Apfelmännchen-Rekursion im Reellen | 4.3.02b

Ha Jan 08

$f(x)=x^2+c$

Existenz von Fixpunkten

$f(x)=x$

$x^2+c=x$

$x^2-x+\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}-c$

$x=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-c}$

→ Diskriminant

$D=\frac{1}{4}-c$

$D=0 \Leftrightarrow c=\frac{1}{4}$

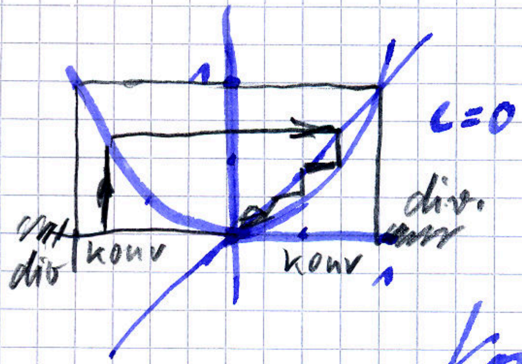
$D>0 \Leftrightarrow c<\frac{1}{4}$

c=1 Divergent

D=0 $x=\frac{1}{2}$ als doppelte Schnittstelle also Berührstelle mit $y=x$

$-\frac{1}{2}\le x_0\le\frac{1}{2} \Rightarrow \langle x_n\rangle$ konvergent gegen $x_{Fix}=\frac{1}{2}$

sonst $\Rightarrow (x_n)$ bestimmt divergent



c=0 Rechter Schnittpunkt mit der Parabel ist abstoßend

für c=0 liegt superschnelle Konvergenz gegen 0 vor, Tangente m=0

Rechnerische Bestätigung

$f'(x)=2x$

$f'\left(\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-c}\right)=1+2\sqrt{\frac{1}{4}-c}>1$

$f'\left(\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-c}\right)=1-2\sqrt{\frac{1}{4}-c}<1$

Untersuchung, für welche c noch gilt

$-1\le f'(x_{Fix\,ein})$

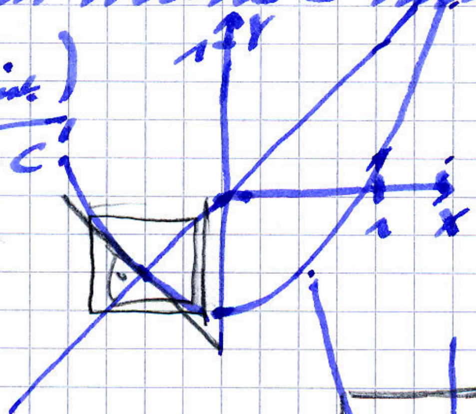
$-1\le 1-2\sqrt{\frac{1}{4}-c}$

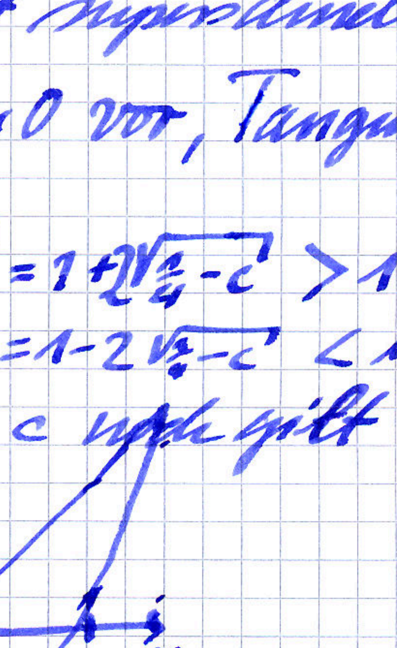
$-2\le -2\sqrt{\frac{1}{4}-c}$

$1\ge\sqrt{\frac{1}{4}-c}$

$1\ge\frac{1}{4}-c$

$-\frac{3}{4}\le c$





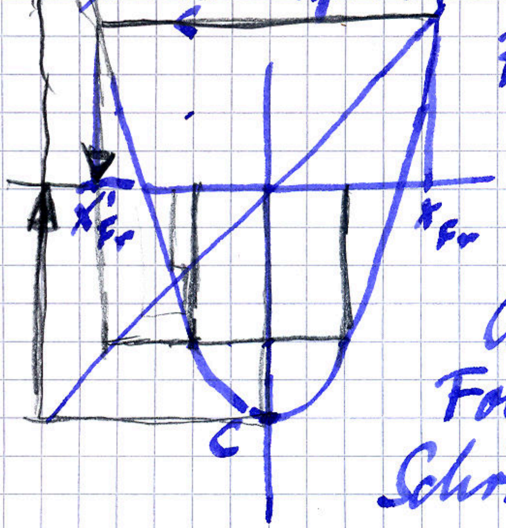
Konvergenz gegen $x_{Fix\,ein}$ für $-\frac{3}{4}\le c<\frac{1}{4}$ für $|x|<x_{Fix\,re}$ also $-1{,}5\le x_0\le 1{,}5$ bei $c=-\frac{1}{4}$

Weiter zur reellen Apfelmännchen-Rek.

4.3.02c

Ha Jan 08

Wird c kleiner als $-\frac{3}{4}$ ist auch der linke Fixpunkt nicht mehr anziehend.



Für zu tief gelegene c kommt gar keine Beschränktheit für beliebige x zustande

Entscheidend ist, ob die Folge mit $x_0=0$ nach zwei Schritten außerhalb von x_{Fr} trifft.

$x_0=0$ $\quad x_1=c$ $\quad x_2=c^2+c \geqq \left(\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-c}\right)$

als Gleichung: $\underbrace{c^2+c = \left(\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-c}\right)}_{\text{reicht schon}}$

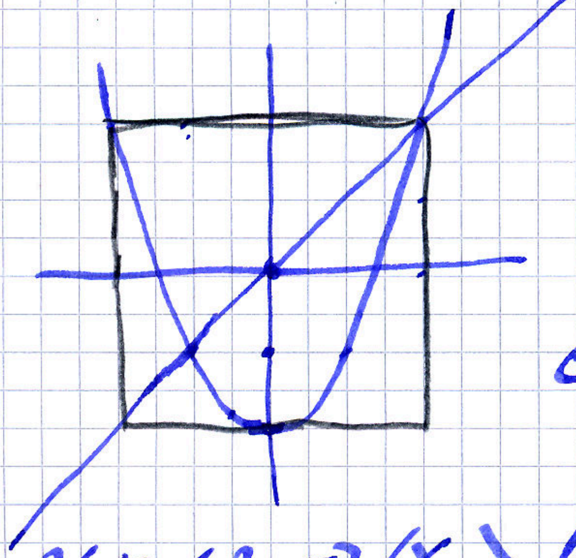
$$c+\frac{1}{2} = -\sqrt{\frac{1}{4}-c}$$

$$c^2+c+\frac{1}{4} = \frac{1}{4}-c$$

$$c^2+2c = 0$$

$$c(c+2) = 0$$

$$c=0 \vee c=-2$$



für $c<-2$ gibt es keine Gefangenenmenge bis auf Trefferfälle

$-2 \leq x_0 \leq 2 \Rightarrow \langle x_n \rangle$ beschränkt

$c=-2$

Dieses passt zu der Tatsache, dass das Apfelmännchen $|c|=2$ als Fluchtkreis hat. Die Einschränkung von c auf reelle Werte beschreibt ja gerade dieses $f(x)=x^2+c$

$f(z)=z^2+c$