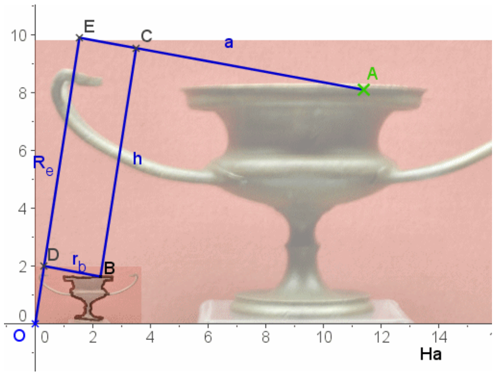
Pantograph-Storchschnabel und die Strahlensätze



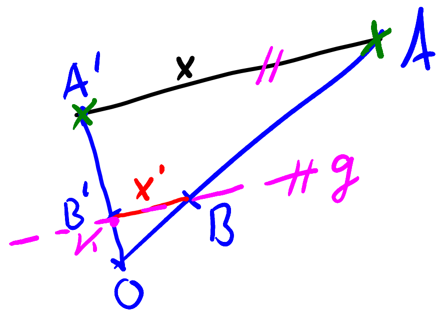
Der Storchschnabel, auch Pantograph genannt, ist ein Zeichengerät zum maßstäblichen Vergrößern und Vekleinern. Daher kann er nur noch als historisches Gerät aufgefasst werden, denn entsprechende Probleme werden heute mit Kopieren, digital Fotorafieren und im Malprogramm Verkleinern erledigt. Allenfalls ist noch das Vergrößern auf Plakate, die man nicht mehr drucken kann, interessant.

Man benötigt ein Gestänge mit zwei gleichlangen Armen OE = R_e = EA = a = R. Zwei weitere Stangen sind so angebracht, dass DBCE ein Parallelogramm ist. Dabei gilt OD=DB=EC=r und h=BC=DE=R-r.
Alle Buchstabenpaare sind Stecken bzw. Streckenlängen.

Behauptung: **Fährt man mit A das Urbild ab so zeichnet B das im Verhältnis R:r verkleinerte Bild.**

Beweis: ODB ist ein gleichschenkliges Dreieck mit Basis OB, es ist ähnlich zum gleichschenkligen Dreieck OEB, da wegen der Parallelität von DB und EA bei D und E gleiche Winkel sind. Daher sind auch die Winkel DBO und EAO gleich groß, also liegen O,B und A auf einer Geraden. Wegen des ersten (oder des zweiten) Strahlensatzes gilt für jede Stellung des Pantographen OA:OB=R:r. *

Fährt nun der Punkt A eine Strecke AA' des Urbildes ab, so gelangt B nach B' im Bild. In der rechten Skizze ist der Pantograph weggelassen.



Zu zeigen ist: x ist parallel x' und $x : x' = R : r$

Nun also: * $\frac{OA}{OB} = \frac{R}{r} = \frac{OA'}{OB'}$

Aus der Umkehrung des 1. Strahlensatzes (siehe unten) folgt hiermit die Behauptung. q.e.d.

Umkehrung des 1. Strahlensatzes:

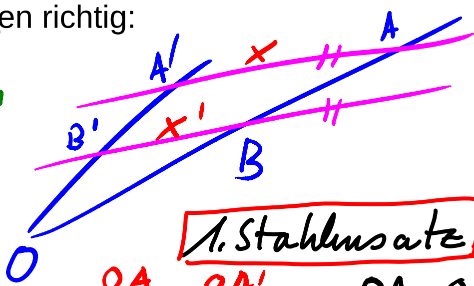
Werden auf zwei von O ausgehenden Stahlen A, A', B und B' in der gezeichneten Weise so ein getragen, dass OA:OB=k=OA':OB' ist, so sind x=AA' und x'=BB' parallel.

Beweis: Sei g definiert als die Parallele zu x=AA' durch B. Sie schneide OA' in K. Wegen des 1. Stahlensatzes gilt $OK = \frac{OA'}{k} = OB$ Da K und B' auf demselben Strahl OA' liegen, fallen sie zusammen. Also liegt B' auf g, x'= BB' ist also parallel x=AA'. q.e.d.

2. Strahlensatz:

Werden zwei vom Zentrum O ausgehende Strahlen von einem Parallelenpaar geschnitten, so verhält sich der lange Parallelenabschnitt zum kurzen, wie die entsprechenden Entfernungen der Parallelen zum Zentrum, gemessen auf einem der Strahlen. Mit obigen Bezeichnungen sind alle folgenden Gleichungen richtig:

$$\frac{A'A}{B'B} = \frac{OA}{OB} \qquad \frac{x}{x'} = \frac{OA}{OB} \qquad \frac{x}{x'} = \frac{OA'}{OB'}$$



Beweis: Wegen der Winkelsätze an geschnittenen Parallelen sind die Dreiecke OAA' und OBB' ähnlich. Daher stehen entsprechende Seiten in demselben Verhältnis $\frac{x}{OA} = \frac{x'}{OB} \wedge \frac{x}{OA'} = \frac{x'}{OB'}$ qed.

$\boxed{\text{1. Stahlensatz}}$

$\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB}$ Bew $\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'}$ qed.

Anmerkung: Der 2. Strahlensatz ist nicht umkehrbar.