LS Lambacher-Schweizer Geometrie 2 Tübingen 1948, S 96f

AUFGABEN:

1. Zerlege das größere Kathetenquadrat durch die Parallele und Senkrechte zur Hypotenuse durch den Mittelpunkt M in 4 unter sich gleiche Vierecke (Abb. 257); lege diese in anderer Anordnung in das Hypotenusenquadrat und beweise, daß dann die restliche Fläche gleich dem kleineren Kathetenquadrat ist. (Anleitung: $\overline{FG} = \overline{BE} = \overline{AD}$ und $\overline{FH} = \overline{CD}$.)
Verdeutliche den Beweis durch Ausschneiden der Vierecke.

***2.** Ändere den Beweis der Aufgabe 1 dadurch ab, daß die Parallele und Senkrechte zur Hypotenuse nicht durch den Mittelpunkt M, sondern durch die Punkte C und B gezogen werden.

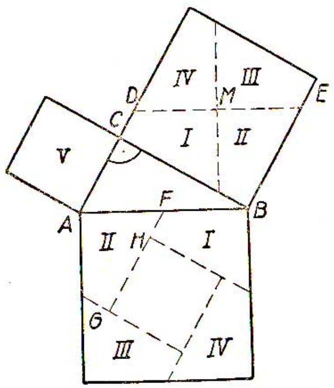

Abb. 257

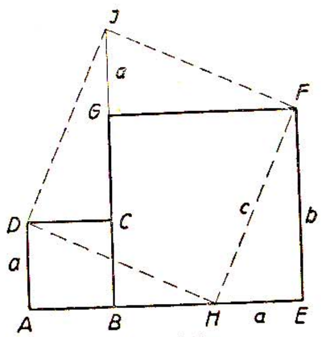

Abb. 258

3. Zeichne die beiden Quadrate $ABCD$ und $BEFG$ wie in Abb. 258; die Seiten sind $\overline{AB} = a$ und $\overline{BE} = b$. Trage dann $\overline{EH} = a$ auf $\overline{EA}$ ab, verlängere $\overline{BG}$ um a bis J und ziehe $\overline{DH}$, $\overline{HF}$, $\overline{FJ}$ und $\overline{DJ}$.

a) Warum sind die 4 Dreiecke AHD, EFH, GFJ und CJD deckungsgleich?
b) Warum ist Viereck $DHFJ$ ein Quadrat?
c) Beweise den Satz des Pythagoras durch Ergänzung des Fünfecks $DHFGC$ zuerst durch die Dreiecke AHD und EFH und dann durch die Dreiecke CJD und GFJ.

Verdeutliche den Beweis durch Ausschneiden des Fünfecks und zweier Dreiecke.

4. Gegeben ist ein Quadrat von der Fläche F; zeichne ein Quadrat von der Fläche
a) $2\,F$, b) $3\,F$, c) $4\,F$, d) $\frac{1}{2}\,F$.

5. Zeichne ein Quadrat von der Fläche
a) $F = 20\ \text{cm}^2$ $(20 = 4^2 + 2^2$ und $20 = 6^2 - 4^2)$ b) $F = 45\ \text{cm}^2$
c) $F = 27\ \text{cm}^2$ d) $F = 32\ \text{cm}^2$ e) $F = 41\ \text{cm}^2$
f) $F = 24\ \text{cm}^2$ g) $F = 48\ \text{cm}^2$ h) $F = 56\ \text{cm}^2$

***6.** Zeichne ein Quadrat von der Fläche
a) $F = 43\ \text{cm}^2$ $(43 = 64 + 4 - 25)$ b) $F = 66\ \text{cm}^2$ $(81 + 49 - 64)$
c) $F = 42\ \text{cm}^2$ $(25 + 16 + 1)$ d) $F = 26\ \text{cm}^2$

7. Welche der folgenden Dreiecke sind rechtwinklig, welche nicht? (Zuerst rechnen, dann zeichnen)
a) $a = 4\ \text{cm}$, $b = 3\ \text{cm}$, $c = 5\ \text{cm}$ b) $a = 4\ \text{cm}$, $b = 7{,}5\ \text{cm}$, $c = 8{,}5\ \text{cm}$
*c) $a = 12\ \text{cm}$, $b = 4{,}5\ \text{cm}$, $c = 12{,}5\ \text{cm}$ *d) $a = 11{,}2\ \text{cm}$, $b = 6{,}6\ \text{cm}$, $c = 13\ \text{cm}$

8. Ziehe in einem rechtwinkligen Dreieck ABC die Höhe $\overline{CD}$ und zeichne über den Strecken $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{AD}$ und $\overline{BD}$ je nach außen Quadrate. Zeige, daß der Unterschied der Kathetenquadrate ebenso groß ist wie der Unterschied der Quadrate über $\overline{AD}$ und $\overline{BD}$.

9. Zeichne ein Quadrat, dessen Fläche gleich der Summe der 4 Quadrate über den Seiten eines Rechtecks ist.

10. Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit den Katheten a und b. Zeichne ein zweites rechtwinkliges Dreieck $A'B'C'$, dessen Katheten $a + b$ und $a - b$ sind und beweise, daß das Quadrat über der Hypotenuse $\overline{A'B'}$ doppelt so groß ist wie das Quadrat über der Hypothenuse $\overline{AB}$.

11. Beschreibe um den Scheitel O eines rechten Winkels einen beliebigen Kreis, der die Schenkel in A und B trifft und halbiere $\sphericalangle AOB$. Fälle von einem beliebigen Punkt C des Kreisbogens auf OA das Lot $\overline{CD}$, das die Winkelhalbierende in E schneidet. Beweise, daß $\overline{CD}^2 + \overline{DE}^2 = \overline{OA}^2$ ist.

§ 41. Katheten- und Höhensatz.

Vorübung:

Zeichne über den 3 Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks ABC ($a = 4$ cm, $b = 3$ cm, $c = ?$) die Quadrate, fälle die Höhe $\overline{CD}$ und teile durch ihre Verlängerung das Hypotenusenquadrat in 2 Rechtecke. Bestimme durch Messung der Strecken $\overline{AD}$ und $\overline{BD}$ die Flächen der beiden Rechtecke und vergleiche diese mit den Kathetenquadraten.

Erklärung:

Die Höhe $\overline{CD}$ eines rechtwinkligen Dreiecks ABC teilt die Hypotenuse in die beiden **Hypotenusenabschnitte** $\overline{BD} = p$ und $\overline{AD} = q$. $\overline{AD}$ und $\overline{BD}$ heißen auch die **Projektionen**[1]) der Katheten auf die Hypotenuse (Abb. 259).

Kathetensatz: Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über einer Kathete gleich dem Rechteck aus der Hypotenuse und dem anliegenden Hypotenusenabschnitt (Abb. 259).

$$a^2 = c \cdot p; \qquad b^2 = c \cdot q.$$

Beweis (Abb. 259): Zieht man durch E die Parallele EI zu AB und durch G die Parallele GK zu BC, so ist

[1]) projicere (lat.) = vorwärts werfen.