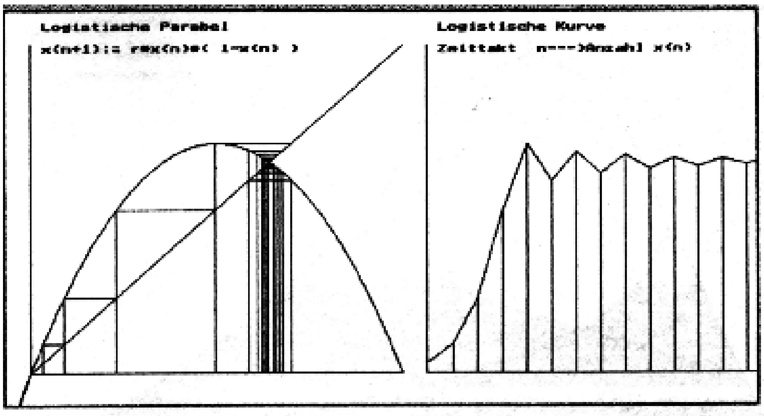
Prof. Dr. Dörte Haftendorn www.uni-lueneburg.de/mathe-lehramt Nov. 1996, Apr. 2005

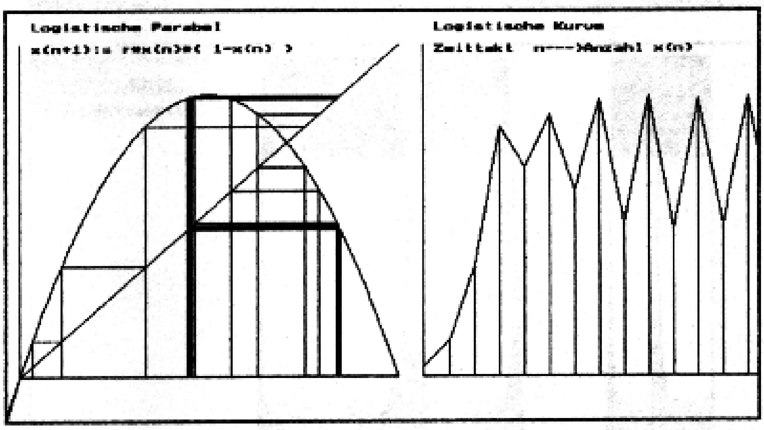
Logistische Parabel

$$a_n = r \cdot a_{n-1} \cdot (1 - a_{n-1})$$
$$f(x) = r \cdot x \cdot (1 - x)$$

f ist die Trägerfunktion für die rekursive Folge a_n.

Die **logistische Gleichung** beschreibt viele Vorgänge in Natur und Technik. Insbesondere in der Biologie kann man a_n deuten als Bevölkerungszahl z.B. einer Mäusepopulation in einem begrenzten Lebensraum. Der Parameter **r** ist dann aus Geburten- und Sterberate zusammengesetzt, mit **n** ist die Zyklus-Zeit, etwa Wochen, gemeint. Die logistische Gleichung sagt dann aus, dass die Bevölkerungszahl proportional ist zum Produkt aus (momentaner) Bevölkerungszahl und "Abstand" von der Bevölkerungsgrenze.

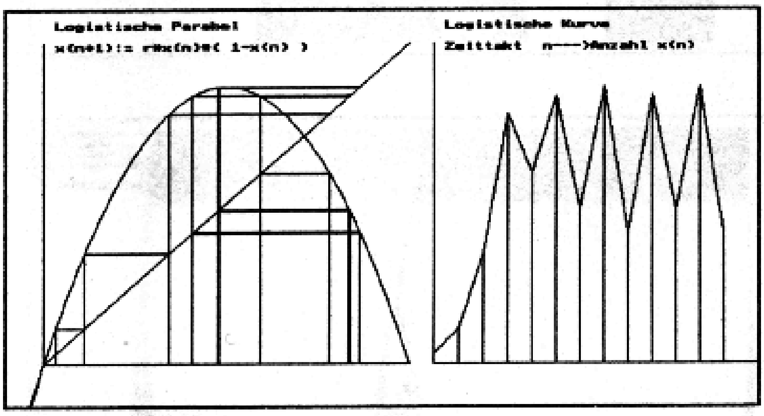




Wie sich die Folge verhält, wird rechts auf zwei Arten dargestellt. Links ist a_n über a_{n-1} aufgetragen. Man nennt die Darstellung auch **Spinnwebverfahren,** Web-Darstellung, Phasendiagramm.

Man startet bei beliebigem a_o und zeichnet immer abwechselnd senkrecht zur Kurve und waagerecht zur Winkelhalbierenden.

Rechts sind die so zustandegekommenen Bevölkerungszahlen über der Zeit n aufgetragen.



Das Verhalten der Folge wird im Wesentlichen von dem Parameter r beeinflusst.

Für 0<r#1 konvergiert die Folge gegen 0.

Für 1<r#3 konvergiert die Folge gegen den rechten Schnittpunkt mit der Winkelhalbierenden. Er ist dann anziehender Fixpunkt. Das ist er nämlich genau solange, wie die Steigung von f im Schnittpunkt betragsmäßig kleiner ist als 1. Für r#1 schneidet die Parabel rechts nicht.

Für 3<r treten zuerst mehrere Häufungspunkte auf, ab r=3,57 verhält sich die Folge chaotisch.