2012

Logistische Parabel (z.B.) und Spinnwebgraphen

jetzt doch

Logistische Parabel Haftendorn April 2011

$f(x):=r\cdot x\cdot(1-x)$ ▸ *Fertig* Im Graph–Fenster werden der Parameter **r** ▸ 3.22 und der Startwert **au1** ▸ 0.1 mit Schiebereglern gesteuert.

Es ist nun konkret $f(x)$ ▸ $-3.22\cdot x\cdot(x-1)$.

Man variiert nun vor allem r und beobachtet die Entwicklung der Spinnwebfolge.

Da man r und au1 nur im Graphfenster varieren kann, ist es sinnvoll, am PC den Seitensortierer größer zu ziehen, damit man auch die Wirkung in den beiden Streuplots beobachten kann.

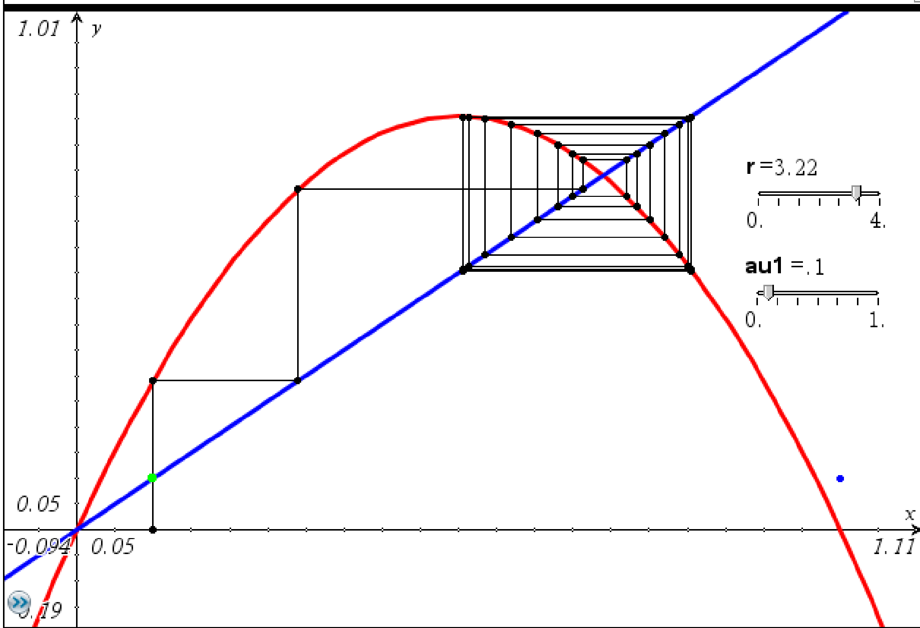
Der eine Streuplot ist der übliche Zeitgraph der Folge. Der andere verbindet die Datenpunkte direkt und ermöglicht auch eine Sicht auf das Folgenverhalten.

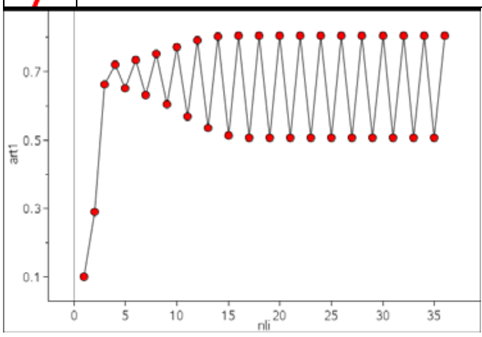
Die mathematische Aussagekraft ist aber beim Webgraphen deutlich größer.

Die Tabellenseite ist wie in Excel gemacht. Sie ist für die Streuplots nötig, aber nicht für die Spinnwebdarstellung.

Für Experimente mit eigenen Kurven ist die allgemeinere Datei günstiger.

Man kopier besser nicht das Problem in dieser Datei, da die Datenhaltung der Treppchen für den Rechner aufwendig ist.





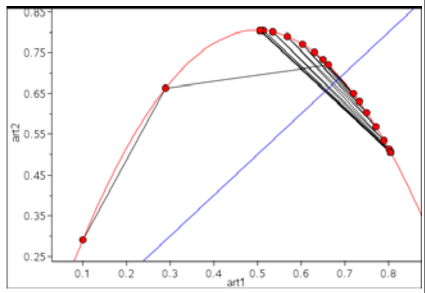
	A nli	B art1	C art2
◆			
1	1	0.1	0.2898
2	2	0.2898	0.662727
3	3	0.662727	0.719734
4	4	0.719734	0.649529
5	5	0.649529	0.733004

Für die Zeitdarstellung links braucht man die Liste art1, sie ist die Folge u1. In B1 wird =au1 eingetragen. in B2 kommt =f(B1) dieser Zellinhalt wird nach unten kopiert. (re-unt-Ecke das Plus erscheint, anfassen, nach untern ziehen).
In C1 steht =b2, und das wird auch nach untern kopiert.
Beim rechten Data-Plot ist art2 über art1 aufgetragen und „Punkte verbinden" gewählt.

Datei
logistische-Parabel.tns

Der TI Nspire hat keine eigene Möglichkeit Spinnwebgraphen zu zeichnen. Das konnten TI92 bzw. TI voyage seit 1995!
Darum kann diese –oder die etwas allgemeinere Version- als **Musterdatei** dienen.
Auf der Notes-Seite trägt man das eigene f ein.
Beim **Hantieren** ist zu beachten: Als f1(x) ist die Trägerfunktion eingetragen, f2(x)=x, die Winkelhal-bierende.
Wenn man bei f3 rechte Maustaste-> Graphiktyp -> Folge->Folge wählt, sieht man, wie u1 eingegeben ist, mit der Südtaste sieht man u2 als verschobene u1.
Wieder re Maus-> Graphiktyp -> Folge->Eigene erlaubt eine x-Liste und eine y-Liste, hier u1 und u2, eine Parameter-darstellung für Folgen.
Dann das nochmal und u1 und u1 (Punkte auf der Wh!!!!)
Die Treppchen-Strecken sind dann mühsam von Hand eingefügt.
Wenn man so eine Datei nun als Muster nimmt, muss man diese Arbeit nicht selber machen.

muss ich neu machen



Weitere Untersuchungen zur logistischen Parabel Haftendorn April 2011

Es ist hier ein "neues Problem" am TI eröffnet, da man nur so für Untersuchungen mit allgemeinem r dieselben Bzeichnungen verwenden kann, wie in den Seiten mit den konkreten Zeichnungen.

$\mathbf{f}(x):=r\cdot x\cdot(1-x)$ ▸ *Fertig* Allgemeiner Fixpunkt−Ansatz: $\mathbf{f}(x)=x$ ▸ $-r\cdot x\cdot(x-1)=x$

$\text{solve}(\mathbf{f}(x)=x,x)$ ▸ $x=\frac{r-1}{r}$ or $x=0$, Der linke Fixpunkt ist klar, der interessante ist

$\mathbf{xfix}:=\frac{r-1}{r}$ ▸ $\frac{r-1}{r}$. Für diesen ist die Steigung wichtig: $\frac{d}{dx}(\mathbf{f}(x))$ ▸ $-(2\cdot x-1)\cdot r$, Steigung am

Fixpunkt: $\mathbf{mxfix}:=\frac{d}{dx}(\mathbf{f}(x))|x=\mathbf{xfix}$ ▸ $-(r-2)$⚠. Erwartungsgemäß hängt dies von r ab.

Interessant sind die r−Werte mit Steigung 1 oder −1: $\text{solve}(\mathbf{mxfix}=1,r)$ ▸ $r=1$ oder $\text{solve}(\mathbf{mxfix}=-1,r)$ ▸ $r=3$

Für r=1 gilt kommt die Parabel mit Steigung 1 aus dem Ursprung $\mathbf{f}(x)|r=1$ ▸ $-x\cdot(x-1)$

Für r=3 $\mathbf{f}(x)|r=3$ ▸ $-3\cdot x\cdot(x-1)$ haben wir den Eintritt in die Bifurkationsparabel gefunden.

Das prüft man jetzt in dem anderen Problem durch Einstellen der Schieberegler.

Auf der anderen Notes−Seite sind Überlegungen zu den Iterierten.

Überlegungen zu den Iterierten

Die Iterierten entstehen, wenn man die Trägerfunktion immer wieder in sich selbst einsetzt.

Die Nummerierung über nehme isch von Turboplot, weil man dort auch das Feigenbaumdiagramm ansehen kann. Normal würde man mit 0 anfangen,

1. Iterierte $\mathbf{f}(x)$ ▸ $-r\cdot x\cdot(x-1)$

2. Iterierte $\mathbf{g2}(x):=\mathbf{f}(\mathbf{f}(x))$ ▸ *Fertig* Das ist $\mathbf{g2}(x)$ ▸ $-r^2\cdot(r\cdot x\cdot(x-1)+1)\cdot x\cdot(x-1)$,

$\text{expand}(\mathbf{g2}(x))$ ▸ $-r^3\cdot x^4+2\cdot r^3\cdot x^3-r^3\cdot x^2-r^2\cdot x^2+r^2\cdot x$ Polynom 4. Grades

Fixpunkte von g2:

$\text{solve}(\mathbf{g2}(x)=x,x)$ ▸ $x=\frac{-(\sqrt{r^2-2\cdot r-3}-r-1)}{2\cdot r}$ or $x=\frac{\sqrt{r^2-2\cdot r-3}+r+1}{2\cdot r}$ or $x=\frac{r-1}{r}$ or $x=0$

Es tauchen natürlich die beiden alten Fixpunkte auf. Dazu aber zwei neue. Sie esxistieren nur, wenn der Radikant der Wurzel positiv ist. Sie Auch Graph in diesem Problem.

$\text{solve}(r^2-2\cdot r-3=0,r)$ ▸ $r=-1$ or $r=3$ Also erst am r =3. Wie ist die Steigung in diesen Fixpunkten? $\frac{d}{dx}(\mathbf{g2}(x))$ ▸ $-(2\cdot x-1)\cdot(2\cdot x^2\cdot r-2\cdot x\cdot r+1)\cdot r^2$ Also

$\text{solve}\left(\left(-(2\cdot x-1)\cdot(2\cdot x^2\cdot r-2\cdot x\cdot r+1)\cdot r^2|x=\frac{-\sqrt{r^2-2\cdot r-3}+r+1}{2}\right)=-1,r\right)$ ▸ $r=-(\sqrt{6}-1)$ or $r=\sqrt{6}+1$⚠

$r=-(\sqrt{6}-1)$ or $r=\sqrt{6}+1$ ▸ $r=-1.44949$ or $r=3.44949$ Damit haben wir das r für die nächste Bifurkation exakt berechnet.

4. Iterierte $\mathbf{g4}(x):=\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{f}(x))))$ ▸ *Fertig*

$\mathbf{g4}(x)$

▸ $-r^4\cdot(r\cdot x\cdot(x-1)+1)\cdot(r^3\cdot x^2\cdot(x-1)^2+r^2\cdot x\cdot(x-1)+1)\cdot(r^7\cdot x^4\cdot(x-1)^4+2\cdot r^6\cdot x^3\cdot(x-1)^3+r^5\cdot x^2\cdot(x-1)^2+r^4\cdot x^2\cdot(x-1)^2+r^3\cdot x\cdot(x-1)+1)\cdot x\cdot(x-1)$

$\text{expand}(\mathbf{g4}(x))$

▸ $-r^{15}\cdot x^{16}+8\cdot r^{15}\cdot x^{15}-28\cdot r^{15}\cdot x^{14}+56\cdot r^{15}\cdot x^{13}-70\cdot r^{15}\cdot x^{12}+56\cdot r^{15}\cdot x^{11}-28\cdot r^{15}\cdot x^{10}$
$+8\cdot r^{15}\cdot x^9-r^{15}\cdot x^8-4\cdot r^{14}\cdot x^{14}+28\cdot r^{14}\cdot x^{13}-84\cdot r^{14}\cdot x^{12}+140\cdot r^{14}\cdot x^{11}-140\cdot r^{14}\cdot x^{10}$
$+84\cdot r^{14}\cdot x^9-28\cdot r^{14}\cdot x^8+4\cdot r^{14}\cdot x^7-6\cdot r^{13}\cdot x^{12}+36\cdot r^{13}\cdot x^{11}-90\cdot r^{13}\cdot x^{10}+120\cdot r^{13}\cdot x^9$
$-90\cdot r^{13}\cdot x^8+36\cdot r^{13}\cdot x^7-6\cdot r^{13}\cdot x^6-2\cdot r^{12}\cdot x^{12}+12\cdot r^{12}\cdot x^{11}-34\cdot r^{12}\cdot x^{10}+60\cdot r^{12}\cdot x^9$
$-70\cdot r^{12}\cdot x^8+52\cdot r^{12}\cdot x^7-22\cdot r^{12}\cdot x^6+4\cdot r^{12}\cdot x^5-6\cdot r^{11}\cdot x^{10}+30\cdot r^{11}\cdot x^9-61\cdot r^{11}\cdot x^8+64\cdot r^{11}\cdot x^7$
$-36\cdot r^{11}\cdot x^6+10\cdot r^{11}\cdot x^5-r^{11}\cdot x^4-6\cdot r^{10}\cdot x^8+24\cdot r^{10}\cdot x^7-36\cdot r^{10}\cdot x^6+24\cdot r^{10}\cdot x^5-6\cdot r^{10}\cdot x^4$
$-r^9\cdot x^8+4\cdot r^9\cdot x^7-8\cdot r^9\cdot x^6+10\cdot r^9\cdot x^5-7\cdot r^9\cdot x^4+2\cdot r^9\cdot x^3-r^8\cdot x^8+4\cdot r^8\cdot x^7-8\cdot r^8\cdot x^6+10\cdot r^8\cdot x^5$
$-7\cdot r^8\cdot x^4+2\cdot r^8\cdot x^3-2\cdot r^7\cdot x^6+6\cdot r^7\cdot x^5-7\cdot r^7\cdot x^4+4\cdot r^7\cdot x^3-r^7\cdot x^2-r^6\cdot x^4+2\cdot r^6\cdot x^3-r^6\cdot x^2$
$-r^5\cdot x^4+2\cdot r^5\cdot x^3-r^5\cdot x^2-r^4\cdot x^2+r^4\cdot x$

Auf die Idee, die Iterierten zu untersuchen, kommt man durch Betrachtung des Feigenbaum-diagramms.
Nach der ersten Bifurkation haben die Folgen zwei Häufungswerte. Sie werden im Wechsel angenommen. Wenn man also nur jedes zweite Folgenglied betrachtet, hat man den einen Häufungswert als Grenzwert. Genau das tut man, wenn man die zweite Iterierte ansieht. sie hat also zwei anziehende Fixpunke, die „alten“ Fixpunkte sind anstoßend geworden.
Wenn nun r weiter wächst wird die Steigung in diesen anziehenden Fixpunkten betragsmäßig auch größer, bis sie wieder -1 erreicht. Dann ziehen auch diese Fixpunkte nicht mehr an. Nun gilt entsprechendes für die vierte Iterierte, dort kommen vier neue anziehende Fixpunkte dazu.
Rechnerische Behandlung mit allgemeinem r ist nun kaum noch möglich. Aber man kann sie für feste r auf Schiebereglern noch recht genau erhunden.