4.3.

Apfelmännchen: Fluchtkreis-Beweis

Dreiecksungleichung

DU I DU II

$$|a| + |b| \underset{I}{\geqq} |a+b| \underset{II}{\geqq} |a| - |b|$$

Bew.

I Eine Dreiecksseite ist stets kürzer als die Summe der beiden anderen Seiten.

Zu II $+(-b)$

$$|a| = |a+b-b| \le |a+b| + |-b| = |a+b| + |b|$$

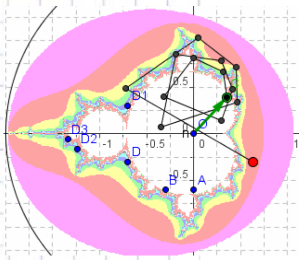
Umstellen $|a| - |b| \le |a+b|$ qed.

Anmerkung $|z^2| = |z|^2$ $z = \underbrace{r}_{|z|} e^{i\varphi}$ $z^2 = \underbrace{r^2}_{|z^2|} e^{i2\varphi}$

r^2

Anwendung auf die Apfelmännchenrekursion

$$|z^2 + c| \ge |z^2| - |c| = |z|^2 - |c| \quad (D)$$



* Wir betrachten nun spezielle z, die $|z| > \underbrace{\max(|c|, 2)}_{=: r(c) \text{ Schwellwert}}$ erfüllen

Es gilt also $0 < 2 \le |c| < |z|$

oder $0 \le |c| \le 2 < |z|$

In beiden Fällen gilt sowohl $|c| < |z|$

also $-|c| > -|z|$ ①

als auch $2 < |z| \Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0$ mit $2 + \varepsilon = |z|$ ②

Fall A

Für die Apfelmännchenfolge gilt $z_0 = 0$ $\quad z_1 = c$ $\quad z_2 = c^2 + c$

Ist hier $2 < |c| \Rightarrow \exists\, \varepsilon : 2 + \varepsilon = |c|$

so folgt genauso

$$|z_2| = |c^2 + c| \geq |c|^2 - |c| = (|c| - 1)|c|$$
$$= (2 + \varepsilon - 1)|c|$$
$$= (1 + \varepsilon)\cdot|c|$$

Also ist $|z_2| \cancel{\geq} |c| > 2$

echt

$\Rightarrow \quad \ddot{f}(c)$

Schon z_2 erfüllt die ~~V~~oraussetzung *

Also:

Beim Apfelmännchen braucht man c mit $2 < |c|$ also c außerhalb des Fluchtkreises gar nicht zu betrachten. Es wird sich in

Fall B zeigen:

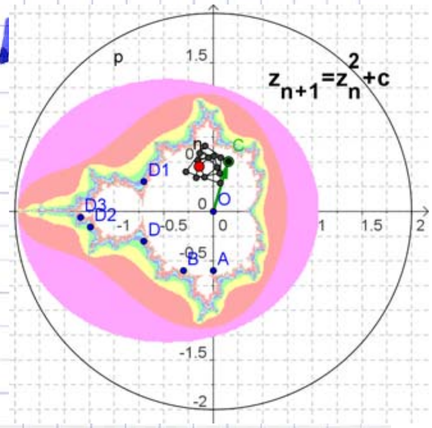
und für alle anderen c reicht ein Überschreiten des Fluchtkreisrandes um zu entscheiden, dass die Folge gegen ∞ strebt, c also nicht zum Apfelmännchen gehört

Fall B $|c| \le 2 < |z| \iff \exists\, \varepsilon > 0 : 2+\varepsilon = |z|$

Damit gilt die Kette $|f(z)| =$

$$|z^2+c| \underset{D}{\geq} |z^2| - |c| \underset{①}{\geq} |z^2| - |z|$$

$$= |z|^2 - |z|$$
$$= (|z| - 1)\,|z|$$
$$= (2+\varepsilon - 1)\,|z|$$
$$= (1+\varepsilon)\cdot|z|$$



Fluchtkreis = Kreis um 0 mit Radius 2

Also hat sich ergeben,

$\boxed{\text{Noch zu betrachten } 2 < |z| \le |c| \quad r(c) := |c|}$

Für Apfelmännchenfolgen gibt es diesen Fall nicht,
wie auf der vorigen Seite gezeigt. Bei den für Juliamengen
betrachteten Folgen übersteigt aber auch die geometrisch
wachsende Folge diesen Wert, wenn z nicht Fixpunkt ist.

Satz: Ist ein Wert der Folge größer als der Schwellenwert $r(c) = \max(|c|, 2)$

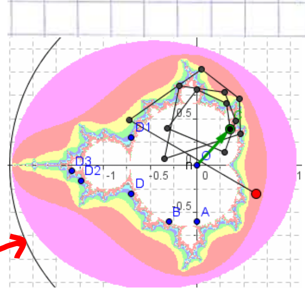
$\Rightarrow$ die Folge strebt gegen unendlich

" " liegt im U_∞

im Einzugsbereich von ∞

dieses z und alle nachfolgenden Folgenglieder liegen in der Fluchtmenge von c $\quad F_c$

Damit ist der Kreis um 0 mit Radius $r(c)$ eine erste Approximation der Gefangenenmenge G_c, sein Äußeres gehört sicher zu F_c



fluchtkreis.docx