Mandelbrotmengen, Apfelmännchen, Juliamengen

Ha 08

Betrachtet werden Folgen $\langle z_n \rangle$

mit $\quad z_{n+1} = z_n^2 + c \qquad z_i, c \in \mathbb{C}$

$z_0 \in \mathbb{C}$

Für das Apfelmännchen betrachtet man alle Folgen $\langle z_n \rangle$ mit $z_0 = 0$

Sie bilden 3 Klassen von $\mathbb{C}$

$U := \{ c \mid z_0 = 0$ und $\langle z_n \rangle_c$ unbeschränkt $\}$

$K := \{ c \mid z_0 = 0$ und $\langle z_n \rangle_c$ konvergent $\}$

$R := \{ c \mid z_0 = 0$ und $\langle z_n \rangle_c$ beschränkt und $c \notin K \}$

$U \cup K \cup R = \mathbb{C}$ $\quad \boxed{Apf = K \cup R = \text{Apfelmännchen}}$

Für die Juliamengen betrachtet man ein festes c und alle $z_0 \in \mathbb{C}$

Für c wird $\mathbb{C}$ in 3 Klassen eingeteilt

$F_c := \{ z_0 \mid \langle z_n \rangle_c$ unbeschränkt $\}$ = Fluchtmenge von c

$K_c := \{ z_0 \mid \langle z_n \rangle_c$ konvergent

$J_c := \{ z_0 \mid \langle z_n \rangle_c$ beschränkt aber nicht konvergent $\}$

$G_c := K_c \cup J_c$ = Gefangenenmenge von c

J_c = Rand der Gefangenenmenge

$G_c := \{ z_0 \mid \langle z_n \rangle_c$ ist beschränkt $\}$

4.3.08 Ha

Zusammenhänge

$$\boxed{\forall c \in \mathbb{C} \Rightarrow J_c \neq \emptyset \;,\; K_c \neq \emptyset \;,\; G_c \neq \emptyset}$$

denn $f(z) = z^2 + c$ Trägerfunktion

Fixpunktansatz $z = z^2 + c$

Alle Polynome vom Grad n haben genau n Lösungen in $\mathbb{C}$ $\Rightarrow \exists\, z_1, z_2$ Fixpkte

1. Iterierte $f(f(z)) = \underbrace{(z^2+c)^2 + c = z}_{\text{hat 4 Fixpunkte}}$

davon sind 2 Häufungspunkt von f die nicht Fixpunkt von f sind.

Also $F_c \subset \mathbb{C}$ $\{z_1, z_2\} \subset K_c$ $\{z_3, z_4\} \subset J_c$ qed.

$\forall c \in \mathbb{C}$ gilt:

J_c enthält mindestens abzählbar-unendlich viele Punkte

denn jede höhere Iterierte erzeugt neue Häufungswerte.

Wir betrachten J_c und fragen $0 \in J_c$?

$0 \in J_c \Leftrightarrow (\langle z_n \rangle_c$ und $z_0 = 0)$ ist beschränkt und konvergiert nicht

$\Leftrightarrow c \in R$ Rand des Apfelmännchens.

Wir betrachten G_c und fragen $0 \in G_c$

$0 \in G_c \Leftrightarrow (\langle z_n \rangle_c$ und $z_0 = 0)$ beschränkt

$\Leftrightarrow c \in Apf$

ebenso $0 \in K_c \Leftrightarrow c \in K$

K inneres des Apfelm.

$$\boxed{0 \in F_c \Leftrightarrow c \notin Apf}$$