Affine Abbildungen aus 3 gut gewählten Punktpaaren 1/7

Ha 2011

Affine Abbildungen, allgemein

OBdA vereinfacht

definiert in Cinderella durch drei Punkte A, B, C und ihre Bilder.

Typ 1 $A=(0,0) \quad B=(5,0) \quad C=(0\ 5)$

$$A \downarrow d \qquad B \downarrow e \qquad C \downarrow f$$

Allgemein $p' = Tp + t \qquad \rightarrow p' = Tp + d$

$$d = a' = Ta + t = t$$

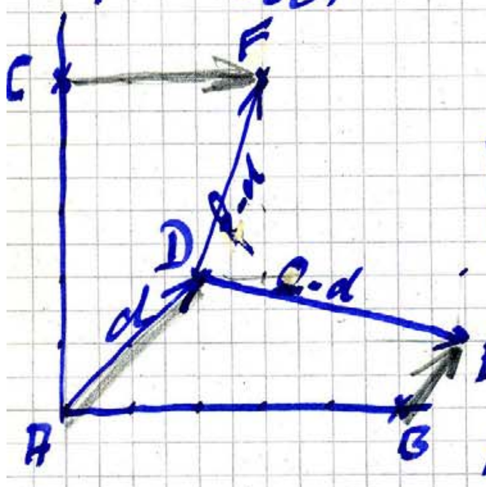
$$e = Tb + d = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{21} \\ t_{12} & t_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + d$$

$$e = 5\begin{pmatrix} t_{11} \\ t_{12} \end{pmatrix} + d \qquad t_{11} = \tfrac{1}{5}(e_x - d_x)$$

$$t_{12} = \tfrac{1}{5}(e_y - d_y)$$

$$f = 5\begin{pmatrix} t_{21} \\ t_{22} \end{pmatrix} + d \qquad t_{21} = \tfrac{1}{5}(f_x - d_x)$$

$$t_{22} = \tfrac{1}{5}(f_y - d_y)$$



$$\boxed{p' = (e-d\ ,\ f-d)\tfrac{1}{5} + d}$$

$$\begin{pmatrix} p'_x \\ p'_y \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} e_x - d_x & f_x - d_x \\ e_y - d_y & f_y - d_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \end{pmatrix}$$

hier $p' = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} p + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Typ 2 $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ beliebig
siehe am früheren Blatt v. 5.5.2010

Mit der Bezeichnung 6/7 und 7/7

Affine Abbildungen aus 3 gut gewählten Punktpaaren

$$p' = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} p + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Fixpunkt Ansatz $p = f(p) = Tp + t$

$$p = Tp + t$$
$$p - Tp = t$$
$$(E - T)\, p = t$$
$$p = (E-T)^{-1}\, t$$ falls das Inverse existiert

Gleichungssystem

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\right) p = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad | \cdot 5$$

$$\begin{pmatrix} 5-4 & 0-1 \\ 0+1 & 5-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad p_x - p_y = 10$$
$$p_x + 2p_y = 10$$
$$0 \quad 3p_y = 0$$
$$p_y = 0$$
$$p_x = 10$$

$$P_{Fix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgaben
Ist dies eine Drehstreckung?

Def: gleichsinnige affine Abb. $\Leftrightarrow \det T > 0$
gegensinnig $\Leftrightarrow \det T < 0$
entartet $\Leftrightarrow \det T = 0$

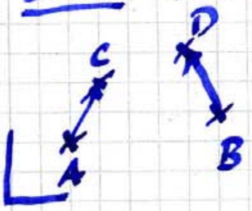
Behandeln Sie ebenso A,B,C (wie oben)
und $D = (-2,-2)$
$E = (-2,5)$
$F = (-8,4)$

$A \to D = (-2,3)$
$B \to E = (-3,7)$
$C \to F = (-6,-1)$

Ähnlichkeitsabbildungen aus 2 gut gewählten Punktpaaren 3/7

$\boxed{\text{Ähnlichkeitsabbildung}}$ Ha 2011

definiert in Cinderella durch
zwei Punkte und ihre Bilder



Mit diesen Angaben kann man nur gleichsinnige Ähnlichkeitsabbildungen definieren, das sind die Drehstauchungen und Verschiebungen und deren Verknüpfungen.

Das führt auf die Idee, die Ebene als Gaußsche Zahlenebene aufzufassen und komplex zu rechnen:

$z' = w \cdot z + t$ mit $w = k e^{i\alpha}$

3. Verschiebung um t, 1. Drehung um α, 2. Stauchung Faktor $k \leq 1$ (bei IFS i.A. nötig)

Zusammenhang mit
$z' = Tz + t$ oBdA sei $t = 0$ zunächst

$W = W_x + i W_y \quad z = x + iy$

$wz = (w_x + i w_y)(x + iy) = w_x x - w_y y + i(w_x y + w_y x)$

$wz = \begin{pmatrix} w_x & -w_y \\ w_y & w_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ also $w_x = k \cos\alpha$, $w_y = k \sin\alpha$

$z' = k \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ Passt auch zur Eulerformel

Drehstauchung in lin. Alg.

$w = k e^{i\alpha} = k \cos\alpha + i k \sin\alpha = w_x + i w_y$

Allgemein $z' = wz + t$

Ähnlichkeitsabbildungen aus 2 beliebigen Punktpaaren 4/7

Ähnlichkeit, gleichsinnig

Spez. Drehstreckung gefolgt von Verschiebung

aus $A \to C$, $B \to D$ $\quad z' = wz + t$

w und t sind gesucht

$c = wa + t$

$d = wb + t$

$\ominus \quad c - d = w(a-b)$ $\quad \boxed{w = \frac{c-d}{a-b}}$ $\quad a \neq b$ trivial

$t = c - wa = c - \frac{c-d}{a-b}a$

$t = \frac{ca - cb - ca + da}{a-b}$

$\boxed{t = \frac{da - cb}{a-b} = \frac{\det}{a-b}}$ $\quad \left|\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\right| =: \det$

Beispiel $\quad a = 0 \quad b = 5 \quad c = 1+5i$

$a - b = -5 \quad d = 4 + 2i$

$c - d = -3 + 3i$

$w = \frac{-3+3i}{-5} = \frac{3}{5} - \frac{3}{5}i = ke^{i\alpha}$

$\cos\alpha = \frac{3 \cdot 5}{5 \cdot 3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$\alpha = 45°$

Drehung um 45°

Streckung $k = \frac{3}{5}\sqrt{2}$

$t = \frac{0 - (1+5i)(4+2i)}{-5} =$

$t = \frac{1}{5}(4 + 2i + 20i - 10) = \frac{1}{5}(-6 + 22i)$

Fixpunkt? $\quad z' = \left(\frac{3}{5} - \frac{3}{5}i\right)z + \frac{1}{5}(-6 + 22i) = f(z)$

$z = f(z)$

$z = wz + t$

$(1-w)z = t$

Fixpkt $\quad \boxed{z = \frac{t}{1-w}}$ $\stackrel{\text{hier}}{=} \frac{-6+22i}{5\left(1 - \frac{3}{5} + \frac{3}{5}i\right)} = z_{Fix}$

$z_{Fix} = \frac{-6+22i}{2+3i} \cdot \frac{2-3i}{2-3i} = \frac{-12 + 66 + i(18+44)}{4+9}$

$= \frac{1}{13}(54 + 62i) = \frac{54}{13} + \frac{62}{13}i$

$4,\ldots + 4,9\ldots i$

$w \cdot \bar{w} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2$

$|w| = \frac{3}{5}\sqrt{2} =: k$ Streckfaktor

$\approx 0{,}84$

$\frac{\sqrt{2 \cdot 9}}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}\sqrt{2}$ elementargeometrisch

Der Fixpunkt von $z' = wz + t$ ist Drehzentrum

$z' = wz + t$

$z' = w(z - m) + m$ Drehung um m
$= wz - wm + m$ Drehstreckung um m

Vergleich

$m - wm = t$
$(E - w)m = t$
$(E - w)z = t$ war die Fixpunktgleichung.

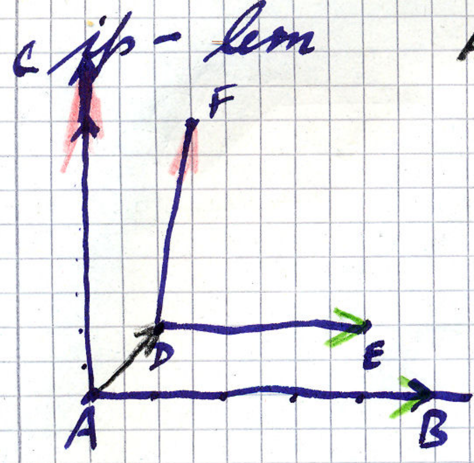
Das passt dazu: jede Drehung bzw. Drehstreckung hat genau einen Fixpunkt

und das Drehzentrum ist Fixpunkt

Weiter folgt Verschiebung ∘ Drehung = Drehung

oder: es gibt keine "Gleitdrehung"

Affine Abbildungen 2D, allgemeine Abbildungsgleichung



Allg. Affine Abbildung

$A \to D$

$B \to E$

$C \to F$

$a = 0 \qquad d = d_x + i\, d_y$

$b = 10 \qquad e = e_x + i\, e_y$

$c = 10i \qquad f = f_x + i\, f_y$

Als affine Abb.

$$p' = Tp + t = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x' \\ p_y' \end{pmatrix}$$

$d = Ta + t \qquad \Rightarrow \quad d = t$

$e = Tb + t \qquad e = Tb + d$

$f = Tc + t \qquad f = Tc + d$ | Vektorgleichungen

$$\left.\begin{aligned} e_x &= t_{11} b_x + t_{12} b_y + d_x \\ e_y &= t_{21} b_x + t_{22} b_y + d_y \\ f_x &= t_{11} c_x + t_{12} c_y + d_x \\ f_y &= t_{21} c_x + t_{22} c_y + d_y \end{aligned}\right\} \text{4 Variable, } T$$

$$(e_x c_x - f_x b_x) = t_{12}(b_y c_x - c_y b_x) + d_x c_x - d_x b_x$$

$$\frac{(e_x - d_x) c_x - (f_x - d_y) b_x}{b_y c_x - c_y b_x} = t_{12}$$

$$e_y c_x - f_y b_x = t_{22}\left(b_y c_x - c_y b_x\right) + d_y c_x - d_y b_x$$

$$t_{22} = \frac{(e_y - d_y)\,c_x - (f_y - d_y)\,b_x}{b_y\,c_x - c_y \cdot b_x} \qquad = \begin{vmatrix} c_x & b_x \\ c_y & b_y \end{vmatrix} = -\mathrm{det}$$

$$e_x c_y - f_x b_y = t_{11}\left(b_x c_y - c_x b_y\right) + d_x c_y - d_x b_y$$

$$t_{11} = \frac{(e_x - d_x)\,c_y - (f_x - d_x)\,b_y}{b_x\,c_y - c_x\,b_y}$$

$$t_{21} = \frac{(e_y - d_y)\,c_y - (f_y - d_y)\,b_y}{b_x\,c_y - c_x\,b_y}$$

$$\begin{vmatrix} b_x & c_x \\ b_y & c_y \end{vmatrix} = \mathrm{det}$$

$$\begin{vmatrix} e_x - d_x & c_x \\ f_x - d_x & b_x \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{-\mathrm{det}} = t_{12}$$

$$\begin{vmatrix} e_y - d_y & c_x \\ f_y - d_y & b_x \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{-\mathrm{det}} = t_{12}$$

$$\begin{vmatrix} e_x - d_x & c_y \\ f_x - d_x & b_y \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{\mathrm{det}} = t_{11}$$

$$\begin{vmatrix} e_y - d_y & c_y \\ f_y - d_y & b_y \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{\mathrm{det}} = t_{21}$$