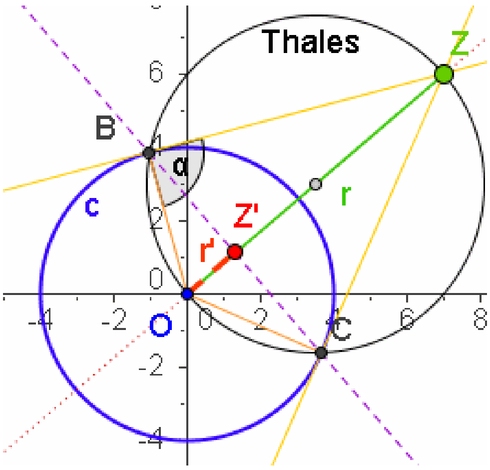
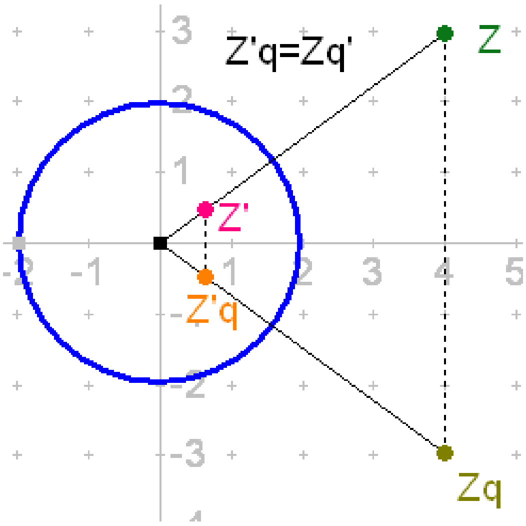
# Inversion am Kreis Grundlagen, Zusammenhang mit dem Komplexen

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, www.uni-lueneburg.de/mathe-lehramt 5.05.05




Der Inversionskreis c um O habe den Radius k.
Ist Z ein Punkt außerhalb des Kreises, so definieren die Tangenten von Z an den Kreis durch ihre Berührpunkte die "Polare von Z bezüglich Kreis c". Die Polare schneidet die Gerade OZ in Z ', dem Bildpunkt von Z bei der Inversion am Kreis.
Ist umgekeht ein Punkt Z ' im Innern des Kreises (nicht O selbst) gegeben, so wird mit der Senkrechten in Z ' auf OZ' die Polare definiert, zu der zwei Tangenten gehören, die sich in Z schneiden. Z und Z' sind also Bilder voneinander bei der Inversion am Kreis. Man nennt die Abbildung auch "Spiegelung am Kreis".

Es gilt $r \cdot r' = k^2$, ist c der Einheitskreis, gilt $r \cdot r' = 1$.
*r* und *r'* sind also invers zueinander im Sinne der Algebra.
Der Beweis ist eine Anwendung das Kathetensatzes auf das Dreieck OZB mit der Kathete OB=k.




Fasst man die Zeichenebene als die Gaußsche Zahlenebene der komplexen Zahlen auf, so kann man zunächst einmal betrachten:

$z = a + ib \;\; und \;\; \bar{z} = a - i\mathrm{b}$ heißen konjugiert-komplexe Zahlen. Sie gehen durch Spiegeln an der x-Achse auseinander hervor.
Wegen der Eulerschen Formel

$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$ lässt sich eine komlexe Zahl auch in der Form

$$z = r \cdot e^{i\varphi} = r \cdot \cos(\varphi) + i \cdot r \cdot \sin(\varphi)$$

schreiben. Hierbei sind $r \;\; und \;\; \varphi$ die Polarkoordinaten von z. Dann ist $\bar{z} = r \cdot e^{-i\varphi}$.

In dieser Darstellung sieht man sofort, wie die Inversen von $z \;\; und \;\; \bar{z}$ aussehen:

$\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r} \cdot e^{-i\varphi}$ und $\dfrac{1}{\bar{z}} = \dfrac{1}{r} \cdot e^{i\varphi}$.

Betrachtet man nun die Inversion am Einheitskreis, so gilt

$r \cdot r' = 1$ und $\varphi' = \varphi$. Damit gilt $z' = \overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\bar{z}}$, in Worten: Das Inverse Bild von z ist das Konjugiert-Komplexe des Kehrwertes von z ,aber auch der Kehrwert des Konjugiert-Komplexen.
Sagt man jetzt noch für "Kehrwert" : das "Inverse" , dann weiß man, warum diese Abbildung "Inversion" heißt. Streckt man den Einheitskreis auf k-fache Größe, so gilt

$r_{neu} \cdot r'_{neu} = kr \cdot kr' = k^2 \cdot 1 = k^2$, und das wussten wir schon.