Chaos und Fraktale Mandelbrotmengen

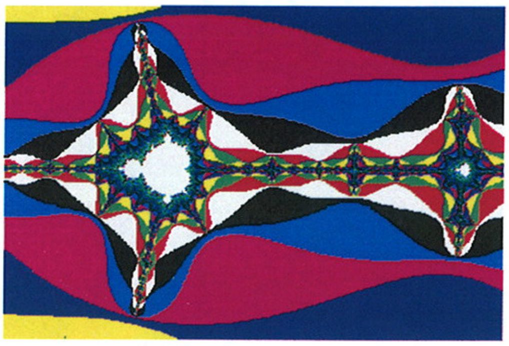
Das **Apfelmännchen** wohnt in der komplexen Zahlenebene. z_i **und** c sind komplexe Zahlen. Grundlage ist die Gleichung

$$z_{n+1} = f(z_n) = z_n^2 + c$$

Start bei z_0. Die Folge $z_0, z_1, z_2,$ .... nennt man die **Bahn (den Orbit)** von z_0.

B sei der Bereich der komplexen Ebene, in der ein Bild entstehen soll.

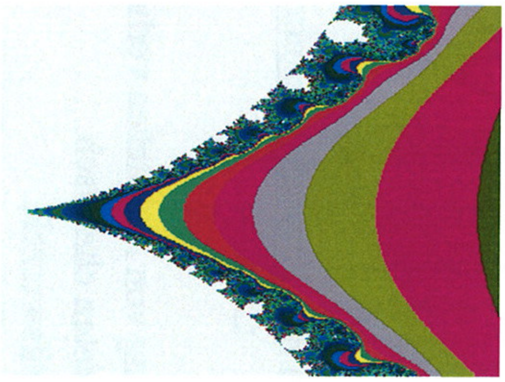
Beim Apfelmännchen wird wird jeder Punkt als ein **c** aufgefaßt. Wenn dann die Bahn des Ursprungs $z_0=0$ nach N Schritten beschränkt bleibt, d.h. Abstand 2 vom Ursprung nicht überschreitet, dann wird c schwarz (blau) gefärbt. Sonst erhält c eine Farbe, die der Indexnummer entspricht, bei der dieser Abstand 2 überschritten wurde. N heißt Iterationstiefe.

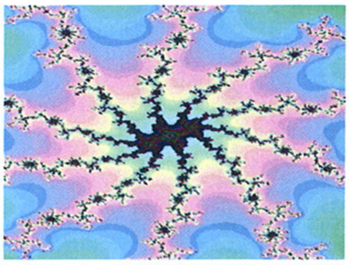


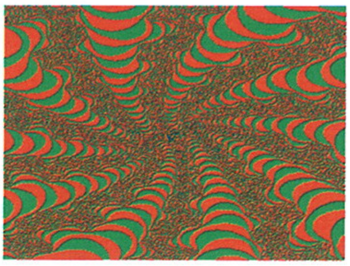
Dabei entsteht das Apfelmännchen mit vielen Farben in der Nähe seines Randes. Im obersten Bild reicht die große Ellipse von -2 bis 1 und von -1,33 i bis +1,33 i .Also verläuft die imaginäre Achse etwa rechts neben der oberen und der unteren großen Knospe entlang. Die reelle Achse ist die Symmetrieachse.

Die anderen Bilder sind Ausschnitte. Dabei ist die Innenfarbe nun hellgrau statt blau.

Die Iterationstiefe war N=5000.

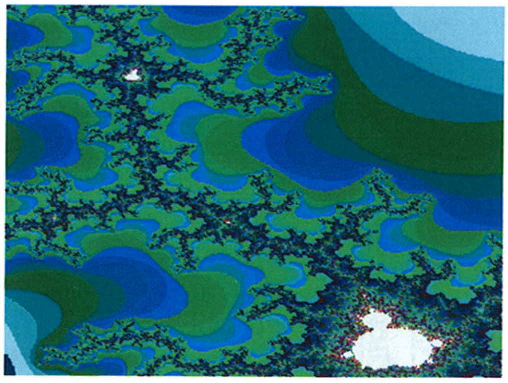




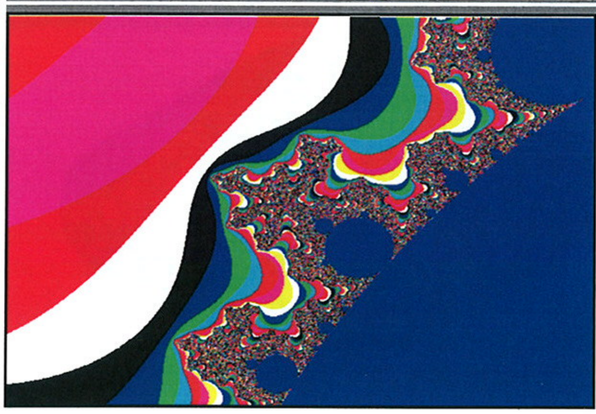


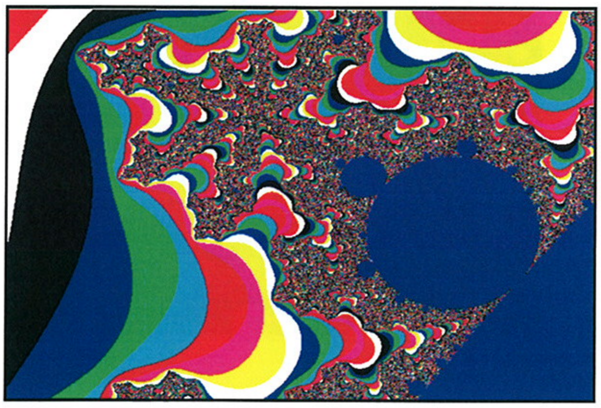
Bereich -0,52330750 + 0.68811162 i links unten
  -0.52330574 + 0.68811408 i rechts oben

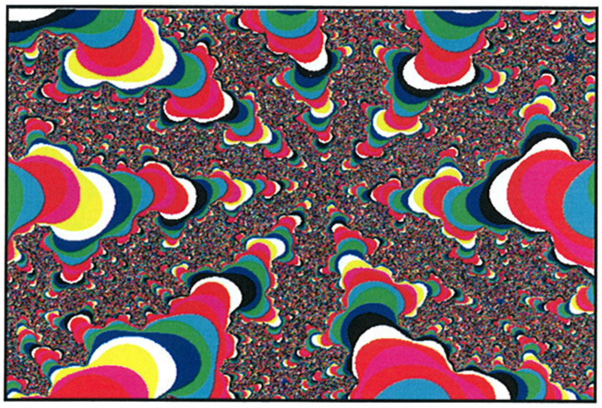
für die beiden kleinen Bilder, also nur 3 Millionstel breit und hoch. Hier zeicht sich, daß die Farben zwar beliebis sind, aber dennoch den Eindruck des Bildes stark beeinflussen. Punkt in einem zusammenhängenden Gebiet einer Farbe habe dieselbe "Fluchtgeschwindigkeit", der Orbit hat als bei derselben Iterationsnummer der Kreis mit Radius 2 velassen.

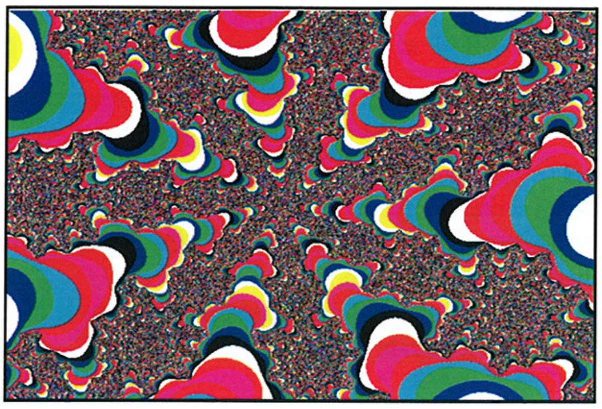


Allgemeinere Mandelbrotmengen (benannt nach B. Mandelbrot) erhält man wenn man als f(z) andere komlexe Funktionen wählt.









Mandelbrot-Rekursion $z_{n+1} = z_n^2 + c$

Bild	1.1	Datei	apfbj2.wpg
x ob li	-0,83836450	y ob li	0.583346115
x unt re	-0,480598832	y untre	0.316430785
Iterat.	3200	2ϵ= 0,35777... 2η= 0,266916..	
Bild	1.2	Datei	apfst1.wpg
x ob li	-0,730005918	y ob li	0.485599136
x unt re	-0,588851752	y untre	0.379734311
Iterat.	3200	2ϵ= 0,14... 2η= 0,1059...	
Bild	1.3	Datei	apfst2.wpg
x ob li	-0,680514043	y ob li	0.464397881
x unt re	-0,661316819	y untre	0.450000336
Iterat.	3200	2ϵ= 0,02 2η= 0,0144...	
Bild	1.4	Datei	apfst3.wpg
x oli	-0,67020919674	y oli	0.45806098232
x ure	-0,67020917784	y ure	0.45806096815
Itera t.	3200	2ϵ= 0,00000002.. 2η= 0,000000014...	
B	2.1	Dat	apfst4.wpg
xo	-0,6702091879033937	y li	0.4580609752970368
xu	-0,6702091879031099	yre	0.4580609752968506
Ite rat	3200	2ϵ= 0,0000000000003.. 2η= 0,000000000002...	

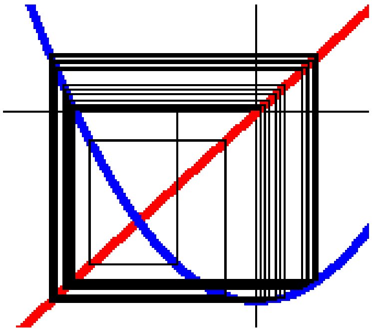
Merkwürdigerweise sehen alle Vergrößerungen ab Bild 1.3 fast gleich aus. Das letzte Fenster ist nur noch 0,3 Milliardstel breit. Falls da doch noch ein Apfelmännchenkern verborgen ist, habe ich ihn nicht finden können. Dies ist Apf7saul.wpd

Fraktale Geometrie “Julia-Apfel” Reeller Teil iteriert

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Uni Lüneburg, 17. Juni 2003

$f_c(z) = z^2 + c$ beschreibt ein komplexe Iteration.

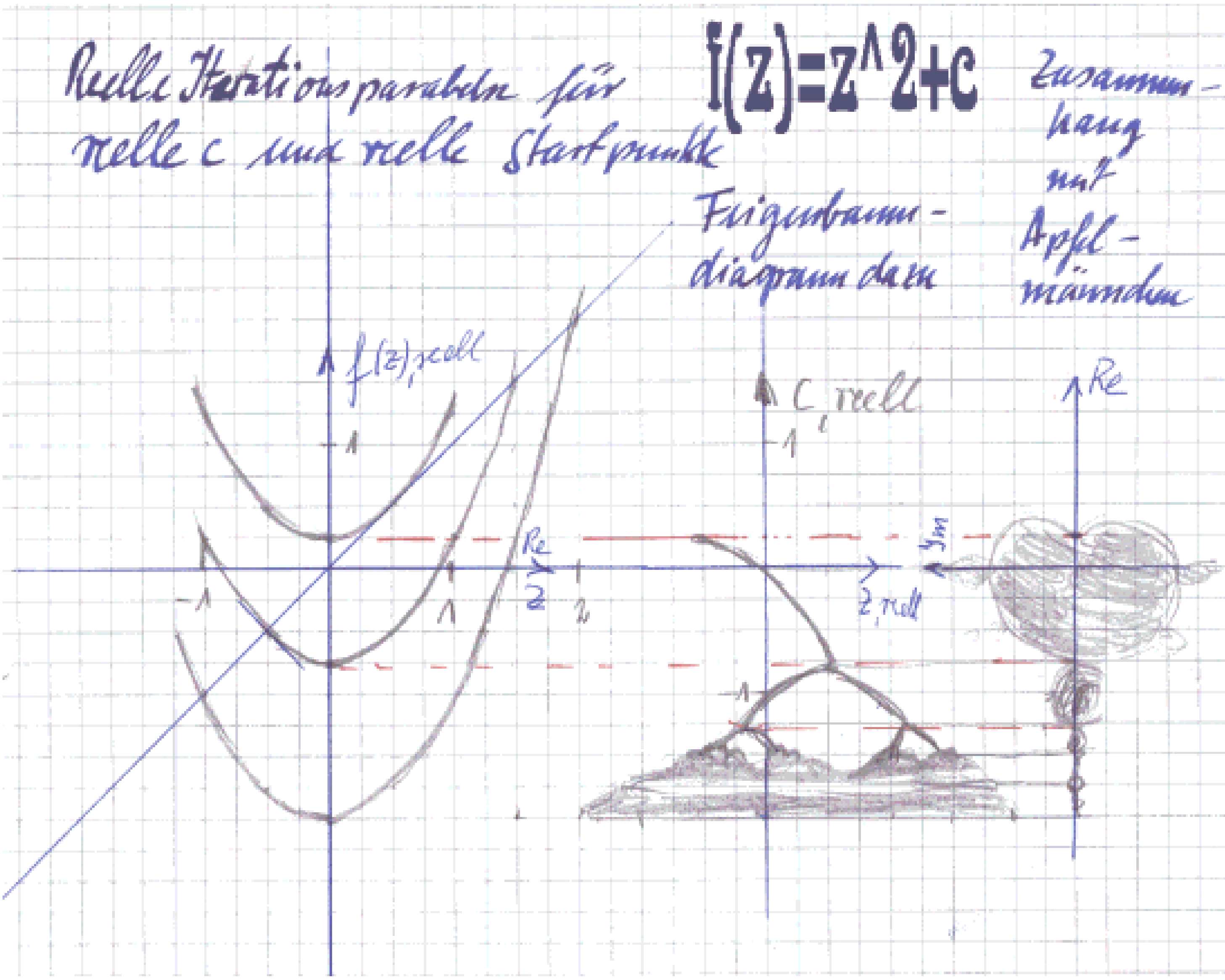
Wähle c. Bleiben die Folgenglieder mit Start bei 0 beschränkt, gehört c zum **Apfelmännchen**.
Wähle c. Wähle einen Start z0. Bleiben die Folgenglieder beschränkt, gehört z0 zur “**Gefangenenmenge**” Gc von c. Der Rand der Gefangenenmenge ist die **Juliamenge Jc** von c. Gc nennt man auch “**ausgefüllte Juliamenge**”.



Wählt man nun c reell und einen reellen Startwert z0, so sind auch alle folgenden Werte reell und man kann sich das Verhalten der Iteration in der im Reellen üblichen Art mit dem Spinnwebverfahren deutlich machen. Rechtes Bild aus Turboplot mit f(x) x^2+a, a=1,3, z0=-0,5

Aufgabe:

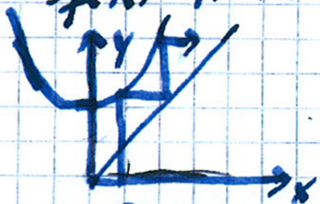
Unten sind für drei wesentliche Werte von c=a die Parablen gezeichnet. Bestimmen Sie diese Werte durch eigene Herleitung.
Machen Sie sich den Zusammenhang mit dem Attraktordiagramm klar.
Im Apfelmännchen ist auf diese Weise nur das Verhalten für c auf der Symmetrieachse untersucht. Welche Eigenschaften des Apfelmännchens ergeben sich?
Wie stellt sich die Apfelmännchen-Einschränkung, dass z0=0 ist, im reellen Iterationsdiagramm dar?
Was kann man über die Juliamengen der reellen c erfahren?



Apfelmännchen-Rekursion im Reellen | 4.3.026

Ha Jan 07

$f(x)=x^2+c$



Existenz von Fixpunkten

$f(x)=x$

$x^2+c=x$

$x^2-x+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}-c$

$x=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-c}$

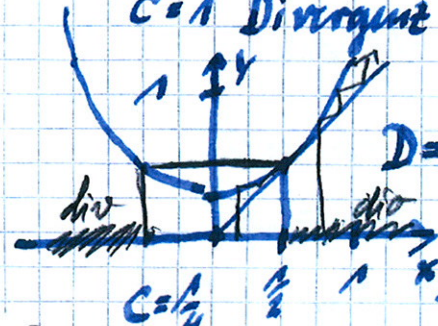
→ Diskriminant

$D=\frac{1}{4}-c$

$D=0 \Leftrightarrow c=\frac{1}{4}$

$D>0 \Leftrightarrow c<\frac{1}{4}$

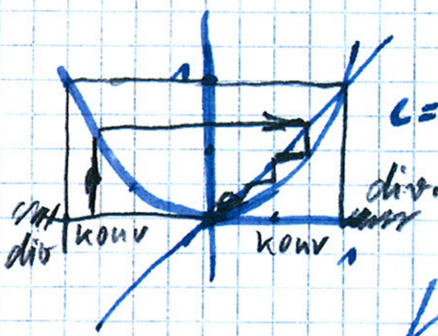
c=1 Divergent



D=0 $x=\frac{1}{2}$ als doppelte Schnittstelle also Berührstelle mit $y=x$

$-\frac{1}{2}\le x_0\le\frac{1}{2} \Rightarrow \langle x_n\rangle$ konvergent gegen $x_{Fix}=\frac{1}{2}$

sonst $\Rightarrow \langle x_n\rangle$ bestimmt divergent



c=0 Rechter Schnittpunkt mit der Parabel ist abstoßend

für c=0 liegt superstabile Konvergenz gegen 0 vor, Tangente m=0

Rechnerische Bestätigung

$f'(x)=2x \qquad f'\left(\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-c}\right)=1+2\sqrt{\frac{1}{4}-c}>1$

$f'\left(\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-c}\right)=1-2\sqrt{\frac{1}{4}-c}<1$

Untersuchung, für welche c noch gilt

$-1\le f'(x_{Fix\,ein})$

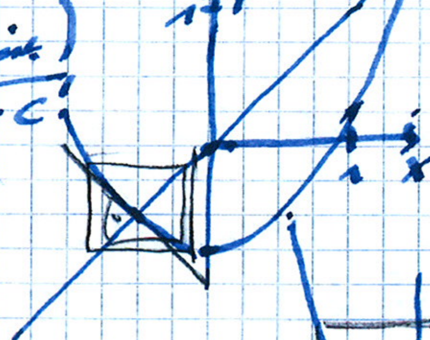
$-1\le 1-2\sqrt{\frac{1}{4}-c}$

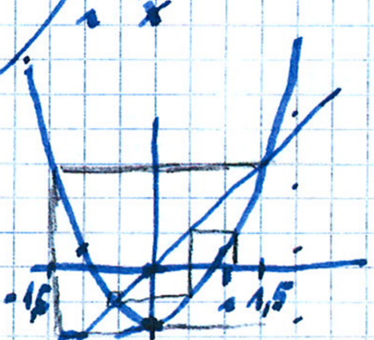
$-2\le -2\sqrt{\frac{1}{4}-c}$

$1\ge\sqrt{\frac{1}{4}-c}$

$1\ge\frac{1}{4}-c$

$-\frac{3}{4}\le c$



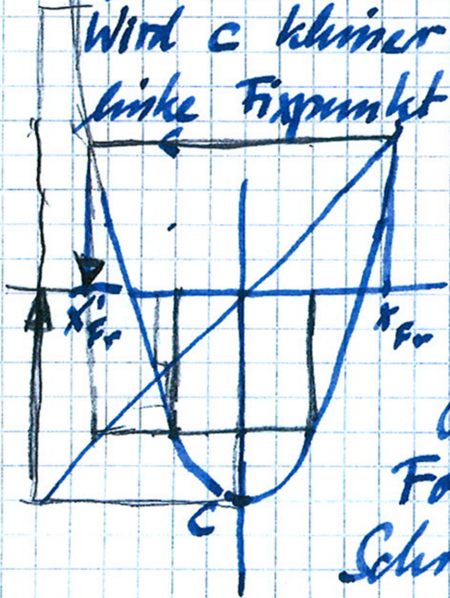


Konvergenz gegen $x_{Fix\,ein}$ für $-\frac{3}{4}\le c<\frac{1}{4}$ für $|x|<x_{Fix\,re}$ Also $-1{,}5\le x_0\le 1{,}5$ bei $c=-\frac{3}{4}$

Weiter zur reellen Apfelmännchen-Rek.

4.3.02c
Ha Jan 08

Wird c kleiner als $-\frac{3}{4}$ ist auch der linke Fixpunkt nicht mehr anziehend.

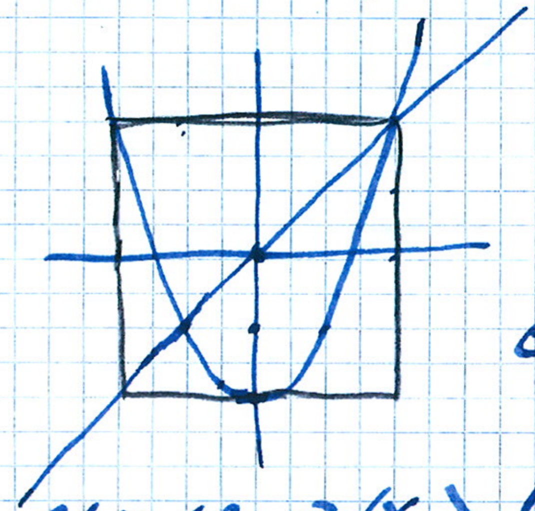


Für zu tief gelegene c kommt gar keine Beschränktheit für beliebige x zustande

Entscheidend ist, ob die Folge mit $x_0=0$ nach zwei Schritten außerhalb von x_{Fr} trifft.

$x_0=0$ $\quad x_1=c$ $\quad x_2=c^2+c \geq -\left(\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-c}\right)$

als Gleichung: $c^2+\underbrace{c = -\left(\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-c}\right)}_{\text{reicht schon}}$



$$c+\frac{1}{2} = -\sqrt{\frac{1}{4}-c}$$
$$c^2+c+\frac{1}{4} = \frac{1}{4}-c$$
$$c^2+2c = 0$$
$$c(c+2) = 0$$
$$c=0 \vee c=-2$$

für $c<-2$ gibt es keine gefangene Menge bis auf Trefferfälle

$-2 \leq x_0 \leq 2 \Rightarrow \langle x_n \rangle$ beschränkt
$c=-2$

Dieses passt zu der Tatsache, dass das Apfelmännchen $|c|=2$ als Fluchtkreis hat.
Die Einschränkung von c auf reelle Werte beschreibt ja gerade dieses $f(x)=x^2+c$
$f(z)=z^2+c$

4.3.

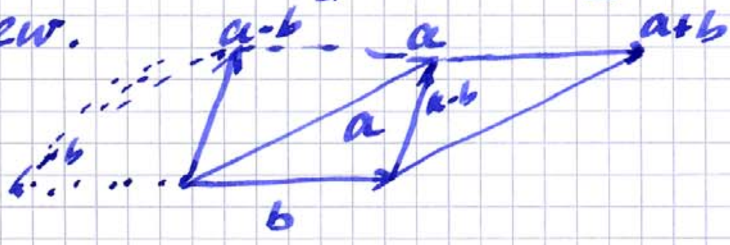
Apfelmännchen: Fluchtkreis-Beweis

Dreiecksungleichung

DU I DU II

$$|a|+|b| \underset{I}{\geq} |a+b| \underset{II}{\geq} |a|-|b|$$

Bew.



I Eine Dreiecksseite ist stets kürzer als die Summe der beiden anderen Seiten.

Zu II $+(-b)$

$$|a| = |a+b-b| \le |a+b| + |-b| = |a+b| + |b|$$

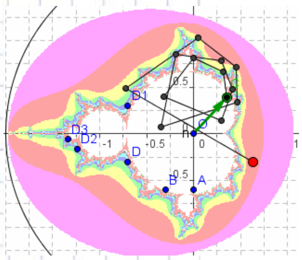
Umstellen $|a|-|b| \le |a+b|$ qed.

Anmerkung $|z^2| = |z|^2$ $\qquad z = \underbrace{r}_{|z|} e^{i\varphi} \qquad z^2 = \underbrace{r^2}_{|z^2|} e^{i2\varphi}$

r^2

Anwendung auf die Apfelmännchen-rekursion

$$|z^2+c| \geq |z^2| - |c| = |z|^2 - |c| \qquad \text{(D)}$$



* Wir betrachten nun spezielle z, die $|z| > \underbrace{\max(|c|, 2)}_{=: r(c) \text{ Schwellwert}}$ erfüllen

Es gilt also $0 < 2 \le |c| < |z|$

oder $0 \le |c| \le 2 < |z|$

In beiden Fällen gilt sowohl $|c| < |z|$

also $-|c| > -|z|$ (1)

als auch $2 < |z| \Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0$ mit $2+\varepsilon = |z|$ (2)

Fall A

Für die Apfelmännchenfolge

gilt $z_0 = 0 \quad z_1 = c \quad z_2 = c^2 + c$

Ist hier $2 < |c| \Rightarrow \exists \varepsilon: 2 + \varepsilon = |c|$

so folgt genauso

$$|z_2| = |c^2 + c| \geq |c|^2 - |c| = (|c| - 1)|c|$$
$$= (2 + \varepsilon - 1)|c|$$
$$= (1 + \varepsilon) \cdot |c|$$

Also ist $|z_2| > |c| > 2$

echt

$\Rightarrow$ " $r(c)$

Schon z_2 erfüllt die Voraussetzung *

Also:

Beim Apfelmännchen

braucht man c mit $2 < |c|$

also c außerhalb des Fluchtkreises

gar nicht zu betrachten. Es wird sich nun

Fall B zeigen:

und für alle anderen c nicht

ein Überschreiten des Fluchtkreisrandes

um zu entscheiden, dass die Folge

gegen ∞ strebt, c also nicht zum

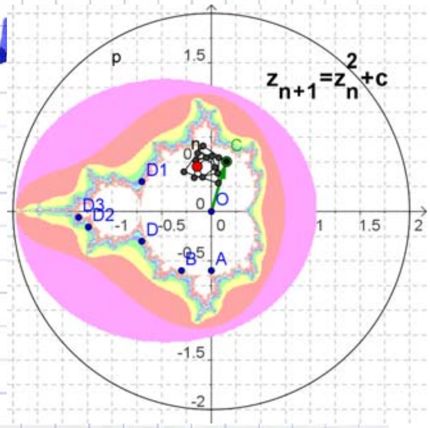
Apfelmännchen gehört

Fall B $|c| \le 2 < |z| \iff \exists\, \varepsilon > 0 : 2+\varepsilon = |z|$

Damit gilt die Kette $|f(z)| =$

$$|z^2+c| \underset{D}{\ge} |z^2| - |c| \underset{1}{\ge} |z^2| - |z|$$

$$= |z|^2 - |z|$$
$$= (|z| - 1)\,|z|$$
$$= (2+\varepsilon - 1)\,|z|$$
$$= (1+\varepsilon)\cdot|z|$$



Fluchtkreis = Kreis um 0 mit Radius 2

Also hat sich ergeben,

$\boxed{\text{Noch zu betrachten } 2 < |z| \le |c| \quad r(c) \overset{\text{s.u.}}{=} |c|}$

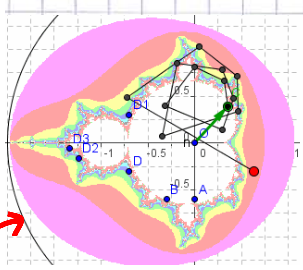
Für Apfelmännchenfolgen gibt es diesen Fall nicht,
wie auf der vorigen Seite gezeigt. Bei den für Juliamengen
betrachteten Folgen übersteigt aber auch die geometrisch
wachsende Folge diesen Wert, wenn z nicht Fixpunkt ist.

Satz: Ist ein Wert der Folge größer als der Schwellenwert $r(c) = \max(|c|, 2)$

$\Rightarrow$ die Folge strebt gegen unendlich
" " liegt im U_∞
im Einzugsbereich von ∞

dieses z und alle nachfolgenden Folgenglieder liegen in der Fluchtmenge von c F_c

Damit ist der Kreis um 0 mit Radius $r(c)$ eine erste Approximation der Gefangenenmenge G_c, sein Äußeres gehört sicher zu F_c



fluchtkreis.docx

Auch für die Juliamengen ist die Grundlage eine rekursive Formel wie z.B.

$$z_{n+1} = f(z_n) = z_n^2 + c,$$

Zu jdem c gibt es eine Juliamenge Jc. Führt die Bahn von z_0 gegen Unendlich, gehört z_0 zur **Fluchtmenge Fc** von c. Bleibt die Bahn beschränkt, gehört z_0 zur **Gefangenenmenge Gc** von c. Der Rand von Gc an der Grenze zu Fc heißt **Juliamenge Jc** von c.

Zum Zeichnen wird nun für ein festes c jeder Punkt des Bereiches als z_0 gewählt. z_0 wird gefärbt.

Wenn die Bahn von z_0 nach N Schritten beschränkt bleibt, d.h. Abstand 2 vom Ursprung nicht überschreitet, dann wird z_0 schwarz (blau) gefärbt. Sonst erhält z_0 eine Farbe, die der Indexnummer entspricht, bei der dieser Abstand 2 überschritten wurde.

Man kann sich vorstellen daß **an jeder Stelle c des Apfelmännchens ein Fenster** geöffnet werden kann, das die Blick auf die Juliamenge Jc freigibt.

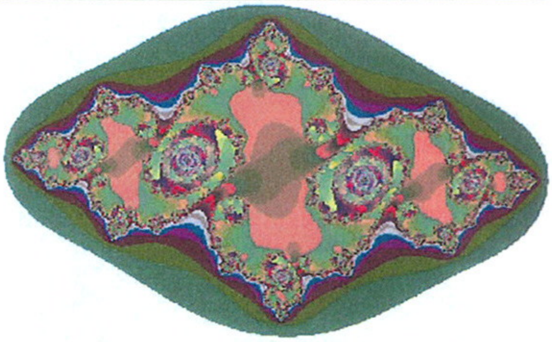
Es bestehen auch enge Zusammenhänge:

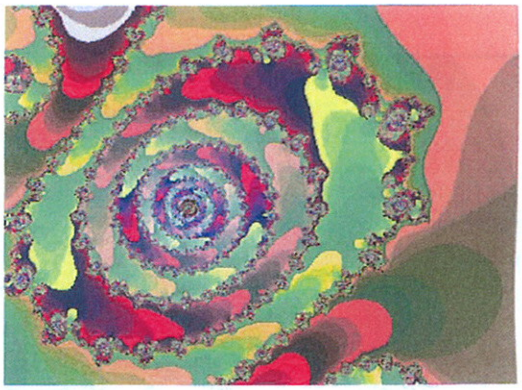
☺ Wenn c Punkt des Apfelmännchens ist, dann ist **Jc zusammenhängend**. Die Gefangenenmenge Gc ist dann eine Fläche.

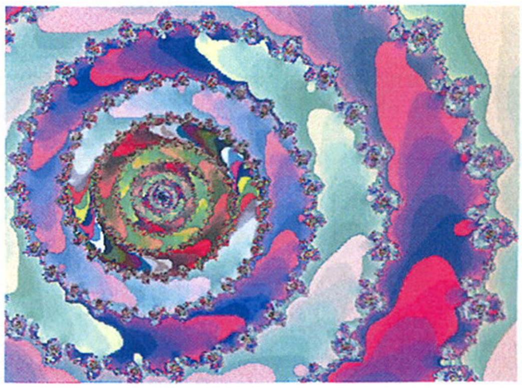
☺ Wenn c Randpunkt des Apfelmännchens ist, dann ist **Jc zusammenhängend**. Die Gefangenenmenge Gc stimmt dann aber mit der Juliamenge überein. Eine Fläche kommt nicht zustande.

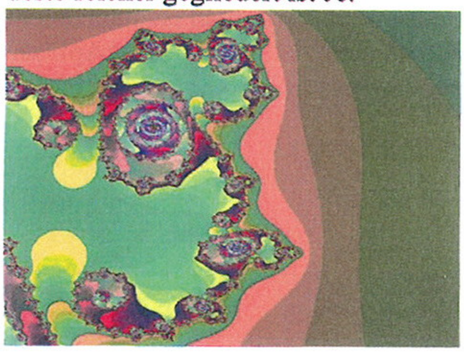
☺ Wenn c Punkt außerhalb des Apfelmännchens ist, dann ist **Jc total unzusammenhängend**, staubförmig, nur aus isolierten Punkten bestehend. Wieder ist Jc=Gc.

☺ Je dichter c am Rand des Apfelmännchens liegt, desto reicher gegliedert ist Jc.









Dieses Bild ist weniger als 1 Milliardstel breit und hoch

c = -0,7543 + 0,1130 i auf diesem Blatt.

Die Fixpunktgleichung $z = f(z) = z^2 + c$ hat die Lösungen

Z1=-0,503727346 + 0,056290187 i

und Z2= 1,503727346 - 0,056290187 i

Sie sind das Zentrum der großen linken Spirale und die äußerste rechte Spitze (linkes Bild). Beide sind abstoßende Fixpunkte.

-Z1 ist das Zentrum der großen rechten Spirale und

-Z2 ist die äußerste linke Spitze.

4.3.07

Mandelbrotmengen, Apfelmännchen, Juliamengen

Betrachtet werden Folgen $\langle z_n \rangle$ Ha08

mit $z_{n+1} = z_n^2 + c$ $\quad z_i, c \in \mathbb{C}$

$z_0 \in \mathbb{C}$

Für das Apfelmännchen betrachtet man alle Folgen $\langle z_n \rangle$ mit $z_0 = 0$

Sie bilden 3 Klassen von $\mathbb{C}$

$U := \{ c \mid z_0 = 0 \text{ und } \langle z_n \rangle_c \text{ unbeschränkt} \}$

$K := \{ c \mid z_0 = 0 \text{ und } \langle z_n \rangle_c \text{ konvergent} \}$

$R := \{ c \mid z_0 = 0 \text{ und } \langle z_n \rangle_c \text{ beschränkt und } c \notin K \}$

$U \cup K \cup R = \mathbb{C}$ $\quad \boxed{\text{Apf} = K \cup R = \text{Apfelmännchen}}$

Für die Juliamengen betrachtet man für jedes c und alle $z_0 \in \mathbb{C}$

Für c wird $\mathbb{C}$ in 3 Klassen eingeteilt

$F_c := \{ z_0 \mid \langle z_n \rangle_c \text{ unbeschränkt} \}$ = Fluchtmenge von c

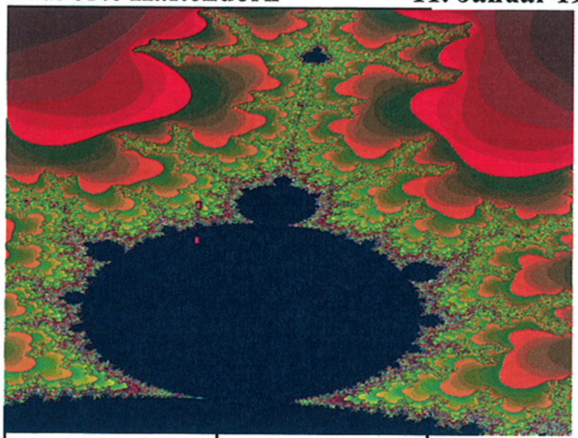
$K_c := \{ z_0 \mid \langle z_n \rangle_c \text{ konvergent}$

$J_c := \{ z_0 \mid \langle z_n \rangle_c \text{ beschränkt aber nicht konvergent} \}$

$G_c := K_c \cup J_c$ = Gefangenenmenge von c

J_c = Rand der Gefangenenmenge

$G_c := \{ z_0 \mid \langle z_n \rangle_c \text{ ist beschränkt} \}$



X	y
-0.071205213	0.93610345
-0.095539008	0.86541862

Apfemännchen im oberen Bereich

Als kleine Rechtecke sind zwei Juliapunkte eingezeichnet:
c1=-1.2+0.88i und c2=-1.2+0.887i
c1 liegt **im** Apfelmännchen. Darum ist die Juliamenge Jc1 zusammenhängend und es existiert die gefüllte Juliamenge Jgc1, hier blau gezeichnet.
c2 liegt **neben** dem Apfelmännchen. Darum ist die Juliamenge Jc2 total unzusammenhängend.
Nur ganz grob sehen sich die beiden Juliamengen ähnlich.

c1

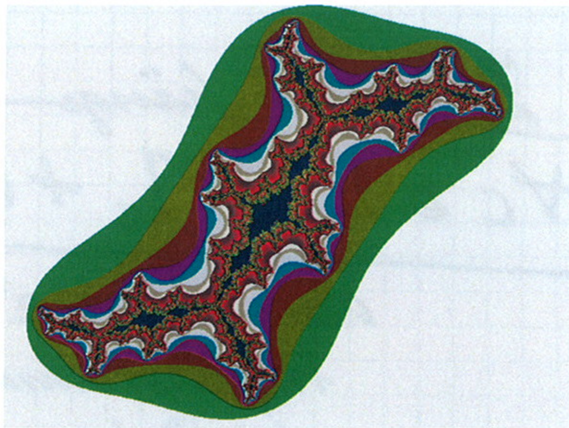
x	y
1.7104922	1.2432151
-1.5179969	-1.1931104

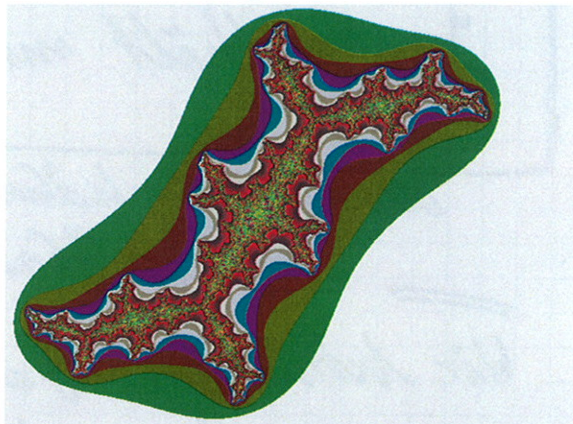
x	y
-.57307707	.53625471
-.82145668	.52096403

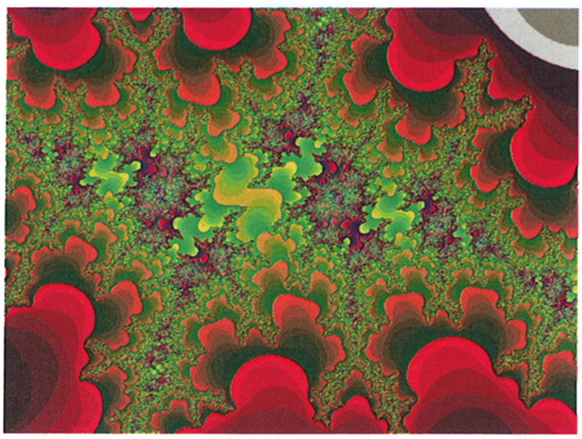
c2

x	y
.17088763	-1.1965231
-1.4428796	-1.2118996

x	y
-.59958298	.52475667
-.81585797	.52167494







4.3.08 Ha

Zusammenhänge

$$\boxed{\forall c \in \mathbb{C} \Rightarrow J_c \neq \emptyset, \ K_c \neq \emptyset, \ G_c \neq \emptyset}$$

denn $f(z) = z^2 + c$ Trägerfunktion

Fixpunktansatz $z = z^2 + c$

Alle Polynome vom Grad n haben genau n Lösungen in $\mathbb{C}$ $\Rightarrow \exists\, z_1, z_2$ Fixpkte

1. Iterierte $f(f(z)) = (z^2+c)^2 + c = z$

hat 4 Fixpunkte

davon sind 2 Häufungspunkt von f die nicht Fixpunkt von f sind.

Also $F_c \subset \mathbb{C}$ $\{z_1, z_2\} \subset K_c$ $\{z_3, z_4\} \subset J_c$

qed.

$\forall c \in \mathbb{C}$ gilt:

J_c enthält mindestens abzählbar-unendlich viele Punkte

denn jede höhere Iterierte erzeugt neue Häufungswerte.

Wir betrachten J_c und fragen $0 \in J_c$?

$0 \in J_c \Leftrightarrow (\langle z_n \rangle_c$ und $z_0 = 0)$ ist beschränkt und konvergiert nicht

$\Leftrightarrow c \in R$ Rand des Apfelmännchens.

Wir betrachten G_c und fragen $0 \in G_c$

$0 \in G_c \Leftrightarrow (\langle z_n \rangle_c$ und $z_0 = 0)$ beschränkt

$\Leftrightarrow c \in Apf$

ebenso $0 \in K_c \Leftrightarrow c \in K$

K inneres des Apfelm.

$$\boxed{0 \in F_c \Leftrightarrow c \notin Apf}$$