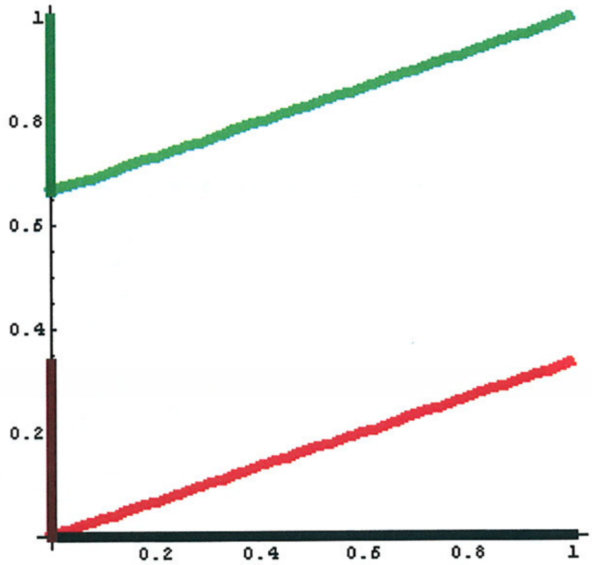
Iteriertes Funktionensystem IFS, eindimensionaler Fall

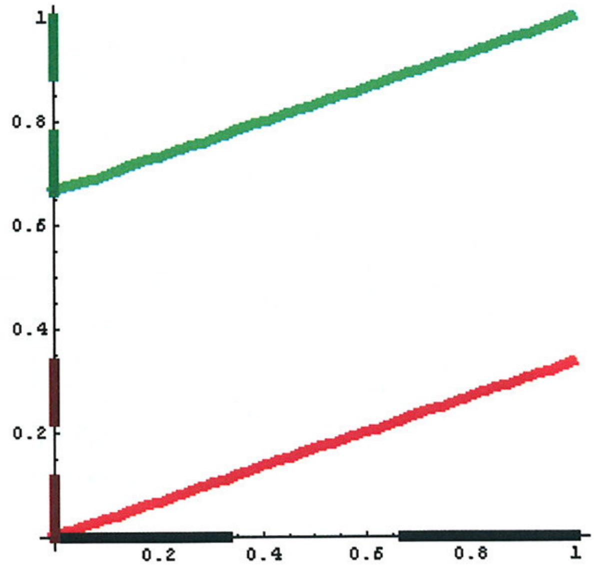


Die Funktionen f_1 und f_2 mit

$$f_1(x) = \frac{x}{3} \text{ und } f_2(x) = \frac{x+2}{3}$$

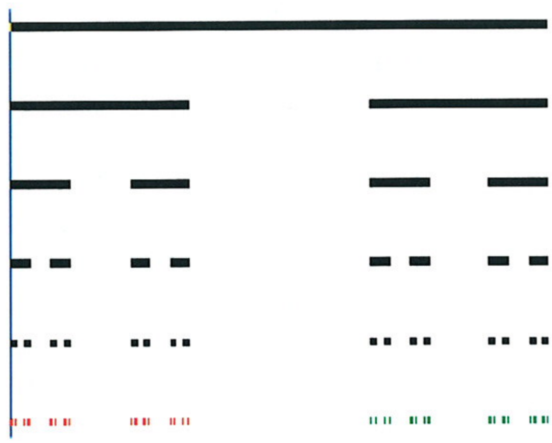
werden auf das Intervall [0,1] angewandt und bilden es auf zwei Intervalle der Länge 1/3 ab.
Nun wird "iteriert", also die Ergebnis -Intervalle auf die x-Achse gelegt und "wiederum= iterum" abgebildet.

Beim ersten Schritt ist aus dem Startintervall das mittlere Drittel herausgenommen worden.
Beim jedem weiteren Schritt werden aus den verbliebenen Resten die mittleren Drittel entfernt.



Georg Cantor, 1845-1918 gilt als der "Begründer" der Mengenlehre und der "transfiniten Zahlen".
Der Cantor-Staub ist ein Beispiel einer total unzusammenhängenden Menge ohne isolierte Punkte.

Im Dufner-Programm "Fraktale" in "FraktaleJulia" zeigt die blaue Senkrechte, die man verschieben kann, die dezimale und triadische Entwicklung der Stelle, an der die Senkrechte steht. Aus der triadischen Entwicklung einer Zahl kann man ablesen, in welchen Teilintervallen sie bei der Konstruktion der Cantor-Menge liegt. Beispielsweise liegen alle Punkte, deren triadische Entwicklung mit 0,2... beginnt, im rechten Drittel von [0,1]. Erkunden Sie die Zusammenhänge, lesen Sie die "Hilfe".



Man kann zeigen, dass der Cantor-Staub genau aus den Zahlen besteht, deren triadische Darstellung nur 2 und 0, keine 1 ausweist. Dabei ist allerdings zu beachten, dass

$1 = 0,222222222.... = 0,\overline{2}$ ist.

Wenn man nun noch alle 2 durch 1 ersetzt, hat man Dualzahlen und zwar sämtliche zwischen 0 und 1.
Damit ist gezeigt, dass der Cantor-Staub nicht nur unendlich viele Punkte enthält, sondern "überabzählbar unendlich viele", also dass er die Mächtigkeit des gesamten Intervalles [0,1], "des Kontinuums", hat.

Literatur: Dufner, Roser, Unseld: Fraktale und Juliamengen [mit CD], Verlag Harri Deutsch,