Weitere quasi-konstruierbare n-Ecke

Prof. Dr. Dieter Riebesehl, Universität Lüneburg, 24. Februar 2006

Unter einer Quasikonstruktion verstehen wir eine exakte Konstruktion mit dem erweiterten Werkzeug: Zirkel, Lineal und Parabellineal.

Weiteres dazu auf der Extraseite Quasikonstronstruktionen.

Das 13-Eck ist quasikonstruierbar:

Setze $w = 2\cos\frac{2\pi}{13}$, dann ist w Lösung der Gleichung

$$w^6+w^5-5w^4-4w^3+6w^2+3w-1=0$$

Setzt man $u = 2\cos 2\frac{2\pi}{13} + 2\cos 3\frac{2\pi}{13}$,
dann ist u Lösung von

$$u^3 + u^2 - 4u + 1 = 0\,,$$

und w ist Lösung von

$$w^2 - uw + u^2 + u - 3 = 0\,.$$

Das 19-Eck ist quasikonstruierbar:

Setze $w = 2\cos\frac{2\pi}{19}$, dann ist w Lösung der Gleichung

$$w^9 + w^8 - 8w^7 - 7w^6 + 21w^5 + 15w^4 - 20w^3 - 10w^2 + 5w + 1=0$$

Setzt man $u = 2\cos\frac{2\pi}{19} + 2\cos 7\frac{2\pi}{19} + 2\cos 8\frac{2\pi}{19}$,
dann ist u Lösung von

$$u^3 + u^2 - 6u - 7 = 0\,,$$

und w ist Lösung von

$$w^3 - uw^2 + (u^2 - 5)w + u^2 - 6 = 0\,.$$

Allgemein sind folgende n-Ecke quasi-konstruierbar:

Auf ähnliche Weise erweisen sich alle p-Ecke als quasikonstruierbar,
wenn p eine Primzahl ist, für die p-1 als Primfaktoren nur 2 und 3 hat. Für p<300 sind das:

p=7, 13, 19, 37, 73, 97, 109, 163 und 193. Dazu kommen natürlich noch die konstruierbaren p=3, 5, 17, 257.

Da man halbe und drittel Winkel (quasi-)konstruieren kann, sind alle n-Ecke (quasi-)konstruierbar, für die

$$\boxed{n = 2^a 3^b \prod_{p_i \in A} p_i}$$

ist, wobei A eine Teilmenge der eben aufgezählten Primzahlen ist.
Bis n= 300 sind damit (quasi-)konstruierbar die n-Ecke mit

$$n \in \left\{\begin{array}{l} 3,4,5,6,7,8,9,10,\ 12,13,14,15,16,17,18,19,20, \\ 21,\ 24,\ 26,\ 27,\ 28,\ 30,\ 32,\ 34,35,36,37,38,39,40, \\ 42,\ 45,\ 48,\ 51,\ 52,\ 54,\ 56,\ 57,\ 60,\ 63,\ 64,65,\ 68,\ 70, \\ 72,\ 73,\ 74,\ 76,\ 78,\ 80,\ 81,\ 84,\ 85,\ 90,\ 91,\ 95,96,\ 97, \\ 102,\ 104,\ 105,\ 108,\ 109,\ 111,\ 112,\ 114,\ 117,\ 119,\ 120,\ 126,\ 128,\ 130,\ 133, \\ 135,\ 136,\ 140,\ 144,\ 146,\ 148,\ 152,\ 153,\ 156,\ 160,\ 162,\ 163,\ 168,\ 170,\ 171, \\ 180,\ 182,\ 185,\ 189,\ 190,\ 192,193,194,195, \\ 204,\ 208,\ 210,\ 216,\ 218,\ 219,\ 221,\ 222,\ 224,\ 228, \\ 234,\ 238,\ 240,\ 243,\ 247,\ 252,\ 255,\ 256,\ 257,\ 259,\ 260, \\ 266,\ 270,\ 272,\ 273,\ 280,\ 285,\ 288,\ 291,\ 292,\ 296 \end{array}\right\}$$

Nicht (quasi-)konstruierbar sind die mit

$$n \in \left\{\begin{array}{l} 11,\ 22,\ 23,\ 25,\ 29,\ 31,\ 33,\ 41,\ 43,\ 44,\ 46,\ 47,\ 49,\ 50,\ 53,\ 55,\ 58,\ 59, \\ 61,\ 62,\ 66,\ 67,\ 69,\ 71,\ 75,\ 77,\ 79,\ 82,\ 83,\ 86,\ 87,\ 88,\ 89,\ 92,93,94,\ 98,99, \\ 100,101,\ 103,\ 106,\ 107,\ 110,\ 113,\ 115,\ 116,\ 118,\ 121,122,123,124,125,\ 127,\ 129, \\ 131,\ 132,\ 134,\ 137,138,139,\ 141,142,143,145,\ 147,\ 149,\ 150,\ 151,\ 154,\ 155,\ 157,158,159, \\ 161,\ 164,165,166,167,\ 169,\ 172,173,174,175,176,177,178,179, \\ 181,\ 183,184,\ 186,\ 187,188,\ 191,\ 196,197,198,199,200,201, \\ 202,203,\ 205,206,207,\ 209,\ 211,212,213,214,215,\ 217,\ 220,\ 223, \\ 225,226,227,\ 229,230,231,232,233,\ 235,236,237,\ 239,\ 241,\ 242,\ 244,245,246,\ 248,249, \\ 250,251,\ 253,\ 254,\ 258,\ 261,262,263,264,265,\ 267,268,269,\ 271,\ 274,275,276,277,278,279, \\ 281,282,283,284,\ 286,\ 287,289,290,\ 293,294,295,\ 297,298,299,300 \end{array}\right\}$$