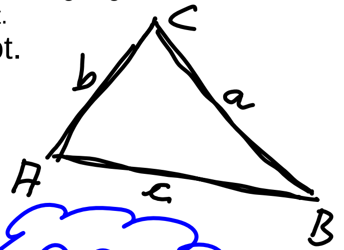
Aufbau der Geometrie   Start

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Universität Lüneburg, 10. Oktober 2006

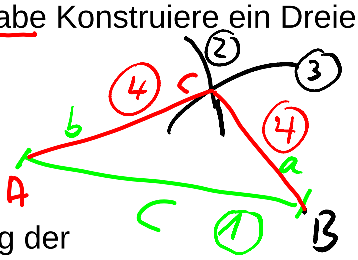
Grundgedanke: Die konstruierende Schulgeometrie soll hier aus der Eindeutigkeit der Konstruktion aufgebaut werden. Es werden "Grundaufgaben" genannt, deren Eindeutigkeit unmittelbar einleuchtet (axiomatisch gesetzt wird) oder sich durch schon durchgeführte Grundaufgaben und Sätze beweisen lässt. Dieses mündet sehr bald in der Formulierung der Kongruenzsätze, die dann zum wesentlichen Begründungs-Werkzeug werden.

Insbesondere werden die Eigenschaften der Spiegelungen als Sätze bewiesen und nicht axiomatisch vorausgesetzt. Unerwähnt bleiben hier Axiome wie: Es gibt zu einem Punkt P und einer Geraden g einen Kreis K, der g in genau zwei Punkten schneidet. Auch die Begriffe Kreis, Strahl, Strecke, ... werden hier nicht extra definiert.

Konvention: In Planfiguren u.ä. sind gegebene Stücke grün, gesuchte rot.
Nummern verdeutlichen die Reihenfolge der Konstruktionsschritte.



1. Grundaufgabe Konstruiere ein Dreieck aus drei gegebenen Seiten.



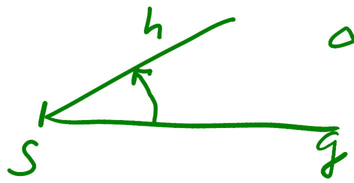
1 $c = \overline{AB}$
2 $\odot(A, b)$
3 $\odot(B, a)$
4 $C = ② \cap ③$ falls existiert

$\triangle ABC$ war gesucht

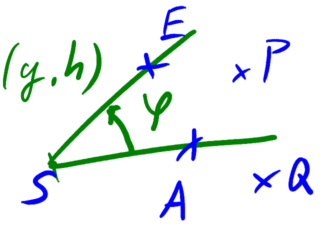
SSS

Bei Beachtung der Orientierung gibt es nur eine Lösung, wenn sich die Kreise überhaupt schneiden.
Für $a + b \leq c$ existiert das Dreieck nicht.

Definition: Zwei Strahlen g und h mit demselben Anfangpunkt S bilden den Winkel, $\measuredangle(g,h)$ indem sich der 1. Schenkel g ums S gegen die Uhr dreht bis zum 2. Schenkel h. Alle Punkte, die dabei überstrichen werden, und alle Punkte der Schenkel gehören zu dem Winkel



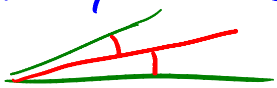
$\alpha = \measuredangle(g,h)$



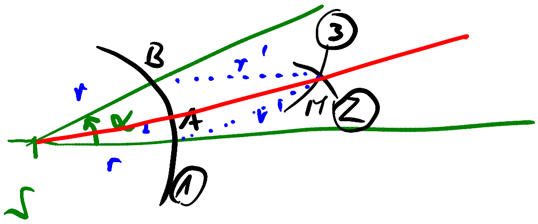
$\varphi = \measuredangle ASE$

1. Sch. — Scheitel — 2. Schenkel

$P \in \varphi$ $Q \notin \varphi$
$A \in \varphi$ $S \notin \varphi$

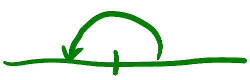


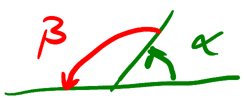
2. Grundaufgabe Konstruiere die Winkelhalbierende.



1 $\odot(S, r)$, r bel.
$\rightsquigarrow$ A, B
2 $\odot(A, r')$
3 $\odot(B, r')$ r' bel., hinreichend groß.
$\rightsquigarrow M = ② \cap ③$
$\overrightarrow{SM} = wh(\alpha)$

Beweis (wegen SSS) $\Delta SMB \cong \Delta SMA$ gegensinnig deckungsgleich
$\Rightarrow \measuredangle MSB \cong \measuredangle ASM$ ged.

Def:  gestreckter W.



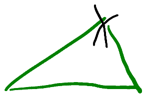
β ist Nebenwinkel von α

Ein rechter Winkel entsteht durch Halbieren des gestr. W.

Die Kongruenzsätze werden hier nicht auf die Kongruenzabbildungen zurückgeführt, sondern aus der Eindeutigkeit der Konstruktion begründet. Letztere wird axiomatisch als gegeben vorausgesetzt. Siehe Startseite.
Farbgebung: grün=gegeben, rot = gesucht   Achtung die pdf-Erzeugzeugung wandelt machmal die Farben.

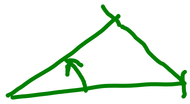
Definition Figuren heißen **kongruent (=deckungsgleich)**, wenn in allen geometrischen Größen übereinstimmen. Ebene kongruente Figuren müssen also direkt oder umgewendet aufeinander gelegt werden können. Dabei kann man speziell gleichsinnig und gegensinnig kongruent unterscheiden.

Kongruenzsätze

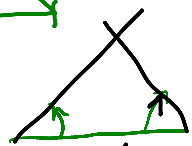


SSS Seite Seite Seite
Stimmen zwei Dreiecke in 3 Seiten überein, so sind sie kongruent.

SWS Seite Winkel Seite
Stimmen zwei Dreiecke in 2 Seiten und dem eingeschlossenen Winkel überein, so sind sie kongruent.

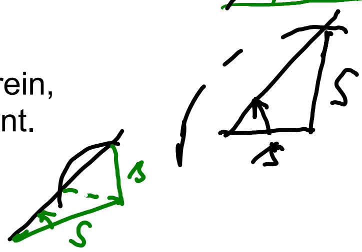


WSW Winkel Seite Winkel
Stimmen zwei Dreiecke in einer Seiten und den beiden anliegenden Winkeln überein, so sind sie kongruent.

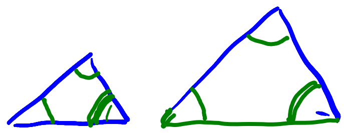


SsW Groß-Seite Klein-Seite Winkel
Stimmen zwei Dreiecke in zwei Seiten und dem Winkel überein, der der längeren Seite gegenüber liegt, so sind sie kongruent.

Ist es der andere Winkel, ergeben sich beim Konstruieren genau zwei Lösungen.

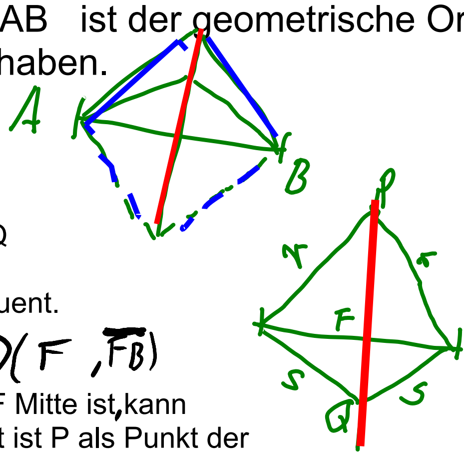


WWW Winkel Winkel Winkel
*Stimmen zwei Dreiecke in drei Winkeln überein, so heißen sie "**ähnlich**".*



---

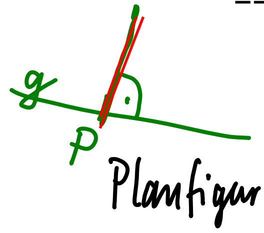
m⊥ Satz: Die Mittelsenkrechte einer Strecke AB ist der geometrische Ort aller Punkte, die von A und B dieselbe Entfernung haben.

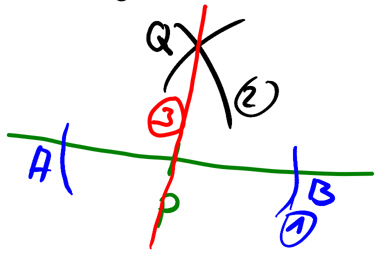


Beweis:
Sei P ein Punkt mit der Entfernung r von A und von B.
Sei Q ein Punkt mit der Entfernung s von A und von B.
Die Gerade PQ schneidet $\overline{AB}$ im Punkt F. (Ergänzung *)
Zu zeigen ist: 1.) F ist Mitte von $\overline{AB}$ und 2.) die Gerade PQ schneidet $\overline{AB}$ im rechten Winkel.
zu 1.) Wegen SSS sind die Dreiecke AQP und BQP kongruent.
Damit ist $\overline{FA} = \overline{FB}$, F ist also Mitte von $\overline{AB}$.
zu 2) Mit F als Scheitel ist BFA ein gestreckter Winkel. ⊙(F, $\overline{FB}$)
ist der 1. Schritt der Winkelhalbierenden-Konstruktion Da F Mitte ist, kann mit A und B der 2. Schritt mit dem Radius r erfolgen. Damit ist P als Punkt der Winkelhalbierenden des gesteckten Winkels nachgewiesen und ist PQ Mittelsenkrechte auf AB.
Da P und Q beliebig unter den Punkten mit gleicher Entfernung zu A und B ausgewählt waren, ist die Mittelsenkrechte die gesuchte Ortslinie.   q.e.d.

Ergänzung *
Dieser Beweis ist "konstruktiv", das heißt er führt gleichzeitig zu einem Auffinden der Mittelsenkrechten. Wenn man sagt, M sei Mitte der Strecke AB, dann muss M zu der gesuchten Ortslinie gehören. M übernimmt zuerst die Rolle von Q und dann die Rolle von F in dem Beweis. Dabei taucht nun das Problem der Existenz des Schnittpunktes nicht auf. Dafür ist der Beweis nicht mehr "konstruktiv".

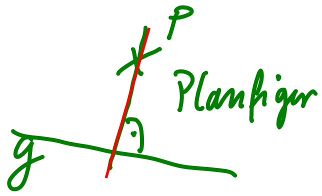
3. Grundaufgabe Errichte auf der Geraden g im Punkt P, $P \in g$, eine Senkrechte.
== Halbiere den gestreckten Winkel, der den Scheitel P hat. = 2. Grundafg.

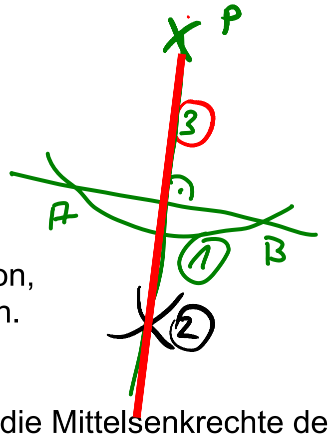




① $\odot(P, r)$
② $\odot(A, r') \cap \odot(B, r')$
$\rightsquigarrow Q$
③ $PQ = \perp(P, g)$

4. Grundaufgabe Fälle von dem Punkt P außerhalb von g das Lot auf g.

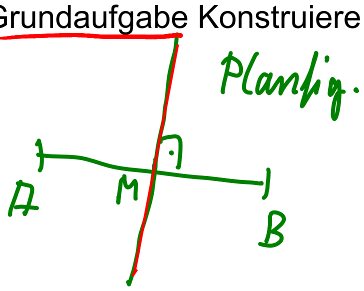


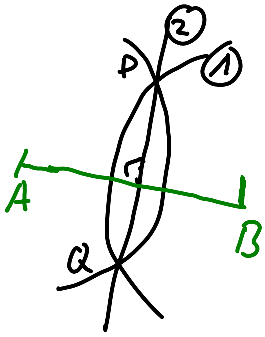


① $\odot(P, r) \rightsquigarrow A, B$
② $\odot(A, r') \cap \odot(B, r')$
$\rightsquigarrow Q$
③ $PQ = \perp(P, g)$

Diese beiden Konstruktionen sind eigentlich Wh-Konstruktion, sie sind damit schon bewiesen.

5. Grundaufgabe Konstruiere die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{AB}$ $m_\perp(\overline{AB})$





① $\odot(A, r) \cap \odot(B, r)$
$\rightsquigarrow P, Q$
② $PQ = m_\perp(\overline{AB})$

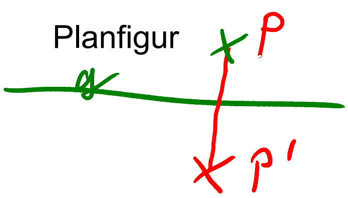
Siehe $m_\perp$-Satz

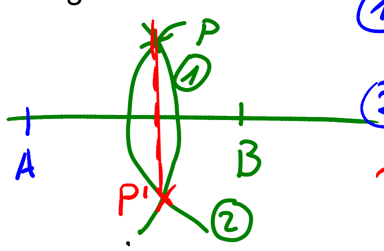
Definition: Eine **Spiegelung an der Geraden g** ist eine Abbildung der Ebene auf sich, bei der g Mittelsenkrechte der Strecke(PP') ist und genau die Punkte von g Fixpunkte sind.

$g = m_\perp(P,P') \wedge (F = F' \Leftrightarrow F \in g)$

6. Grundaufgabe: Spiegele P an g.

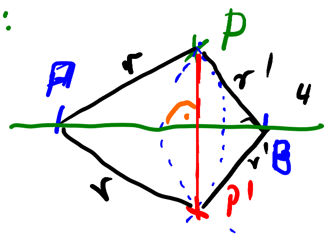
Planfigur





① $\odot(A, \overline{AP})$ $r = \overline{AP}$
② $\odot(B, \overline{BP})$ $r' = \overline{BP}$
$P' = ① \cap ②$

Beweis:

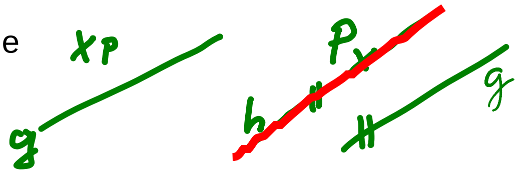


Wegen r = $\overline{AP} = \overline{AP'}$ ist A $\in m_\perp(P, P')$.
Wegen r' = $\overline{BP} = \overline{BP'}$ ist B $\in m_\perp(P, P')$.
A, B $\in$ g war gewählt, g=AB .

Also ist g Mittelsenkrechte von $\overline{PP'}$,
also ist P' Spiegelpunkt von P

Definition: Eine Gerade h heißt **Parallele** der Geraden g, wenn h und g entweder sämtliche oder gar keinen Punkt gemeinsam haben.

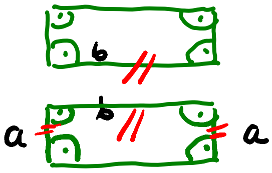
Parallelen-Axiom der Euklidischen Geometrie



Gegeben sei ein Punkt P und eine Gerade g.
Dann gibt es **durch P genau eine Parallele zu g**.
Speziell $P \in g \Rightarrow g=h$.

Definition: Parallel und getrennt liegend heißt auch **echt parallel.**

Definition: Ein Viereck mit vier rechten Winkeln heißt **Rechteck**.



Rechteck-Axiom Die Seiten eines Rechtecks sind paarweise parallel und gleich lang.

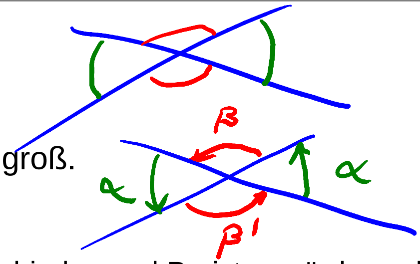
Es würde reichen: Axiom: Die Senkrechte auf dem Lot von P auf g ist Parallele zu g und Parallelen haben überall denselben Abstand.

Axiome sind Grundaussagen, die man an den Anfang einer Theorie stellt und aus denen man Sätze und Aussagen herleitet. Sie brauchen nicht unbedingt "wahr" zu sein in dem Sinne, dass gar nichts anderes gelten kann. Aber wenn ein Axiom tatsächlich nicht gilt, entsteht eine andere Theorie.
Gilt das Parallelen-Axiom, entsteht die **Euklidische Geometrie**.
Gilt es nicht, entstehen zwei Typen von **Nichteuklidischen Geometrien**:
Wenn es gar keine echte Parallele zu g gibt, ist es die **Elliptische Geometrie**, ein Modell dafür ist die Geometrie auf der Kugel (Sphärische Geometrie).
Wenn es mehr als eine Parallele zu g durch Punkt P gibt, ist es die **Hyperbolische Geometrie**.
Ein Axiom-System soll **widerspruchsfrei, vollständig und minimal** sein.
Widerspruchsfreiheit sichert man durch die Angabe eines Modells, also eines geometrischen Objektes, in dem alle Axiome gelten.
Minimalität heißt, dass man keines der Axiome durch die anderen beweisen kann. Man sichert Minimalität dadurch, dass man durch Weglassen je eines Axioms etwas nachweislich anderes erhält.
Vollständig ist ein Axiomsystem, wenn man alle Aussagen, die in dem Modell möglich sind, beweisen kann.

In diesem Aufbau der Geometrie geht es um die Euklidische Geometrie. Und es geht um eine Grundlage, auf der Lernenden vollständiges Argumentieren nahegebracht werden soll. Da man bei jungen Menschen schlechterdings nicht dauernd Offensichtliches in Frage stellen kann, ohne ihr Zutrauen ins eigene Denken zu beschädigen, sind hier die Konstruktionen, wie sie euklidisch nun mal sind (und die Mathematiker aus Axiomen hergeleitet haben), als Quasi-Axiome genommen. Damit konnte man ja auch schon allerlei schaffen, wie Seite 1 bis 3 zeigen.
Interessanterweise kann man aber daraus nicht das Parallelenaxiom herleiten, es ist sinnvoll und entspricht einer tiefen Wahrheit, gerade hier die Rolle eines Axioms hervorzuheben. Euklid selbst und viele Mathematiker nach ihm haben eine solche Herleitung vergeblich versucht, bis im 19. Jh. durch Gauß, Boljai, Lobatschewski und Riemann Modelle für Geometrien ohne Parallenenaxiom angegeben wurden.
Das obige "Rechteck-Axiom" kann bei Zugrundelegung des Hilbertschen Axiomssystems für die Euklidische Geometrie hergeleitet werden. Euklid hat es aber als Axiom bezeichnet.
In dem hier vorgestellten Aufbau ist es auch sinnvoll, es als Axiom zu nehmen, denn es lässt sich aus den Konstruktionen zusammen mit den Kongruenzsätzen nicht herleiten.

Damit kann nun die gesamte Euklidische Geometrie aufgebaut werden.

Definition: An einer Geradenkreuzung entstehen zwei Paare von **Scheitelwinkeln**.



Scheitelwinkel-Satz

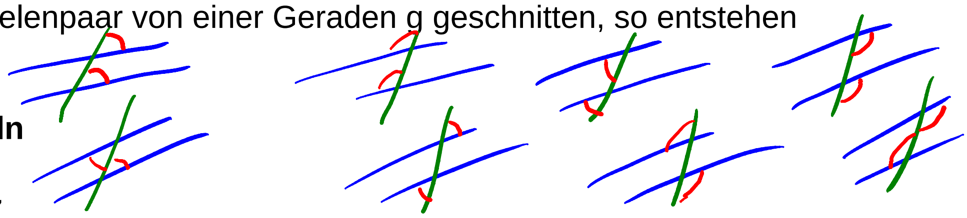
An einer Geradenkreuzung sind Scheitelwinkel gleich groß.

$\alpha = \alpha'$ $\beta = \beta'$

Anmerkung: Als Punktmengen sind α und α' verschieden und Puristen würden schreiben $w(\alpha) = w(\alpha')$, wobei w(...) Winkelgröße von ... bedeutet. Aber selbst diese Puristen schreiben später nicht $\sin(w(\alpha))$, wie es dann sein müsste. Kontextabhängig ist stets klar, ob ein Winkel als Punktmenge gemeint ist, oder ob von seiner Größe die Rede ist.

Beweis: Ein Winkel entsteht durch zwei Strahlen, verlängert man die Strahlen zu Geraden, so wird klar, dass bei der Entstehung von α durch Drehung des 1. Schenkel zum 2. Schenkel auch α' entsteht und dass α' dieselbe Größe hat wie α. Dasselbe gilt für das andere Scheitelwinkelpaar.

Definition: Wird ein Parallelenpaar von einer Geraden g geschnitten, so entstehen Paare von **Stufenwinkeln** und Paare von **Wechselwinkeln**



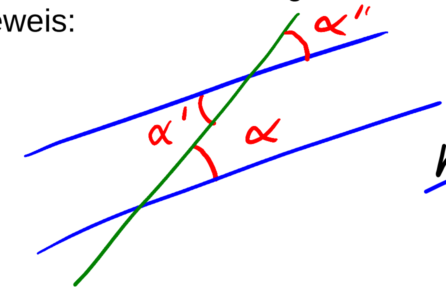
Wechselwinkel-Satz

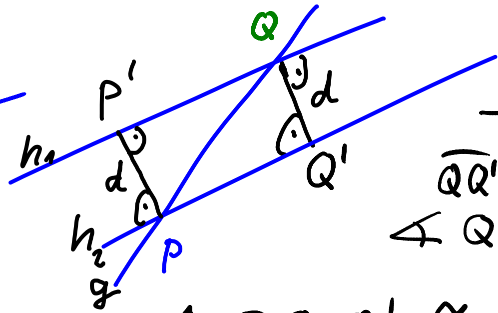
An von einer Geraden geschnittenen Parallelen sind **Wechselwinkel gleich groß**.

Stufenwinkel-Satz

An von einer Geraden geschnittenen Parallelen sind **Stufenwinkel gleich groß**.

Beweis:





$\perp(Q, h_1) \cap h_2 = Q'$

$\perp(P, h_2) \cap h_1 = P'$

$\overline{QQ'} = \overline{PP'} =: d$ (Axiom)

$\sphericalangle QQ'P = \sphericalangle PP'Q = ⦜$ (Axiom)

Rechts ist das abgeschwächte Rechteckaxiom genommen, mit dem starken Axiom folgt die Kongruenz aus SSS.

$\triangle PQQ' \cong \triangle PQP'$

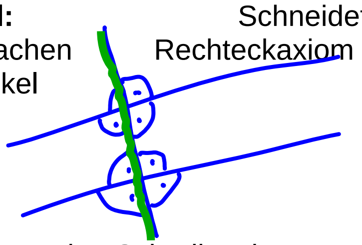
wegen SsW, lange Seite $\overline{PQ}$ gegenüber ⦜

Jedenfalls folgt aus der Kongruenz der Dreiecke die Gleichheit der Winkel : $\alpha = \alpha'$

α'' ist Scheitelwinkel von α', also $\alpha'' = \alpha'$ und auch $\alpha'' = \alpha$ (Transitivität der Gleichheit).

In den anderen Fällen kann man entweder genauso vorgehen oder man geht erst zu den Scheitelwinkeln über und beweist dann genauso.

Sonderfall: Schneidet die Gerade eine Parallele senkrecht, so schneidet sie nach dem schwachen Rechteckaxiom auch die andere Parallele senkrecht und alle Winkel sind rechte Winkel und damit auch gleich groß.



q.e.d
(quod erat demonstrandum)
(was zu beweisen war)

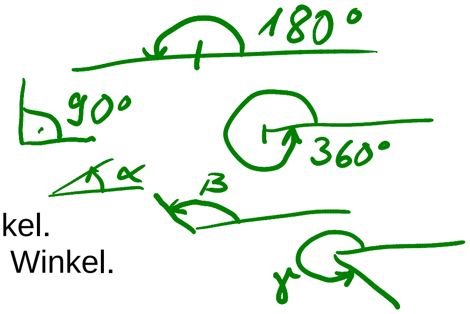
Anmerkung zu den Schreibweisen: **Puristen** würden schreiben $g \cap h = \{S\}$ statt $g \cap h = S$

und $L(\overline{PQ}) = L(\overline{PQ'}) =: L(d)$

oder $|\overline{PQ}|$... statt $\overline{PQ} = \overline{PQ'} =: d$

Das ist die sicherste Methode, die Geometrie zu verleiden und Lernen zu verhindern. Mathematiker **denken** sich das.

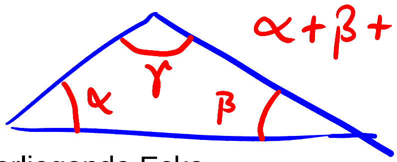
Definition des Winkelmaßes in Grad:



Der gestreckte Winkel habe eine Größe von 180°.
Dann hat der rechte Winkel 90°,
Der Vollwinkel hat 360°.
Winkel α mit $\alpha < 90°$ heißen spitze Winkel.
Winkel β mit $90° < \beta < 180°$ heißen stumpfe Winkel.
Winkel γ mit $180° < \gamma < 360°$ heißen überstumpfe Winkel.

Der Vollwinkel wird so gleichmäßig in Grad eingeteilt, dass Winkel mit gleichem Gradmaß deckungsgleich (=kongruent) sind.

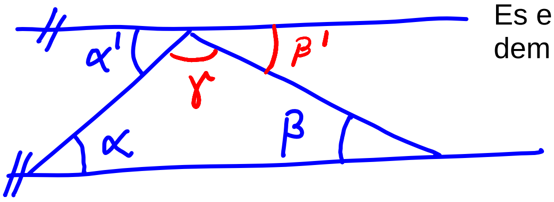
$\alpha + \beta + \gamma = 180°$



Winkelsummen-Satz für Dreiecke

Die Winkelsumme im Dreieck ist 180°.

Beweis: g sei Parallele zu einer Seite durch die gegenüberliegende Ecke.

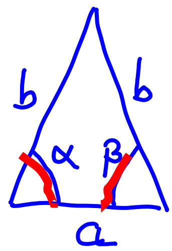


Es entstehen der Wechselwinkel α' zu α und nach dem Wechselwinkelsatz gilt $\left.\begin{matrix}\alpha' = \alpha \\ \beta' = \beta\end{matrix}\right\} *$
Ebenso gilt
α', γ, β' bilden einen gestreckten Winkel.
Damit folgt $180° = \alpha' + \gamma + \beta' \overset{}{\underset{*}{=}} \alpha + \beta + \gamma$ q.e.d.

*Dieses ist der schönste Satz der ersten Elementargeometrie und man sollte **seinen Beweis immer** besprechen.*
*Das sei ausdrücklich betont und gilt auch für Klasse 5 und auch für **jeden Schultyp**, egal wie wenig man sonst beweist.*

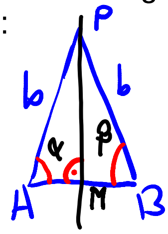
Definition: Ein Dreieck mit zwei gleichen Seiten heißt gleichschenklig, die dritte Seite heißt Basis, die an ihr anliegenden Winkel heißen Basiswinkel.

Basiswinkel-Satz

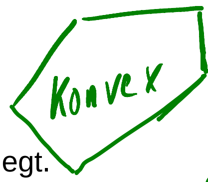


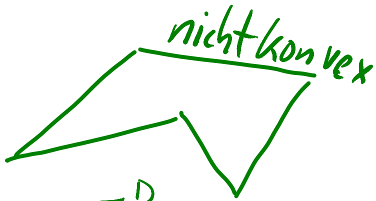
$\alpha = \beta$

Im gleichschenkligen Dreieck sind die Basiswinkel gleich groß.
Beweis:

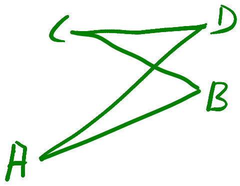


P ist gleich weit entfernt von A und B,
liegt also auf der $m_\perp(\overline{AB})$
Mit der Mitte M
entstehen zwei nach SSS kongruente Dreiecke,
also gilt $\alpha = \beta$.



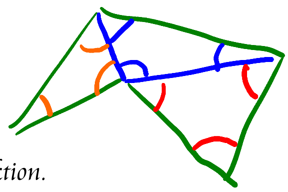


Definition: Ein Vieleck (=Polygon) heißt **konvex**,
wenn für je zwei Punkte P und Q aus dem Inneren
auch die gesamte Strecke PQ im Innern des Vielecks liegt.
Ein Vieleck heißt **überschlagen,** wenn sich seine Seite kreuzen.
Dabei werden die Kreuzungspunkte nicht zu den Ecken gezählt.
Die überschlagenen Vielecke entstehen ganz einfach beim Experimentieren mit DGS, darum muss man sie in die Überlegungen einbeziehen.



Winkelsummen-Satz für n-Ecke

Die Winkelsumme im (nicht überschlagenen) **n-Eck ist (n-2)*180°.**



Beweis: Die Beweisidee ist, das n-Eck in Dreiecke zu zerlegen und festzustellen, dass alle Innenwinkel der Dreiecke ohne Überschneidungen zu der Innenwinkelsumme des n-Ecks beitragen. Es gibt (n-2) Dreiecke zu je 180° Winkelsumme.
So geht es in der Schule und wenn man es verstehen will. Puristen beweisen hier mit vollständiger Induktion.
Mathematiker denken sich das durchgeführt. Aber weil hier grad noch Platz ist:
Verankerung: n=3 WS=(3-2)*180°=180° wahre Aussage. Induktionsannahme: für n-Ecke ist es richtig.
Induktionsschluss: Betrachte ein (n+1)-Eck, entferne eine Ecke mit ihren zwei Kanten, schneide also ein Dreieck ab. Es entsteht ein n-Eck, das WS=(n-2)*180° hat. Füge nun das eine Dreieck mit seinen 180° wieder an und –da dabei keine Übeschneidungen auftreten- hat das (n+1)-Eck WS=(n-2)*180°+180°=((n+1)-2)*180° q.e.d.

Es gibt i.W. drei Arten, die Gruppe der Kongruenzabbildungen aufzubauen:

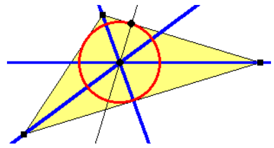
- Die Achsenspiegelung als grundlegend an den Anfang stellen. Dann die anderen durch Doppel- und Dreifach-Spiegelungen erzeugen.
    - Doppelspiegelung an parallelen Geraden definiert eine Verschiebung
    - Doppelspiegelung an Geraden mit Schnittpunkt definiert eine Drehung
    - Dreifachspiegelungen definieren eine Gleitspiegelung
    - Klassifizierung: mehr gibt es nicht.
- Die Kongruenzabbildungen als längentreue Abbildungen der Ebene auf sich mit gewissen Fix-Eigenschaften definieren und dann zeigen, wie solche Abbildungen konkret aussehen.
    - ...genau eine Fixpunktgerade definiert eine Achsenspiegelung
    - ...genau ein Fixpunkt definiert eine Drehung
    - ...genau eine Schar von parallelen Fixgeraden definiert eine Verschiebung
    - ...genau eine einzige Fixgerade und kein Fixpunkt definiert eine Gleitspiegelung
    - Andere längentreue Abbildungen der Ebene auf sich kann es nicht geben.
- Die Bewegungen in einem handlungsorientierten Ansatz konstruktiv erzeugen. Als Denkhilfe "Wanderlinien" der Punkte zu ihren Bildpunkten in den Blick nehmen. Die jeweilige Abbildung der Ebene auf sich intuitiv erfassen, die Definition herausarbeiten, eine oder mehrere Konstruktionen herleiten.
    - Die Achsenspiegelung. Spiegelachse als Mittelsenkrechte aller Wanderlinien.
    - Die Drehung. Wege auf Kreisen um den Drehpunkt mit demselben Drehwinkel.
    - Die Verschiebung. Wege alle entsprechend dem Verschiebungspfeil.
    - Die Gleitspiegelung. Hintereinanderausführung von Achsenspiegelung und Veschiebung.
    - Längentreue jeweils herleiten, damit als Kongruenzabbildung etablieren.
    - Doppel- und Dreifachspiegeln als Konstruktionsalternativen herleiten.
    - Fix-Eigenschaften untersuchen und herleiten.
    - Zeigen, dass es zu jeder beliebigen Gleitspiegelung eine Standard-Gleitspiegelung gibt, bei der die Gleitspiegelachse parallel zum Verschiebungsvektor ist. (*In der Schule verzichtbar.)*
    - Zeigen, dass so alle Bewegungen (= Kongruenzabbildungen) erfasst sind und dass sie bzgl. Hintereinanderausführung eine Gruppe bilden.

Didaktische Bemerkung: Für den Schulunterricht halte ich nur den unteren Weg für sinnvoll, zumal die zugehörigen Beweise und Impulse für die Fragestellungen von den Lernenden selbst kommen können. Der Weg entspricht dem hier vorgestellten Aufbau der Geometrie und es herrscht stets Klarheit, was als Argument benutzbar ist.
Der erste Weg hat seine besondere mathematische Schönheit und könnte **auch von diesem Aufbau aus** erfolgen, bei dem die Achsenspiegelung (auf Seite 3) schon definiert und konstruiert wurde. In diesem Falle hat er auch für die Lernenden (also die Studierenden) den Vorteil argumentativer Klarheit.
Verfolgt man den ersten Weg in einem Lehrzusammhang **aber** von den **Spiegelungsaxiomen** aus, so hat man man nur zwei Möglichkeiten:

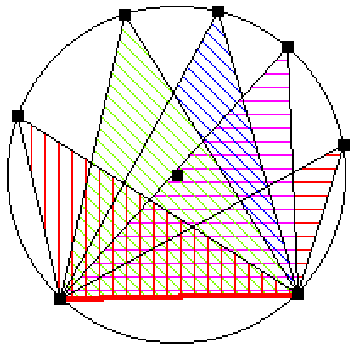
- Wirklich und vollständig axiomatisch vorgehen. Dieses Vorgehen erfordert eine nummerierte Liste von Axiomen und Sätzen und bei einer Fragestellung die Verortung der Frage an einer bestimmten Stelle der Liste. Sich hier sicher zu bewegen wäre die reife Frucht einer sehr guten mathematischen Ausbildung, nicht der Weg dorthin. Auch mir bekannte Bücher **für Studierende** halten diesen Weg nicht durch.
- Sehr bald die Kongruenzsätze aus dem gewählten hinreichend großen Axiomsystem herleiten und sie dann aber auch als Argumente zulassen, wie es mathematischer Usus ist. Es ist fraglich, ob das lohnt und wirklich verschieden vom Vorigen ist.
- Axiomatische Übungen muss man in der Lehre auf die ersten paar Axiome und das Parallelenaxiom beschränken. Axiomatik ist in Algebra, Stochastik... einfacher durchzuhalten.

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Universität Lüneburg, 21. Oktober 2006

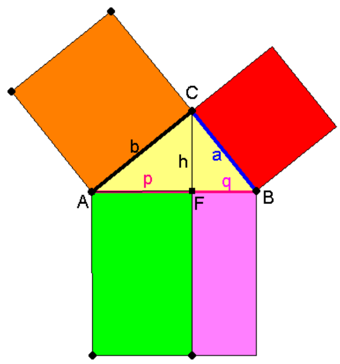
Spätestens nun fängt der Bereich des spanndenden interaktiven Erkundens von Geometrie an. Daher ist die Internetseite besser geeignet als dieses Blatt Papier.
Es soll nun nur noch als Stoffsammlung und Übersicht dienen.



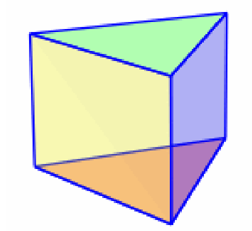
1. Besondere Linien und Punkte im Dreieck
   - 1.1. Die Mittelsenkrechten und M, der Umkreismittelpunkt
   - 1.2. Die Höhen und ihr Schnittpunkt H
   - 1.3. Die Winkelhalbierenden und ihr Schnittpunkt W, der Inkreismittelpunkt
   - 1.4. Die Seitenhalbierenden und ihr Schnittpunkt S, der Schwerpunkt
   - 1.5. Die Eulersche Gerade, auf der M,S und H liegen
   - 1.6. Der Feuerbachsche 9-Punktekreis
   - 1.7. Napoleondreieck, Fermatpunkt ...und so weiter.....



2. Kreis-Winkel-Sätze und Kreis-Sätze
   - 2.1. Thalessatz
   - 2.2. Umfangswinkelsatz
   - 2.3. Sehnen-Tangenten-Winkelsatz
   - 2.4. Sehnensatz, Sehnenviereck
   - 2.5. Sekanten-Tangenten-Satz
   - 2.6. Sekantensatz
   - 2.7. Herleitung der Satzgruppe des Pythagoras hieraus
3. Kongruenzabbildungen, Bewegungen
   - 3.1. Achsenspiegelung und ihre Eigenschaften
   - 3.2. Drehung, Veschiebung, Doppelspiegelungen
   - 3.3. Dreifachspiegelungen
   - 3.4. Klassifikationssatz, Abbildungsgruppe
4. Längenverhältnisse, weitere Abbildungen
   - 4.1. Projektionssatz,
   - 4.2. Strahlensätze,
   - 4.3. Streckungen und Ähnlichkeit
   - 4.4. Goldener Schnitt
   - 4.5. Flächen ebener Figuren
   - 4.6. Scherung



5. Satzgruppe des Pythagoras
   - 5.1. Kathetensatz
   - 5.2. Pythagorassatz
   - 5.3. Höhensatz
   - 5.4. Arithmetisches, geometrisches und harmonisches Mittel
6. Kreisberechnung und Pi
7. Trigonometrie
   - 7.1. Sinus, Kosinus, Tangens als Funktionen und Verhältnisse
   - 7.2. Sinussatz
   - 7.3. Kosinussatz



8. Körpergeometrie
   - 8.1. Räumliches Zeichnen, Projektionen
   - 8.2. Berechnung von Längen und Winkeln im Raum
   - 8.3. Cavalieri-Prinzip
   - 8.4. Volumen und Oberfläche von Körpern
     - 8.4.1. Prismen
     - 8.4.2. Pyramiden und ~stümpfe
     - 8.4.3. Zylinder, Kegel und Kegelstümpfe
     - 8.4.4. Kugel
9. Konstruierbarkeit und unlösbare geometrische Probleme der Antike