Es gibt i.W. drei Arten, die Gruppe der Kongruenzabbildungen aufzubauen:

- Die Achsenspiegelung als grundlegend an den Anfang stellen. Dann die anderen durch Doppel- und Dreifach-Spiegelungen erzeugen.
    - Doppelspiegelung an parallelen Geraden definiert eine Verschiebung
    - Doppelspiegelung an Geraden mit Schnittpunkt definiert eine Drehung
    - Dreifachspiegelungen definieren eine Gleitspiegelung
    - Klassifizierung: mehr gibt es nicht.
- Die Kongruenzabbildungen als längentreue Abbildungen der Ebene auf sich mit gewissen Fix-Eigenschaften definieren und dann zeigen, wie solche Abbildungen konkret aussehen.
    - ...genau eine Fixpunktgerade definiert eine Achsenspiegelung
    - ...genau ein Fixpunkt definiert eine Drehung
    - ...genau eine Schar von parallelen Fixgeraden definiert eine Verschiebung
    - ...genau eine einzige Fixgerade und kein Fixpunkt definiert eine Gleitspiegelung
    - Andere längentreue Abbildungen der Ebene auf sich kann es nicht geben.
- Die Bewegungen in einem handlungsorientierten Ansatz konstruktiv erzeugen. Als Denkhilfe "Wanderlinien" der Punkte zu ihren Bildpunkten in den Blick nehmen. Die jeweilige Abbildung der Ebene auf sich intuitiv erfassen, die Definition herausarbeiten, eine oder mehrere Konstruktionen herleiten.
    - Die Achsenspiegelung. Spiegelachse als Mittelsenkrechte aller Wanderlinien.
    - Die Drehung. Wege auf Kreisen um den Drehpunkt mit demselben Drehwinkel.
    - Die Verschiebung. Wege alle entsprechend dem Verschiebungspfeil.
    - Die Gleitspiegelung. Hintereinanderausführung von Achsenspiegelung und Veschiebung.
    - Längentreue jeweils herleiten, damit als Kongruenzabbildung etablieren.
    - Doppel- und Dreifachspiegeln als Konstruktionsalternativen herleiten.
    - Fix-Eigenschaften untersuchen und herleiten.
    - Zeigen, dass es zu jeder beliebigen Gleitspiegelung eine Standard-Gleitspiegelung gibt, bei der die Gleitspiegelachse parallel zum Verschiebungsvektor ist. (*In der Schule verzichtbar.)*
    - Zeigen, dass so alle Bewegungen (= Kongruenzabbildungen) erfasst sind und dass sie bzgl. Hintereinanderausführung eine Gruppe bilden.

Didaktische Bemerkung: Für den Schulunterricht halte ich nur den unteren Weg für sinnvoll, zumal die zugehörigen Beweise und Impulse für die Fragestellungen von den Lernenden selbst kommen können. Der Weg entspricht dem hier vorgestellten Aufbau der Geometrie und es herrscht stets Klarheit, was als Argument benutzbar ist.
Der erste Weg hat seine besondere mathematische Schönheit und könnte **auch von diesem Aufbau aus** erfolgen, bei dem die Achsenspiegelung (auf Seite 3) schon definiert und konstruiert wurde. In diesem Falle hat er auch für die Lernenden (also die Studierenden) den Vorteil argumentativer Klarheit.
Verfolgt man den ersten Weg in einem Lehrzusammhang **aber** von den **Spiegelungsaxiomen** aus, so hat man man nur zwei Möglichkeiten:

- Wirklich und vollständig axiomatisch vorgehen. Dieses Vorgehen erfordert eine nummerierte Liste von Axiomen und Sätzen und bei einer Fragestellung die Verortung der Frage an einer bestimmten Stelle der Liste. Sich hier sicher zu bewegen wäre die reife Frucht einer sehr guten mathematischen Ausbildung, nicht der Weg dorthin. Auch mir bekannte Bücher **für Studierende** halten diesen Weg nicht durch.
- Sehr bald die Kongruenzsätze aus dem gewählten hinreichend großen Axiomsystem herleiten und sie dann aber auch als Argumente zulassen, wie es mathematischer Usus ist. Es ist fraglich, ob das lohnt und wirklich verschieden vom Vorigen ist.
- Axiomatische Übungen muss man in der Lehre auf die ersten paar Axiome und das Parallelenaxiom beschränken. Axiomatik ist in Algebra, Stochastik... einfacher durchzuhalten.