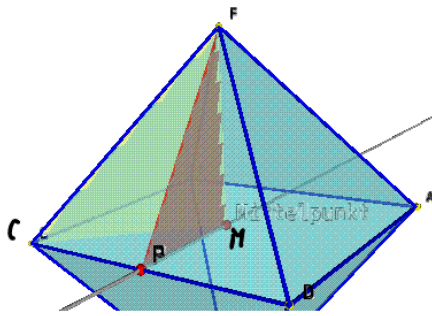


Körperberechnungen: Das Oktaeder, Lösungen



$$\Delta CDF \text{ g.l.s.} \Rightarrow PF = \frac{1}{2} \sqrt{3} a \quad PM = \frac{1}{2} a$$

$$\left\{ \begin{aligned} MF^2 &= PF^2 - PM^2 = \frac{3}{4} a^2 - \frac{1}{4} a^2 = \frac{1}{2} a^2 \\ \text{oder } MF &= \frac{1}{2} \text{ Diagonale im Quadrat } a^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow MF = \frac{1}{2} \sqrt{2} a$$

$$\alpha := \sphericalangle MPF \quad \sin \alpha = \frac{\frac{1}{2} \sqrt{2} a \cdot 2}{\frac{1}{2} \sqrt{3} a} = \sqrt{\frac{2}{3}} = 0,955 \dots$$

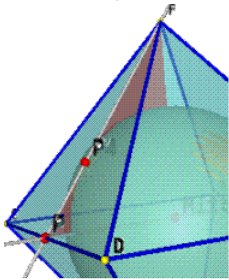
$$\alpha \approx 54,73^\circ \quad 2)$$

$\beta := \sphericalangle MCF$ ist im Quadrat a^2 zu sehen $\beta = 45^\circ$ 3)

1) Höhe $EF = \sqrt{2} a$ 4) $V = 2 \cdot \frac{1}{3} a^2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2} a = \frac{1}{3} \sqrt{2} a^3$

5) Oberfläche = $8 \cdot \text{Fl. (g.l.s. Dr.)} = 8 \cdot \frac{1}{2} a \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3} a = 2\sqrt{3} a^2$

Pyramide 6 von Pyramiden



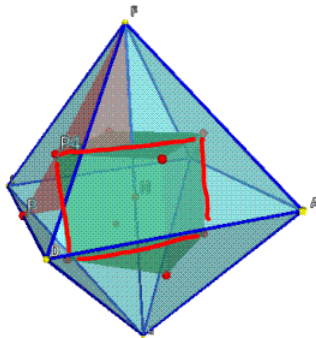
6) Umkugel Radius $MF = \frac{1}{2} \sqrt{2} a$

7) Inkugel Radius $r =$ Höhe im \square Dr. $PMF = PM$

$$\frac{r}{PM} = \sin \alpha = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow r = \frac{1}{2} a \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1}{6} \sqrt{6} a \approx 0,41 a$$

9) $V_{O_{in}} = \frac{4}{3} r^3 = \frac{4}{3} \pi \frac{1}{6^3} \sqrt{6}^3 a^3 = \frac{4}{3} \cdot \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 2^3 \cdot 3^3} \sqrt{6} a^3 = \frac{\pi}{27} \sqrt{6} a^3$

Verhältnis $\frac{V_{O_{in}}}{V_{O_{out}}} = \frac{\pi \sqrt{6} a^3 \cdot 3}{27 \cdot \sqrt{2} a^3} = \frac{\sqrt{3}}{9} \pi = 0,6046 \dots$

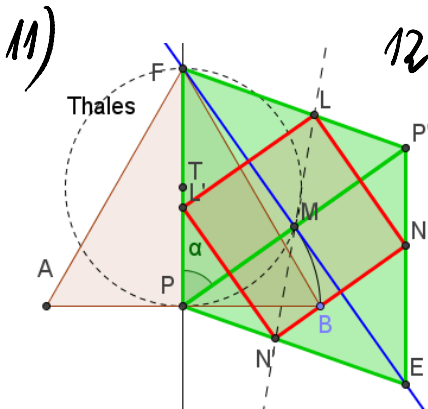


8) $\sqrt{2} b$ $\frac{1}{2} b$ $\frac{1}{2} \sqrt{2} b$ $t^2 = \frac{1}{4} b^2 + \frac{2}{4} b^2 = \frac{3}{4} b^2$
 $\Leftrightarrow b^2 = \frac{4}{3} t^2 = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{36} a^2 = \frac{2}{9} a^2$

Kante des Innenwürfels $b = \frac{1}{3} \sqrt{2} a$

10) $V_{W_{in}} = b^3 = \frac{2}{27} \sqrt{2} a^3$ $\frac{V_{W_{in}}}{V_{O_{out}}} = \frac{2 \sqrt{2} a^3 \cdot 3}{27 \cdot \sqrt{2} a^3} = \frac{2}{9} = 0,22 \dots$

$\frac{V_{W_{in}}}{V_{O_{in}}} = \frac{2 \sqrt{2} a^3 \cdot 27}{27 \sqrt{6} a^3 \cdot \pi} = \frac{2}{\sqrt{3} \pi} = 0,3675 \dots$



12) Konstruktion der Kante des zweiten Innenwürfels, `oktaeder_innenwuerfel2.ggb`

Konstr. eines Innenwürfels, bei dem die Deck- und Bodenkanten in den Seitenflächen des Oktaeders liegen. Grün ist der Halbirungsschnitt durch FPM , der Aufsicht z.B. nach Aufg. 7, α , prüfen. Die Wk von $\sphericalangle P'MF$, also die 45° -Linie erzeugt L . Es gibt sich durch Spiegeln L' und daraus das Quadrat.

$$c := \overline{LN} \quad \frac{c}{EF} = \frac{\frac{a}{2} - \frac{c}{2}}{a/2} \Leftrightarrow c = \sqrt{2} a \frac{a-c}{a} \Leftrightarrow c = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} a$$