Konstruierbare n-Ecke

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, MuPAD 4, http://haftendorn.uni-lueneburg.de Aug.06
Automatische Übersetzung aus MuPAD 3.11, Jan. 06 Update 31.01.06
Es fehlen nocht textliche Änderungen, die MuPAD 4 direkt berücksichtigen, das ist in Arbeit.
Web: http://haftendorn.uni-lueneburg.de www.mathematik-verstehen.de
+++

Eine Fermat-Primzahl ist eine Primzahl der Gestalt $p = 2^{2^m} + 1$

```
fermatZahlen:=2^(2^m) +1 $ m=0..4
```

3, 5, 17, 257, 65537

```
factor(2^(2^m) +1) $ m=0..4
```

3, 5, 17, 257, 65537

Diese ersten fünf Fermatschen Zahlen sind Primzahlen.
Die nächsten drei sind zerlegbar.

```
factor(2^(2^m) +1) $ m=5..7
```

$641 \cdot 6700417,\ 274177 \cdot 67280421310721,\ 59649589127497217 \cdot 5704689200685129054721$

Bis heute hat man keine weiteren Fermatschen Primzahlen gefunden.

Satz von Gauß: Das n-Eck mit n>2 ist genau dann konstruierbar,

wenn n eine Zweierpotenz ist oder sich schreiben lässt als

$n = p_1 p_2 \cdot \ldots \cdot p_r \cdot 2^k$

mit verschiedenen Fermat-Primzahlen pi

Gute Erklärungen und Ergänzungen in:
W. Henn: Elementare Algebra und Geometrie Vieweg 2003
ISBN 3-258-03201-4

Alle konstruierbaren n-Ecke mit n < 300

```
z:=(2^k $ k=2..8)
```

4, 8, 16, 32, 64, 128, 256

```
d:=(3*2^k $ k=0..6)
```

3, 6, 12, 24, 48, 96, 192

```
f:=(5*2^k $ k=0..5)
```

5, 10, 20, 40, 80, 160

```
s:=(17*2^k $ k=0..4)
```

17, 34, 68, 136, 272


```
h:=257;
```

257

257

```
df:=(3*5*2^k $ k=0..4)
```

15, 30, 60, 120, 240

```
ds:=(3*17*2^k $ k=0..2)
```

51, 102, 204

```
fs:=(5*17*2^k $ k=0..1)
```

85, 170

```
dfs:=(3*5*17*2^k $ k=0..0)
```

255

```
alle:=(z,d,f,s,h,df,ds,df):
alle:={alle}:
alle[1..10];alle[11..20];alle[21..30];alle[31..34];
```

$\{3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17\}$

$\{20, 24, 30, 32, 34, 40, 48, 51, 60, 64\}$

$\{68, 80, 96, 102, 120, 128, 136, 160, 192, 204\}$

$\{240, 256, 257, 272\}$

Dies sind die 34 für alle mit Zirkel und Lineal konstruierbaren n-Ecke, n<300

```
matrix([sort([op(alle[1..17])]),sort([op(alle[18..34])])]);
```

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 & 8 & 10 & 12 & 15 & 16 & 17 & 20 & 24 & 30 & 32 & 34 & 40 & 48 \\ 51 & 60 & 64 & 68 & 80 & 96 & 102 & 120 & 128 & 136 & 160 & 192 & 204 & 240 & 256 & 257 & 272 \end{pmatrix}$$

Die nicht mit Zirkel und Lineal konstrierbaren n-Ecke mit n<300
stehen hier unten:
(gruppiert in nach Zehnern)

```
(nk[k]:={}:
for i from 10*(k-1) to 10*k-1 do
 if  not contains(alle,i) then nk[k]:=(nk[k] union {i})
 end_if
end_for )  $ k=1..30:
nk
```


1	$\{0, 1, 2, 7, 9\}$
2	$\{11, 13, 14, 18, 19\}$
3	$\{21, 22, 23, 25, 26, 27, 28, 29\}$

1	{0, 1, 2, 7, 9}
2	{11, 13, 14, 18, 19}
3	{21, 22, 23, 25, 26, 27, 28, 29}
4	{31, 33, 35, 36, 37, 38, 39}
5	{41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 49}
6	{50, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59}
7	{61, 62, 63, 65, 66, 67, 69}
8	{70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79}
9	{81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89}
10	{90, 91, 92, 93, 94, 95, 97, 98, 99}
11	{100, 101, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109}
12	{110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119}
13	{121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 129}
14	{130, 131, 132, 133, 134, 135, 137, 138, 139}
15	{140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149}
16	{150, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159}
17	{161, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 169}
18	{170, 171, 172, 173, 174, 175, 176, 177, 178, 179}
19	{180, 181, 182, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189}
20	{190, 191, 193, 194, 195, 196, 197, 198, 199}
21	{200, 201, 202, 203, 205, 206, 207, 208, 209}
22	{210, 211, 212, 213, 214, 215, 216, 217, 218, 219}
23	{220, 221, 222, 223, 224, 225, 226, 227, 228, 229}
24	{230, 231, 232, 233, 234, 235, 236, 237, 238, 239}
25	{241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, 248, 249}
26	{250, 251, 252, 253, 254, 255, 258, 259}
27	{260, 261, 262, 263, 264, 265, 266, 267, 268, 269}
28	{270, 271, 273, 274, 275, 276, 277, 278, 279}
29	{280, 281, 282, 283, 284, 285, 286, 287, 288, 289}
30	{290, 291, 292, 293, 294, 295, 296, 297, 298, 299}

##

quasi-konstruierbare n-Ecke

Dieter Riebesehl fand im Jan 06:
Das 7-Eck ist quasi-konstruierbar, d.h. mit Zirkel, Lineal und Parabellineal.
Der allgemeine Winkel ist drittelbar als Quasi-Konstruktion.
Damit ergibt sich eine Liste von quasi-konstruierbaren n-Ecken: n<300

```
sq:=(7*2^k $ k=0..5)
```

7, 14, 28, 56, 112, 224

```
alle7q:=(alle union map(alle,_mult,7))union {sq} //Menge, keine
```

```
alle7q:=(alle union map(alle,_mult,7))union {sq} //Menge,
```

{3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 14, 15, 16, 17, 20, 21, 24, 28, 30, 32, 34, 35, 40, 42, 48, 51, 56,

```
gr300:=[i $ i=300..2000]:
alle7qs:=sort(listlib::setDifference([op(alle7q)], gr300))
```

[3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 14, 15, 16, 17, 20, 21, 24, 28, 30, 32, 34, 35, 40, 42, 48, 51, 56,

Jetzt ist dieses noch mit allen Dreierpotenzen zu multiplizieren.

```
alle7qs:
(li[k]:=map(alle7qs,_mult,3^(k-1))) $ k=1..5:
alle73q:=(li[1].li[2].li[3].li[4].li[5]):
gr23000:=[i $ i=300..23000]:
alle73qk:=sort(listlib::setDifference(alle73q, gr23000));
nops(alle73qk);
```

[3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 17, 18, 20, 21, 24, 27, 28, 30, 32, 34, 35, 36, 40, 4

75

```
matrix([sort([op(alle73qk[1..15])]),sort([op(alle73qk[16
..30])])
,sort([op(alle73qk[31..45])]),sort([op(alle73qk[46..60])
])
,sort([op(alle73qk[61..75])])]);
```

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 12 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 20 \\ 21 & 24 & 27 & 28 & 30 & 32 & 34 & 35 & 36 & 40 & 42 & 45 & 48 & 51 & 54 \\ 56 & 60 & 63 & 64 & 68 & 70 & 72 & 80 & 81 & 84 & 90 & 96 & 102 & 105 & 108 \\ 112 & 119 & 120 & 126 & 128 & 135 & 136 & 140 & 144 & 153 & 160 & 162 & 168 & 180 & 189 \\ 192 & 204 & 210 & 216 & 224 & 238 & 240 & 243 & 252 & 256 & 257 & 270 & 272 & 280 & 288 \end{pmatrix}$$

Hier stehen streng- oder wenigstens quasi-konstruierbare n-Ecke. n<300
Es sind 75 n-Ecke.
Es könnte aber noch weitere quasi-konstruierbare n-Ecke geben

+++++++++

Die noch nicht erfassten n-Ecke sind die unten folgenen.
Darunter könnten noch weitere quasi-konstruierbare n-Ecke sein.
Eingearbeitet sind nur die von 3 und 7 "abstammenden Konstuktionen".

```
(nkq[k]:={}:
for i from 10*(k-1) to 10*k-1 do
 if  not contains({op(alle73qk)},i) then nkq[k]:=(nkq[k] union {
 end_if
end_for )  $ k=1..30:
nkq
```


1	{0, 1, 2}
2	{11, 13, 19}
3	{22, 23, 25, 26, 29}

1	{0, 1, 2}
2	{11, 13, 19}
3	{22, 23, 25, 26, 29}
4	{31, 33, 37, 38, 39}
5	{41, 43, 44, 46, 47, 49}
6	{50, 52, 53, 55, 57, 58, 59}
7	{61, 62, 65, 66, 67, 69}
8	{71, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79}
9	{82, 83, 85, 86, 87, 88, 89}
10	{91, 92, 93, 94, 95, 97, 98, 99}
11	{100, 101, 103, 104, 106, 107, 109}
12	{110, 111, 113, 114, 115, 116, 117, 118}
13	{121, 122, 123, 124, 125, 127, 129}
14	{130, 131, 132, 133, 134, 137, 138, 139}
15	{141, 142, 143, 145, 146, 147, 148, 149}
16	{150, 151, 152, 154, 155, 156, 157, 158, 159}
17	{161, 163, 164, 165, 166, 167, 169}
18	{170, 171, 172, 173, 174, 175, 176, 177, 178, 179}
19	{181, 182, 183, 184, 185, 186, 187, 188}
20	{190, 191, 193, 194, 195, 196, 197, 198, 199}
21	{200, 201, 202, 203, 205, 206, 207, 208, 209}
22	{211, 212, 213, 214, 215, 217, 218, 219}
23	{220, 221, 222, 223, 225, 226, 227, 228, 229}
24	{230, 231, 232, 233, 234, 235, 236, 237, 239}
25	{241, 242, 244, 245, 246, 247, 248, 249}
26	{250, 251, 253, 254, 255, 258, 259}
27	{260, 261, 262, 263, 264, 265, 266, 267, 268, 269}
28	{271, 273, 274, 275, 276, 277, 278, 279}
29	{281, 282, 283, 284, 285, 286, 287, 289}
30	{290, 291, 292, 293, 294, 295, 296, 297, 298, 299}