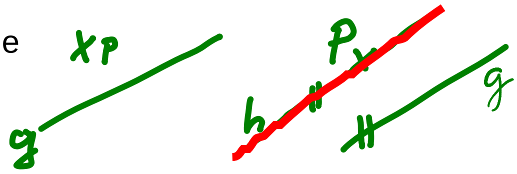
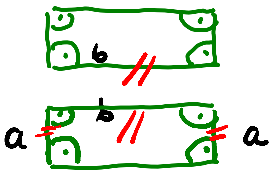
Definition: Eine Gerade h heißt **Parallele** der Geraden g, wenn h und g entweder sämtliche oder gar keinen Punkt gemeinsam haben.

Parallelen-Axiom der Euklidischen Geometrie



Gegeben sei ein Punkt P und eine Gerade g.
Dann gibt es **durch P genau eine Parallele zu g**.
Speziell $P \in g \Rightarrow g=h$.

Definition: Parallel und getrennt liegend heißt auch **echt parallel.**



Definition: Ein Viereck mit vier rechten Winkeln heißt **Rechteck**.

Rechteck-Axiom Die Seiten eines Rechtecks sind paarweise parallel und gleich lang.

Es würde reichen: Axiom: Die Senkrechte auf dem Lot von P auf g ist Parallele zu g und Parallelen haben überall denselben Abstand.

Axiome sind Grundaussagen, die man an den Anfang einer Theorie stellt und aus denen man Sätze und Aussagen herleitet. Sie brauchen nicht unbedingt "wahr" zu sein in dem Sinne, dass gar nichts anderes gelten kann. Aber wenn ein Axiom tatsächlich nicht gilt, entsteht eine andere Theorie.
Gilt das Parallelen-Axiom, entsteht die **Euklidische Geometrie**.
Gilt es nicht, entstehen zwei Typen von **Nichteuklidischen Geometrien**:
Wenn es gar keine echte Parallele zu g gibt, ist es die **Elliptische Geometrie**, ein Modell dafür ist die Geometrie auf der Kugel (Sphärische Geometrie).
Wenn es mehr als eine Parallele zu g durch Punkt P gibt, ist es die **Hyperbolische Geometrie**.
Ein Axiom-System soll **widerspruchsfrei, vollständig und minimal** sein.
Widerspruchsfreiheit sichert man durch die Angabe eines Modells, also eines geometrischen Objektes, in dem alle Axiome gelten.
Minimalität heißt, dass man keines der Axiome durch die anderen beweisen kann. Man sichert Minimalität dadurch, dass man durch Weglassen je eines Axioms etwas nachweislich anderes erhält.
Vollständig ist ein Axiomsystem, wenn man alle Aussagen, die in dem Modell möglich sind, beweisen kann.

In diesem Aufbau der Geometrie geht es um die Euklidische Geometrie. Und es geht um eine Grundlage, auf der Lernenden vollständiges Argumentieren nahegebracht werden soll. Da man bei jungen Menschen schlechterdings nicht dauernd Offensichtliches in Frage stellen kann, ohne ihr Zutrauen ins eigene Denken zu beschädigen, sind hier die Konstruktionen, wie sie euklidisch nun mal sind (und die Mathematiker aus Axiomen hergeleitet haben), als Quasi-Axiome genommen. Damit konnte man ja auch schon allerlei schaffen, wie Seite 1 bis 3 zeigen.
Interessanterweise kann man aber daraus nicht das Parallelenaxiom herleiten, es ist sinnvoll und entspricht einer tiefen Wahrheit, gerade hier die Rolle eines Axioms hervorzuheben. Euklid selbst und viele Mathematiker nach ihm haben eine solche Herleitung vergeblich versucht, bis im 19. Jh. durch Gauß, Boljai, Lobatschewski und Riemann Modelle für Geometrien ohne Parallenenaxiom angegeben wurden.
Das obige "Rechteck-Axiom" kann bei Zugrundelegung des Hilbertschen Axiomssystems für die Euklidische Geometrie hergeleitet werden. Euklid hat es aber als Axiom bezeichnet.
In dem hier vorgestellten Aufbau ist es auch sinnvoll, es als Axiom zu nehmen, denn es lässt sich aus den Konstruktionen zusammen mit den Kongruenzsätzen nicht herleiten.

Damit kann nun die gesamte Euklidische Geometrie aufgebaut werden.